パラメータ付き Grothendieck point residue の実装

On implementation of computing Grothendieck point residues with parameters

東京理科大理学部第一部応用数学科　　鍋島克輔 *1
KATSUSUKE NABESHIMA
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

新潟大学大学院自然科学研究科　　田島慎一 *2
SHINICHI TAJIMA
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY

Abstract

An algorithm for computing Grothendieck point residues with parameters is considered, based on comprehensive Gröbner systems and algebraic local cohomology with parameters. The algorithm has been implemented in the computer algebra system Risa/Asir, and the implementation results are also presented.

1　はじめに

Grothendieck 留数の計算法に関する研究は，第 2 著者により 20 年以上行われており，多くの結果を得ている ([12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25])．本稿では，パラメータ付き Grothendieck point residue の計算法を紹介する．

Grothendieck point residue の計算法は著者たちの論文 [22, 23] で紹介されている．論文 [23] で紹介されている計算法は R. Hartshorne の「Residues and Duality」[1] に基づいた『transformation law を用いた』方法であり，論文 [22] で紹介された計算法は transformation law を回避し『1 階の偏微分作用素を用いて』を求める方法である．

本稿では主に論文 [23] の『Transformation law を用いた』方法をパラメータが介在した場合に一般化する．

論文 [23] で紹介されている計算法は，収束冪級数環でのイデアルメンバーシップの計算，syzygy 加群のグレブナー基底計算，剰余環での逆元計算，代数的局所コホモロジー計算が必要となる．パラメータが介在した場合，包括的グレブナー基底系とパラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いることでこららの計算は可能であることから，パラメータ付き Grothendieck point residue の計算アルゴリズムは構成可能である．第 4 節では，その計算アルゴリズムを紹介する共に，計算機代数システム Risa/Asir に実装されたプログラムの出力例もみる．

Grothendieck point residue は，複素多様体に対する不動点定理や正則ベクトル場の特異点における解析，近年では Futaki invariant と関係があることが知られており，特異点や特性類の理論と密接な関係ある．

*1 〒 162-0825 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp
*2 〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地　E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

2025 年の著者たちの論文 [24] では，積分曲線が複数の既約成分を持つ場合に対する正則ベクトル場のある種の指数である Camacho-Sad-Suwa 指数の計算法を Grothendieck point residue 用いて構成している．

パラメータ付き Grothendieck point residue が計算できるようになれば，特異点変形の理論を含め，更なる研究の可能性が広がることになる．

2 Transformation law を用いた Grothendieck point residue の計算法

ここでは，論文 [23] にある『transformation law を用いた Grothendieck point residue の計算法』について復習を行う．

Grothendieck point residue は，論文 [1] にある transformation law を用いることでその値を求めることが数学的にはできることになっている．しかし，この transformation law を利用するには，収束冪級数環における syzygy 等，種々の計算を行うことが必要となるため，留数値を求めることは実際には極めて困難である．

論文 [23] では，transformation law をいかに上手に利用し，効率のよいアルゴリズムとして実現させるかという観点から計算法の構成を行っている．

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X と, X 上正則な n 個の関数の組を $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ としそれらの X における共通零点は原点 O のみとする．ここで x は独立変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ をあらわす．いま, X 上の正則関数 $h(x)$ が与えられたとする．このとき, 積分

$$(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}})^n \int \cdots \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{h(x)}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を

$$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{h}{f_1 f_2 \cdots f_n}\right)$$

であらわし, Grothendieck point residue と呼ぶ．ただしここで, γ_ε は 十分小さな正の数 $\varepsilon > 0$ を与えることで定まる実 n 次元サイクル $\gamma_\varepsilon = \{x \in X \mid \|f_1(x)\| = \varepsilon, \ldots, \|f_n(x)\| = \varepsilon\}$ である．

X 上の正則関数の成す層を $\mathcal{O}_X$, その原点における茎を $\mathcal{O}_{X,O}$ とおく．原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジーを $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ で表す．正則関数の組 $\mathrm{F} = \{f_1(x), f_2(x) \ldots, f_n(x)\}$ が収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアルを $\mathcal{I}_F$ で表す．

