概均質多様体上の相対不変多項式

Relative invariant polynomials on a prehomogeneous variety

九州大学大学院数理学府　太田了徳 *1 *2
RYOTOKU OTA
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Abstract

For the determinant of the k-th exterior power of a complex $n \times n$ matrix, we introduce a polynomial whose $\binom{n-1}{k-1}$-th power equals that determinant. We call such a polynomial a *Sylvester–Franke polynomial*. We prove that Sylvester–Franke polynomials are relative invariant polynomials on a prehomogeneous variety.

1 序章

$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{C})$, $1 \le k \le n$, $k \mid n$ とする. $X := \wedge^k A$ とし, k 次外冪 X の第 (s_d, t_d) 成分 $x_{s_d t_d}$ を $x_{s_d t_d} := \det A[I_{s_d} \mid J_{t_d}]$ とおく. このとき,

$$SF_{n,k}(X) := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{\substack{J_{t_1},\dots,J_{t_r} \in Q(n,k), \\ \bigsqcup_{d=1}^{r} J_{t_d} = [n]}}^{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots 1} \left(\varepsilon_{I_{s_1}|\cdots|I_{s_r}} \, \varepsilon_{J_{t_1}|\cdots|J_{t_r}} \right) \prod_{d=1}^{r} x_{s_d t_d} \right) \zeta^m; & \displaystyle\bigsqcup_{d=1}^{r} I_{s_d} = [n] \text{ なる } I_{s_d} \in Q(n,k) \text{ を固定}, \\ \left(\displaystyle\sum_{\substack{I_{s_1},\dots,I_{s_r} \in Q(n,k), \\ \bigsqcup_{d=1}^{r} I_{s_d} = [n]}}^{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots 1} \left(\varepsilon_{I_{s_1}|\cdots|I_{s_r}} \, \varepsilon_{J_{t_1}|\cdots|J_{t_r}} \right) \prod_{d=1}^{r} x_{s_d t_d} \right) \zeta^m; & \displaystyle\bigsqcup_{d=1}^{r} J_{t_d} = [n] \text{ なる } J_{t_d} \in Q(n,k) \text{ を固定}. \end{cases}$$

ただし ζ は 1 の原始 $\binom{n-1}{k-1}$ 乗根, $m = 0, 1, \dots, \binom{n-1}{k-1} - 1$, 記号 $\varepsilon_{I_{s_1}|\cdots|I_{s_r}}$ は Levi-Civita 記号

$$\varepsilon_{i_1^{(s_1)} \dots i_k^{(s_1)} \dots i_1^{(s_r)} \dots i_k^{(s_r)}} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i_1^{(s_1)} \cdots i_k^{(s_1)} \cdots i_1^{(s_r)} \cdots i_k^{(s_r)}) \text{ は } (1 \cdots n) \text{ の偶置換}, \\ -1 & \text{if } (i_1^{(s_1)} \cdots i_k^{(s_1)} \cdots i_1^{(s_r)} \cdots i_k^{(s_r)}) \text{ は } (1 \cdots n) \text{ の奇置換}, \\ 0 & \text{if } \{i_1^{(s_1)} \dots i_k^{(s_1)} \dots i_1^{(s_r)} \cdots i_k^{(s_r)}\} \neq [n] \end{cases}$$

を用いて

$$\varepsilon_{I_{s_1}|\cdots|I_{s_r}} := \varepsilon_{i_1^{(s_1)} \dots i_k^{(s_1)} \dots i_1^{(s_r)} \dots i_k^{(s_r)}}$$

と定める. $SF_{n,k}(X)$ を Sylvester-Franke 多項式と言う [OTA]. このとき, 次の主張が成り立つ.

定理 1
Sylvester-Franke 多項式は概均質多様体上の相対不変式である.