$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{I}_F, \mathcal{O}_{X,O})$ の元 $\left[\begin{array}{c}1\\ f_1 \ldots f_n\end{array}\right]$ の自然な写像 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{I}_F, \mathcal{O}_{X,O}) \to H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ による像を, τ_F とおく．

代数的局所コホモロジー $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ の要素であり, 正則関数の組 F が生成するイデアル $\mathcal{I}_F \subset \mathcal{O}_{X,O}$ により annihilate される局所コホモロジー類からなるベクトル空間を

$$H_F := \left\{\psi \in H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, f_1\psi = f_2\psi = \cdots = f_n\psi = 0\right\}$$

で表す．局所コホモロジー類 τ_F は, H_F に属す．

Grothendieck point residue $\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{h}{f_1 f_2 \cdots f_n}\right)$ は，代数的には，H_F に属す局所コホモロジー類 τ_F を用いて $\mathrm{res}_{\{O\}}(h \cdot \tau_F)$ と定義される．局所コホモロジー類 $\left[\begin{array}{c}1\\ x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\end{array}\right]$ と正則函数 $h(x_1, \ldots, x_n) =$

$\sum c_{(j_1,\dots,j_n)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ に対して

$$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(h \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \end{array} \right]\right) = c_{(k_1-1, k_2-1, \dots, k_n-1)}$$

が成り立つ．したがって，Grothendieck point residue の値を求めることは τ_F に対するベクトル空間 H_F の基底局所コホモロジー類の線型結合としての表現を求める問題として捉えることができる．

さて, 正則関数の組 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ の X における共通零点は, 原点 O のみであることから, 各 $j = 1, 2, \dots, n$ に対し $x_j^{\ell_j} \in \mathcal{I}_F$ を満たす自然数 ℓ_j が存在する．従って, $j = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$x_j^{\ell_j} = a_{j,1}(x) f_1(x) + a_{j,2}(x) f_2(x) + \cdots + a_{j,n}(x) f_n(x)$$

を満たす正則関数 $a_{j,k}(x)$ が存在する．ここで

$$D(x) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とおく．正則関数の組 $\mathrm{ML} = \{x_1^{\ell_1}, x_2^{\ell_2}, \dots, x_n^{\ell_n}\}$ に対し, ML が収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアルを $\mathcal{I}_{ML}$ とし, 先程と同様に, 局所コホモロジー類 τ_{ML} を

$$\tau_{ML} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n} \end{array} \right] \in H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$$

で定める. この時, $f_1 \cdot (D \cdot \tau_{ML}) = f_2 \cdot (D \cdot \tau_{ML}) = \cdots = f_n \cdot (D(x) \cdot \tau_{ML}) = 0$ より，$D(x) \cdot \tau_{ML} \in H_F$ が従う．

局所コホモロジーの概念を用いると transformation law ([1], p. 197) は次のように表すことができる．

補題 1 (Transformation low)

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ f_1 f_2 \cdots f_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} D(x) \\ x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n} \end{array} \right]$$

が成立する．

この補題を用いると,

$$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{h(x)}{f_1 f_2 \cdots f_n}\right) = \mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{h(x) D(x)}{x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n}}\right)$$

を得る．

ベクトル空間 H_F の基底を $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}$ とする．この基底は論文 [5, 9, 20] により紹介されたアルゴリズムを用いることにより計算可能である．

$$x_j^{\ell_j} \in \mathcal{I}_F \subset \mathcal{O}_{X,O} \iff x_j^{\ell_j} \psi_i = 0 \quad (1 \le i \le s)$$

であるので，最小の ℓ_j は H_F の基底から得ることができる．

次に,

$$x_j^{\ell_j} = a_{j,1}(x) f_1(x) + a_{j,2}(x) f_2(x) + \cdots + a_{j,n}(x) f_n(x)$$

となる $a_{j,1}(x), a_{j,2}(x), \dots, a_{j,n}(x)$ を求めるために次の補題を用いる．ここでは，$I = \langle F \rangle \subset \mathbb{C}[x]$ であり，I は多項式環でのイデアルを表している．

補題 2
$x_j^{\ell_j} \in \mathcal{I}_F \quad \Longleftrightarrow \quad \exists q \in I : \langle x_j^{\ell_j} \rangle \ s.t.\ q \notin \mathfrak{m}.$
すなわち，$q(x)x_j^{\ell_j} \in I \subset \mathbb{C}[x]$ である．ここでは，$I : \langle x_j^{\ell_j} \rangle$ は多項式環 $\mathbb{C}[x]$ でのイデアル商であり $\mathfrak{m} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ は $\mathcal{O}_{X,O}$ での極大イデアルである．

多項式環でイデアル商 $I : \langle x_1^{\ell_1}, x_2^{\ell_2}, \ldots, x_n^{\ell_n} \rangle$ を計算することにより，以下の式のように共通となる多項式 $q(x) \in I : \langle x_1^{\ell_1}, x_2^{\ell_2}, \ldots, x_n^{\ell_n} \rangle \subset \mathbb{C}[x]$，$q(O) \neq 0$ を取ることができる．

$$\begin{aligned} q(x)x_1^{\ell_1} &= b_{1,1}f_1 + b_{1,2}f_2 + \cdots + b_{1,n}f_n \\ q(x)x_2^{\ell_2} &= b_{2,1}f_1 + b_{2,2}f_2 + \cdots + b_{2,n}f_n \\ &\vdots \\ q(x)x_n^{\ell_n} &= b_{n,1}f_1 + b_{n,2}f_2 + \cdots + b_{n,n}f_n \end{aligned}$$

このとき，

$$a_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{q(x)}$$

であり，多項式環での拡張グレブナー基底アルゴリズムを用いることにより，$b_{1,1}, \ldots, n_{n,n}$ はすべて計算可能である．

よって，

$$D(x) = \left(\frac{1}{q(x)}\right)^n \det \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{q(x)}\right)^n D_b(x), \quad D_b(x) = \det \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ f_1 f_2 \cdots f_n \end{array} \right] = \left(\frac{1}{q(x)}\right)^n \left[\begin{array}{c} D_b(x) \\ x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n} \end{array} \right]$$

となる．

$\left(\frac{1}{q(x)}\right)$ は，イデアル $\langle x_1^{\ell_1}, \ldots, x_n^{\ell_n} \rangle$ を法とした多項式環で考えると

$$q(x)u(x) \equiv 1 \mod \langle x_1^{\ell_1}, \ldots, x_n^{\ell_n} \rangle$$

となる $u(x)$ のことであり，$u(x)$ を求める方法として次が知られている．

定理 3 (鈴木-佐藤 [26])
u を変数とし，$Q' = \{q(x)u - 1, x_1^{\ell_1}, \ldots, x_n^{\ell_n}\}$ とする．u を常に大きくする $u \gg x$ に関するブロック項順序の $\langle Q' \rangle$ の簡約グレブナー基底を G とする．このとき，$c(x) \in \mathbb{C}[x]$ で $c(x)u - d \ \ (d \in \mathbb{C})$ となる形をした元が G に存在し，

$$q(x)(c(x)/d) \equiv 1 \mod \langle x_1^{\ell_1}, \ldots, x_n^{\ell_n} \rangle$$

である．ただし，$c(x) \in \mathbb{C}[x]$ である．

$q(x)$ にパラメータが介在する場合には，$\langle Q' \rangle$ の包括的グレブナー基底系を求めることで，$q(x)$ の逆元は得られる．

3 包括的グレブナー基底系

ここでは，本稿で必要となる包括的グレブナー基底系について復習する．本稿では，複素数体 $\mathbb{C}$ 上で議論をしているので，多項式環の係数を $\mathbb{C}$ とする．