*1 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744　E-mail1: ota.ryotoku.588@s.kyushu-u.ac.jp
*2 〒 812-0045 福岡県福岡市博多区東公園 7-7　E-mail: ryotoku.ota.28@gmail.com（2026 年 4 月 1 日以降）

2 準備

自然数 n に対し $\mathbb{N}$ の有限部分集合 $\{1,\ldots,n\}$ を定め $[n] \coloneqq \{1,\ldots,n\}$ と書く．自然数 n と整数 $1 \leq k \leq n$ に対し, 集合 $Q(n,k)$ を

$$Q(n,k) \coloneqq \{I_s | I_s = (i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)}) \subset \mathbb{N}, 1 \leq i_1^{(s)} < \cdots < i_k^{(s)} \leq n\}$$

とする．例えば $n=4$, $k=2$ ならば $Q(4,2) = \{I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6\};\ I_1 = (1,2), I_2 = (1,3), I_3 = (1,4), I_4 = (2,3), I_5 = (2,4), I_6 = (3,4)$ である．また, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, $I_s, J_t \in Q(n,k)$ に対して, k 次小行列式を

$$\det A[I_s \mid J_t] \coloneqq \begin{vmatrix} a_{i_1^{(s)} j_1^{(t)}} & a_{i_1^{(s)} j_2^{(t)}} & \cdots & a_{i_1^{(s)} j_k^{(t)}} \\ a_{i_2^{(s)} j_1^{(t)}} & a_{i_2^{(s)} j_2^{(t)}} & \cdots & a_{i_2^{(s)} j_k^{(t)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k^{(s)} j_1^{(t)}} & a_{i_k^{(s)} j_2^{(t)}} & \cdots & a_{i_k^{(s)} j_k^{(t)}} \end{vmatrix}$$

と記す．また, 集合 X に Zariski 位相が入るとき部分集合 $S \subset X$ の Zariski 閉包を $\overline{S}^Z$, Euclid 位相が入るとき部分集合 $S \subset X$ の Euclid 位相における閉包を $\overline{S}^E$ と書く．

定義 1 (k 次外冪)
$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, $0 \leq k \leq n$, $I_s, J_t \in Q(n,k)$ とする．このとき, 以下の $\binom{n}{k}$ 次複素正方行列

$$\wedge^k A \coloneqq (\det A[I_s \mid J_t])_{1\leq i_1^{(s)}<i_2^{(s)}<\cdots<i_k^{(s)}\leq n,\ 1\leq j_1^{(t)}<j_2^{(t)}<\cdots<j_k^{(t)}\leq n}$$

を A の k 次外冪と言う．

定義 2 (k 次外冪全体)

$$\wedge^k M_n(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{\wedge^k A \in M_{\binom{n}{k}}(\mathbb{C}) \mid A \in M_n(\mathbb{C})\right\}.$$

例 1 ($n=3,\quad 0 \leq k \leq 3$)

$$\wedge^0 A = (1),\ \wedge^1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\wedge^2 A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{pmatrix},\ \wedge^3 A = \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)$$

定理 2
$\wedge^k M_n(\mathbb{C})$ は既約多様体である．

証明は [OTA] を参照されたい．

定義 3 (概均質多様体)
連結線型代数群 G のアフィン多様体 V への作用を ρ とする．連結線型代数群 G が V 内に唯一の開稠密な G 軌道をもつとき, アフィン多様体 V を概均質多様体と言う．

定義 4 (相対不変式)
連結線型代数群 G の概均質多様体 V への作用を ρ とする．概均質多様体 V 上の 0 でない有理関数 f が相対不変式であるとは, 連結線型代数群 G のある有理指標 $\chi : G \to GL_1(\mathbb{C})$ が存在して $x \in V, g \in G$ に対して $f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$ が成り立つときに言う．

3　定理 1 の証明

証明

$GL_n(\mathbb{C})$ の k 次交代テンソル積表現を $(\rho_k, \bigwedge^k \mathbb{C}^n)$, $G = GL_n(\mathbb{C}) \times GL_{\binom{n}{k}}(\mathbb{C})$ の概均質ベクトル空間を $(G, \rho, \bigwedge^k \mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ とする．整数 k は $1 \leq k \leq n$, $k \mid n$ を満たすとする．さらに k 次交代テンソル積表現 $\rho_k : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{\binom{n}{k}}(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ から概均質ベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^n \cong M_{\binom{n}{k}}(\mathbb{C})$ への多項式写像 $\widetilde{\rho_k}$ とみなす:

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\rho_k}: & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{\binom{n}{k}}(\mathbb{C}) \\ & \cup & & \cup \\ & A & \longmapsto & \bigwedge^k A. \end{array}$$

このとき Sylvester-Franke 多項式 $SF_{n,k}(X)$ が概均質多様体 $\overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ 上の相対不変式となることを示す．

<u>$k=1$ のとき.</u>　定理 2 より $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z = \widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))$. 多項式写像 $\widetilde{\rho_1}$ は双正則ゆえ $\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$. したがって $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z = M_n(\mathbb{C})$ であるから Zariski 閉包 $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ は概均質ベクトル空間 $(G, \rho, M_n(\mathbb{C}))$. $\det X$ は概均質ベクトル空間 $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ 上の相対不変式であるから $SF_{n,1}(X) = (\det X)\zeta^m$ も $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ 上の相対不変式である．

<u>$k=n$ のとき.</u>　定理 2 より $\overline{\widetilde{\rho_n}(M_n(\mathbb{C}))}^Z = \rho_n(M_n(\mathbb{C}))$. 多項式写像 ρ_n は行列式写像であるから全射ゆえ $\widetilde{\rho_n}(M_n(\mathbb{C})) = M_1(\mathbb{C})$. したがって $\overline{\widetilde{\rho_n}(M_n(\mathbb{C}))}^Z = M_1(\mathbb{C})$ であるから Zariski 閉包 $\overline{\widetilde{\rho_n}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ は概均質ベクトル空間 $(G, \rho, M_1(\mathbb{C}))$. $\det X$ は概均質ベクトル空間 $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ 上の相対不変式であるから $SF_{n,n}(X) = (\det X)\zeta^m$ も $\overline{\widetilde{\rho_n}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ 上の相対不変式である．

<u>$2 \leq k \leq n-2$ のとき.</u>　直積群 G の部分群 H を $H \coloneqq GL_n(\mathbb{C}) \times \{I_{\binom{n}{k}}\}$ とおく．部分群 H による Zariski 閉包 $\overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ への作用 ρ は $\rho(h) \coloneqq (\bigwedge^k B)X;\ h = (B, I_{\binom{n}{k}}) \in H,\ X \in \overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ である．このとき $\overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z = \widetilde{\rho_k}(GL_n(\mathbb{C})) \cup (\overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z \cap \boldsymbol{V}(SF_{n,k}(X)))$ と $\rho_k(GL_n(\mathbb{C})) \cap (\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C})) \cap \boldsymbol{V}(SF_{n,k}(X))) = \emptyset$ より, Zariski 閉包 $\overline{\widetilde{\rho_1}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ は開 H 軌道 $\rho_k(GL_n(\mathbb{C}))$ をもつので概均質多様体である．直積群 G の指標 χ を $\chi \coloneqq \det \otimes 1 : G \to \mathbb{C}^\times;\ (B, I_{\binom{n}{k}}) \mapsto \det B \cdot 1$ とし部分群 H に制限すると, 任意の k 次外冪 $X = \wedge^k A \in \overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z;\ A \in GL_n(\mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned} SF_{n,k}(\rho(h)X) &= SF_{n,k}((\wedge^k B)X) = SF_{n,k}((\wedge^k B)(\wedge^k A)) = SF_{n,k}((\wedge^k (BA)) = (\det BA)\zeta^m \\ &= (\det B)(\det A)\zeta^m = (\det B) SF_{n,k}(X) = \chi(h) SF_{n,k}(X). \end{aligned}$$

ゆえに $SF_{n,k}(X)$ は概均質多様体 $\overline{\widetilde{\rho_k}(M_n(\mathbb{C}))}^Z$ 上の相対不変式である．

∎

謝　辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参 考 文 献

[COX] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varietices, and Algorithms*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, 2015.

[木村] 木村達雄, 概均質ベクトル空間, 岩波書店, 1998.

[OTA] RYOTOKU Ota, *Sylvester–Franke polynomials on an irreducible variety*, in preparation.