$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を変数集合，$t = \{t_1, \ldots, t_m\}$ をパラメータ集合とし，$x \cap t \neq \emptyset$ とする．x に項順序を設定する．このとき，多項式 $f \in \mathbb{C}[t][x]$ に対して，$\mathrm{lt}(f), \mathrm{lm}(f), \mathrm{lc}(f)$ をそれぞれ $\mathbb{C}[t]$ に関する f の先頭項，先頭単項，先頭係数とする．つまり，$\mathrm{lm}(f) = \mathrm{lc}(f)\mathrm{lt}(f)$ である．また，$F \subset \mathbb{C}[t][x]$ に対し，$\mathrm{lt}(F) = \{\mathrm{lt}(f) | f \in F\}, \mathrm{lm}(F) = \{\mathrm{lm}(f) | f \in F\}, \mathrm{lc}(F) = \{\mathrm{lc}(f) | f \in F\}$ である．多項式 $g_1, \ldots, g_l \in \mathbb{C}[t]$ に対して，$g_1, \ldots, g_l$ で定義されるアフィン多様体を $\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_l)$ と定義する．つまり，$\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_l) = \{\bar{a} \in \mathbb{C}^m \mid g_1(\bar{a}) = \cdots = g_l(\bar{a}) = 0\}$ である．また $\mathbf{V}(1) = \emptyset$ とする．任意の元 $\bar{a} \in \mathbb{C}^m$ に対して，特化準同型写像 $\sigma_{\bar{a}} : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ $(f \to f(\bar{a}))$ を定義する．この写像は自然な拡張として $\sigma_{\bar{a}} : \mathbb{C}[t][x] \to \mathbb{C}[x]$ と考えることもできる．本稿での包括的グレブナー基底系の定義は次とする．

定義 4 (包括的グレブナー基底系)
$E_1, \ldots, E_l, N_1, \ldots, N_l$ を $\mathbb{C}[t]$ の有限部分集合，$G_1, \ldots, G_l$ を $\mathbb{C}[t][x]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を x 上の項順序とする．このとき，F の有限部分集合 $\mathcal{G} = \{(E_1, N_1, G_1), \ldots, (E_l, N_l, G_l)\}$ が $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する $\bigcup_{i=1}^{l}(\mathbf{V}(E_i) \setminus \mathbf{V}(N_i))$ 上の包括的グレブナー基底系であるとは，以下を満たすときである．

(1) 各 $i \in \{1, \ldots, l\}$ に対し，$\mathbf{V}(E_i) \setminus \mathbf{V}(N_i) \neq \emptyset$,

(2) $i \neq j$ に対し，$(\mathbf{V}(E_i) \setminus \mathbf{V}(N_i)) \cap (\mathbf{V}(E_j) \setminus \mathbf{V}(N_j)) = \emptyset$,

(3) 任意の $\bar{a} \in \mathbf{V}(E_i) \setminus \mathbf{V}(N_i)$ に対し，$\mathrm{lt}(G_i) = \mathrm{lt}(\sigma_{\bar{a}}(G_i))$,

(4) 任意の $\bar{a} \in \mathbf{V}(E_i) \setminus \mathbf{V}(N_i)$ に対し，$\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ がゼロイデアルでないなら $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$ は $\mathbb{C}[x]$ 上で $\succ$ に関する $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の極小グレブナー基底であり，そうでないなら $\{\sigma_{\bar{a}}(G_i)\} = \{\sigma_{\bar{a}}(F)\} = \{0\}$

このとき，(E_i, N_i, G_i) を断片といい，$\bigcup_{i=1}^{l}(\mathbf{V}(E_i) \setminus \mathbf{V}(N_i)) = \mathbb{C}^m$ なら単に G を $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する包括的グレブナー基底系という．

包括的グレブナー基底系は存在し，計算アルゴリズムと実装は [2, 3, 4] などで紹介されている．また，包括的グレブナー基底系を計算後，(4) の極小グレブナー基底からを簡約グレブナー基底を計算することは可能である．

本稿は，原点での Grothendieck point residue の計算を考えていることから，原点に孤立した零点を想定している．しかしながら，想定する多項式にパラメータが介在すると，零点が孤立しない場合が生じる．どのようなパラメータ条件で『孤立するのか』,『孤立しないのか』を予め知る必要が生じる．次の定理は，この問題を解決する．

定理 5 (鍋島-田島 [11])
項順序を固定し，$F \in \mathbb{C}[x]$，$\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset \mathbb{C}[x]$，$O \in \mathbf{V}(F) \subset \mathbb{C}^n$ とする．また，G を飽和 $\langle F \rangle : \mathfrak{m}^\infty \subset \mathbb{C}[x]$ の極小グレブナー基底とする．このとき，$\mathbf{V}(F)$ が原点に孤立点を持つ必要十分条件は，G に $g(O) \neq 0$ となる $g \in G$ が存在することである．

この定理より，G にゼロで無い定数項を持つ多項式が存在すれば，$\mathbf{V}(F)$ は原点に孤立点を持つことになる．F にパラメータが介在する場合には，$\langle F \rangle : \mathfrak{m}^\infty$ の包括的グレブナー基底系を計算することにより，どのようなパラメータの条件で『孤立しないのか』を確かめることができる．

4 パラメータ付き Grothendieck point residue の計算法

ここでは，多項式 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ にパラメータ $t = \{t_1, \ldots, t_m\}$ が介在し，$f_1(O) = \cdots = f_n(O) = 0$ とする．このとき，Grothendieck point residue は，パラメータ付き多項式の数式処理のテクニックを用いることにより計算可能である．計算機代数では，パラメータをパラメータとして取扱うことができるという強みがある．

ちなみに，両著者は原点に孤立特異点を持つ超曲面の特異点変形により Grothendieck point residue がどのように変化するのか具体的に知りたいため，本稿の主目的である『パラメータ付き Grothendieck point residue の計算法』を研究することになった．

第 2 節で紹介した計算法をパラメータが付随した場合に拡張する．
$h(x) \in \mathbb{C}[t][x]$ とし，Grothendieck point residue $\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\dfrac{h(x)}{f_1 f_2 \cdots f_n}\right)$ を求める計算法は次である．

計算法の概要

Step 0: $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$，$L = \emptyset$ とする．

Step 1: 飽和イデアル $\langle F \rangle : \mathfrak{m}^\infty \subset \mathbb{C}[x]$ の包括的グレブナー基底系 $\mathcal{G}$ を計算し，

$$\mathcal{H} = \{(E, N, g) | \exists g \in G \text{ s.t. } g(O) \neq 0\},\ \ \mathbb{B} = \textstyle\bigcup_{(E,N,G)\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{H}} (\mathbf{V}(E)\backslash\mathbf{V}(N))$$

とする．
(定理 5 より，パラメータ t が $\mathbb{B}$ に属しているとき，$f_1 = 0, \cdots, f_n = 0$ は原点に共通する孤立点を持たないことを意味する．)

Step 2: 各 $(E_i, N_i, g_i) \in \mathcal{H}$ において，$\mathbf{V}(E_1)\backslash\mathbf{V}(E_i)$ 上で，H_F のパラメータ付き代数的局所コホモロジーを計算し，$x_j^{\alpha_j} \in \langle F \rangle \subset \mathcal{O}_{X,O}$ となる最小の α_{ij} を計算する．
(パラメータ付き代数的局所コホモロジーは計算可能であり，計算法と実装は論文 [5, 9] で紹介されている．)

Step 3: $g_i x_j^{\alpha_{ij}} = a_{ij,1} f_1 + a_{ij,2} f_2 + \cdots + a_{ij,n} f_n$ となる $a_{ij,1}, a_{ij,2}, \ldots, a_{ij,n} \in \mathbb{C}[t][x]$ をパラメータ付き拡張イデアルメンバーシップにより求める。
(パラメータ付き拡張イデアルメンバーシップは先行研究 [7, 9] で得られている．)

Step 4: $T_{Li} = \det \begin{pmatrix} a_{i1,1} & a_{i1,2} & \cdots & a_{i1,n} \\ a_{i2,1} & a_{i2,2} & \cdots & a_{i2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{in,1} & a_{in,2} & \cdots & a_{in,n} \end{pmatrix}$ を計算する．
(この計算においては，パラメータの有り無しは関係なく，行列式を求めるだけである．)

Step 5: $\mathbf{V}(E_i)\backslash\mathbf{V}(N_i)$ 上で g_i の $\langle x_1^{\alpha_{i1}}, \ldots, x_n^{\alpha_{in}} \rangle$ を法とした逆元を求める．すなわち，定理 3 に従い新たな変数 u を導入し，$u \gg x$ となるブロック項順序において，$\{g_i u - 1, x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\}$ で生成されるイデアルの包括的グレブナー基底系 $\mathcal{P}_i$ を $\mathbf{V}(E_i)\backslash\mathbf{V}(N_i)$ 上で計算する．

$$\mathcal{Q}_i = \{(E, N, g/d) | g \cdot u - d \in G, d \in \mathbb{C}, (E, N, G) \in \mathcal{P}_i\}$$

Step 6: 各断片 $(E, N, \mathrm{inv}_g) \in \mathcal{Q}_i$ ごとに，$(\mathrm{inv}_g)^n h(x) T_{Li}$ の項 $x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_n^{\alpha_n - 1}$ の係数 c' を探す．c' が $\mathbf{V}(E) \backslash \mathbf{V}(N)$ 上での Grothendieck point residue となる．
L を $L \cup \{(E, N, c')\}$ と更新する．

Return $(L, \mathbb{B})$

上記の出力 $(L, \mathbb{B})$ において，L の元 (E, N, c') は，任意の $t \in \mathbf{V}(E) \backslash \mathbf{V}(N)$ において，

$$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{\sigma_t(h)}{\sigma_t(f_1) \cdots \sigma_t(f_n)} \right) = \sigma_t(c')$$

となることを意味する．

以下，混乱は生じないと思われるので，パラメータが $\mathbf{V}(E) \backslash \mathbf{V}(N)$ に属するとき，記号 σ_t は書かずに，単に

$$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{h}{f_1 \cdots f_n} \right) = c'$$

と書くようにする．

第 1 著者は，上記のパラメータ付き Grothendieck point residue の計算法を，計算機代数システム Risa/Asir に実装した．

次に，パラメータ付き Grothendieck point residue の具体例を与える．

例 1

x, y を主変数，a をパラメータとし $f = x^3 + y^4 + axy^3 + y^6$ を考える．このとき，$f = 0$ で定義される超曲面は，a がどのような値を取ろうが $\mathbb{C}^2$ の原点に孤立特異点をもつ．このとき，$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})} \right)$ として，我々のプログラムは次を出力する．

$$\left\{ (\{a\}, 1, 0), \left(\{0\}, a, \frac{27a^{10} - 4608a^4}{65536} \right) \right\}$$

これは，パラメータ a が $\mathbf{V}(a)$ に属するとき *(i.e.* $a = 0$*)*，$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})} \right) = 0$ であり，パラメータ a が $\mathbb{C} \backslash \mathbf{V}(a)$ に属するとき *(i.e.* $a \neq 0$*)*，$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})} \right) = \frac{27a^{10} - 4608a^4}{65536}$ となることを意味する．

2 つ目の式 $\frac{27a^{10} - 4608a^4}{65536}$ に $a = 0$ の場合を加えても矛盾は起きないことからまとめることができ

$$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})} \right) = \frac{27a^{10} - 4608a^4}{65536}$$

となる．包括的グレブナー基底系の計算と同様に，紹介した計算法は計算の便宜上，パラメータ空間の不必要な分割が起こる場合が多々ある．

次に，$\mathrm{res}_{\{O\}} \left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 (\frac{\partial f}{\partial y})} \right)$ を考える．このとき，我々のプログラムは次を出力する．

$$\Big\{ \left(\{0\}, 8a^7 + 162a^4 + 729a, \frac{-884736a^9 + 83607552a^6 - 470292480a^3}{4096a^{18} + 165888a^{15} + 2799360a^{12} + 25194240a^9 + 127545840a^6 + 344373768a^3 + 387420489} \right),$$
$$\left(\{4a^3 + 27\}, 1, \frac{14}{2187} \right), \left(\{2a^3 + 27\}, 1, \frac{134144}{2187} \right), (\{a\}, 1, 0) \Big\}$$

このとき，$a=0$ と $2a^3+27=0$ の場合は *1* つ目の式にまとめることができ，

$$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})^2(\frac{\partial f}{\partial y})}\right)=\begin{cases}\frac{-884736a^9+83607552a^6-470292480a^3}{4096a^{18}+165888a^{15}+2799360a^{12}+25194240a^9+127545840a^6+344373768a^3+387420489}, \\ \quad (4a^3+27\neq 0\ \text{のとき}) \\ \\ \dfrac{14}{2187}, \quad (4a^3+27=0\ \text{のとき})\end{cases}$$

となる．$4a^3+27=0$ のとき，特異な値を取ることがわかる．

例 2

x,y を主変数，a,b をパラメータとし $f=x^3+y^{10}+axy^7+bxy^8$ を考える．このとき，$f=0$ で定義される超曲面は，a,b がどのような値を取ろうが $\mathbb{C}^2$ の原点に孤立特異点をもつ．このとき，$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})}\right)$ として，次を得る．

$$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})}\right)=$$
$$\begin{cases}\frac{s(a,b)}{1771470000000000000000000000}, & ((a,b)\in\left(\mathbb{C}^2\backslash\mathbf{V}(2401a^4-19200b)\right)\cup\mathbf{V}(2401a^4-19200b,ab)\ \text{のとき}) \\ \\ \frac{78097027629056ab^8+349345500000000b^4}{278061573234375a^2}, & ((a,b)\in\mathbf{V}(2401a^4-19200b)\backslash\mathbf{V}(ab)\ \text{のとき})\end{cases}$$

ただし，

$s(a,b)=-558545864083284007a^{31}+10503267706522396050 0a^{27}b-7559447241052040040000a^{23}b^2+$
$260750127032578575000000a^{19}b^3-44118036770536953000000000a^{15}b^4+98059265010000000000000a^{14}+$
$33445831975357410000000000a^{11}b^5-720435416400000000000000a^{10}b-884908091450880000000000000a^7b^6+$
$1220479407000000000000000a^6b^2+417628680192000000000000000a^3b^7-287109360000000000000000000a^2b^3$

である．

例 3

x,y,z を主変数，a,b をパラメータとし $f=x^3+yz^2+y^7+axy^5+bxz^2$ を考える．このとき，$f=0$ で定義される超曲面は，a,b がどのような値を取ろうが $\mathbb{C}^3$ の原点に孤立特異点をもつ．このとき，$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z})}\right)$ として，次を得る．

$$\mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z})}\right)=\begin{cases}\frac{s(a,b)}{6410412969534273533 4}, & ((a,b)\in\left(\mathbb{C}^2\backslash\mathbf{V}(12a^4+343b)\right)\cup\mathbf{V}(12a^4+343b,ab)) \\ \\ \frac{-1055695243673ab^6}{117546246144}, & ((a,b)\in\mathbf{V}(12a^4+343b)\backslash\mathbf{V}(ab))\end{cases}$$

ただし，

$s(a,b)=-762939453125a^{25}+6280517578125a^{21}b-51701220703125a^{17}b^2+425604448828125a^{13}b^3-3503575822753125a^9b^4+28841436172903725a^5b^5+830979459013702124 7ab^6$

である．

本研究により，パラメータ付き Grothendieck point residue は計算できるようになった．

Grothendieck residue の値を求める計算アルゴリズムに関する先行研究 [15, 17, 25, 22] では，収束冪級数環における計算を極力回避し，局所コホモロジー類の満たすホロノミー D-加群を用いており，transformation law を利用していない．

1 階の偏微分作用素を用いて Grothendieck point residue を計算する方法が，論文 [22] で紹介されている．この計算法は，主に syzygy 計算と代数的局所コホモロジー計算で構成されている．パラメータ付き多項式並びにベクトルたちに関する syzygy 加群の包括的グレブナー基底系は計算可能であり Risa/Asir のプログラムは存在する．また，パラメータ付き代数的局所コホモロジーも計算可能でありこちらも Risa/Asir のプログラムは存在する [5, 6, 9]．したがって，論文 [22] で紹介された方法もパラメータが介在するものに一般化できる．一般化に関する詳細は，ここでは省略する．

パラメータ付き対数的ベクトル場の計算法は論文 [6, 10] で紹介されており，対数的ベクトル場と Grothendieck point residue を用いた Camacho-Sad-Suwa 指数の計算法として [24] がある．今回，パラメータ付き Grothendieck point residue が計算可能となったことより，応用としてパラメータの付いた Camacho-Sad-Suwa 指数も計算可能となった．これについては，どこかで報告したい．

謝　辞

本研究，科学研究費補助金基盤研究 (C)（22K03334,23K03076）の助成を受けたものである．

参 考 文 献

[1] Hartshorne, R.: Residues and Duality. Lecture Notes in Math. **20**, 1966

[2] Kapur, D., Sun, Y., Wang, D.: A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems. Proc. ISSAC'2010, ACM Press, New York, 29-36, 2010

[3] Montes, A.: The Gröbner Cover. Springer Nature, Switzerland, 2018

[4] Nabeshima, K.: Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems. Proc. CASC 2012. LNCS, **7442**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012

[5] Nabeshima, K. and Tajima, S.: On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases. Proc. ISSAC2014, 351–358, 2014

[6] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Computing logarithmic vector fields associated with parametric semi-quasihomogeneous hypersurface isolated singularities. Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC' 2015), 291–298, 2015.

[7] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Solving extended ideal membership problems in rings of convergent power series via Gröbner bases. *LNCS*, **9582**, 252–267, Springer, 2016

[8] 鍋島克輔, 田島慎一: グレブナー基底を用いた収束冪級数環での拡張イデアル所属アルゴリズムについて. 数理解析研究所講究録, 第 2054 号, 118-125.2017

[9] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals. Journal of Symbolic Computation, **82**, 91–122, 2017

[10] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Computation methods of logarithmic vector fields associated with semi-weighted homogeneous isolated hypersurface singularities. Tsukuba Journal of Mathematics , **42-2**, 191–231, 2018.

[11] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Testing zero-dimensionality of a variety at a point. Mathematics in Computer Science, **15**, 317–331, 2021

[12] 小原功任, 田島慎一: 多変数留数の計算アルゴリズム (シエイプ基底を持つ場合). 京都大学数理解析研究所講究録 **2019**, 85-87, 2017

[13] 庄司卓夢, 田島慎一: 高速留数計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**, 133–143, 2005

[14] 庄司卓夢, 田島慎一: 一変数代数的局所コホモロジー類に対する Risa/Asir 用パッケージ taji_alc. Risa/Asir Journal, **2**, . 1–32, 2007

[15] 田島慎一, 中村弥生: 多変数有理関数の留数計算について. 京都大学数理解析研究所講究録 **1085**, 71–81, 1999

[16] 田島慎一, 中村弥生: $\mathcal{D}$-加群を用いた留数値計算アルゴリズムの局所化. 数式処理 **7**, 2–10, 日本数式処理学会, 1999

[17] 田島慎一, 中村弥生: Computing point residues for a shape basis case via differential operators, 京都大学数理解析研究所講究録 **1158**, 87–97, 2000

[18] 田島慎一: Noether 作用素を多変数留数計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録 **1431**, 123–136, 2005

[19] 田島慎一: 多変数留数の計算代数解析とホロノミー D 加群. 京都大学数理解析研究所講究録 **1532**, 43–59, 2007

[20] Tajima, S. Nakamura, Y. and Nabeshima, K.: Standard Bases and Algebraic Local Cohomology for Zero Dimensional Ideals. Advanced Studies in Pure Mathematics, **56**, 341–361, 2009

[21] 田島慎一: 微分作用素を用いたレゾルベントの留数解析と行列のスペクトル分解. 京都大学数理解析研究所講究録 **1814**, 17–28, 2012

[22] Tajima, S. and Nabeshima, K.: Computing Grothendieck point residues via solving holonomic systems of first order partial differential equations. Proc. ISSAC 2021, ACM, 361–368, 2021

[23] Tajima, S. and Nabeshima, K.: An effective method for computing Grothendieck point residue mappings. Journal of Algebra , **593**, 568–588, 2022

[24] Tajima, S. and Nabeshima, K.: Computing Camacho-Sad-Suwa indices of logarithmic vector fields relative to singular curves. Research in the Mathematical Sciences. **12**, 89, 2025

[25] Tajima, S. and Nakamura, Y.: Computational aspects of Grothendieck local residues, Séminaire et Congrès **10**, *Singularités Franco-Japonaises, Société Mathématique de France*, 287–305, 2005

[26] Sato, Y. and Suzuki, A.: Computation of inverses in residue class rings of parametric polynomial ideal. Proc. ISSAC 2009, 311–316. ACM , 2009