多項式を要素に持つ行列の分解に基づく 多変数近似GCDの最適化

Optimization of multivariate approximate GCD based on decomposition of matrices within polynomial entries

筑波大学医学医療系　　讃岐勝 *1
Masaru Sanuki
Institute of Medicine, University of Tsukuba

Abstract

We present a refined lifting method using polynomial matrices for calculating the approximate GCD of multivariate polynomials. Furthermore, we reassess the practical aims of these computations through the lens of Padé approximation and explore strategies for optimizing perturbation terms.

1　はじめに

浮動小数係数 $\mathbb{F}$ を数係数, 主変数 x, 従変数 $(\boldsymbol{t}) = (t_1, \ldots, t_\ell)$ からなる多変数多項式環 $\mathbb{F}[x, \boldsymbol{t}] = \mathbb{F}[x, t_1, \ldots, t_\ell]$ の多項式 $F(x, \boldsymbol{t}), G(x, \boldsymbol{t})$ の近似 GCD の計算法について本稿では議論する．多項式 $F(x, \boldsymbol{t}), G(x, \boldsymbol{t})$ は次で表す.

$$\begin{aligned} F(x, \boldsymbol{t}) &= f_m(\boldsymbol{t})x^m + \ldots + f_0(\boldsymbol{t}) = C(x, \boldsymbol{t})\tilde{F}(x, \boldsymbol{t}) + \Delta_F, \\ G(x, \boldsymbol{t}) &= g_n(\boldsymbol{t})x^n + \ldots + g_0(\boldsymbol{t}) = C(x, \boldsymbol{t})\tilde{G}(x, \boldsymbol{t}) + \Delta_G. \end{aligned}$$

ここで次数 k の近似 GCD とは，次数 k の近似共通因子 $C(x, \boldsymbol{t})$ で摂動項 Δ_F, Δ_G のノルムが小さい多項式である．定義から一意ではないが摂動項は小さいほうがよいと考えられる (摂動項がない場合，数式処理の分野で呼ばれる最大公約子 (GCD) である).

多変数多項式の近似 GCD の計算について，様々な方法が提案されている．Euclid の互除法や EZ-GCD 法など数式処理をベースにしたアルゴリズムは破綻することから [7, 18]，しばらく研究に大きな進展はなかったが，計算機の性能の向上によって行列サイズが大きくなりがちである数値計算の手法も動くようになり 2000 年以降はアルゴリズム研究が盛んになってきた．アルゴリズム自身がラフであることから摂動項をいかに小さくできるか，という最適化手法も数多く提案されている．ただ，多くの場合は一変数の場合と非常に親和性の高い二変数多項式に関する研究がほとんどである (疎ではない数値行列に変換できる).

一方，三変数以上の多変数多項式の近似 GCD を利用した応用例はあまり知られておらず，応用例を考慮しながら最適化手法を検討するべきという考えもある．本稿では三変数以上の場合について応用も見据えてどの程度の計算ができれば良いのか，改めて検討を始めることとする.

*1 〒 305-8575 茨城県つくば市天王台 1-1-1　E-mail: sanuki@md.tsukuba.ac.jp

数値計算を基にする方法は変数が多くなると行列サイズが極端に大きくなることに加えて非常に疎な行列になることが知られているため [6, 17]，筆者は積極的にこの方法は利用していない．精度が必要は計算は数値計算で行い，精度を落とさず効率化が期待できる場所は数式処理で行うハイブリッドな計算法について研究を進めており [10, 11]，本稿でもこの流れを組んで議論を進める．ハイブリッドな計算法では多項式を要素に持つ線型方程式をリフティング法で計算することが，多項式を要素に持つ線型方程式は近似 GCD に限らず色々な場面で利用できると考えられる．

線型方程式で扱うのは次のような多項式を要素に持つ解を求める問題である．

- 多変数多項式 $\mathbb{F}[\boldsymbol{t}]$ を要素に持つ (正方) 行列 $\mathcal{M} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^{K\times K}$ について $\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ where $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^K$ という線型方程式の解が $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^K$ である．
- $\mathcal{S} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^{K\times K}$ について $\mathcal{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ where $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^K$ という線型方程式の解が $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^K$ である．

次は実際の問題と解法である．

例 1

次の線型方程式 $\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ *and* $\det(\mathcal{M}) \neq 0$) を解く．

$$\begin{pmatrix} 2+t_1 & 4+t_1+t_2 \\ 1+t_1 & 3+t_1t_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0+9t_1+t_2+3t_1t_2+6t_1^2+t_1^3+t_1^2t_2 \\ -1+8t_1+t_2++6t_1^2+t_1^3+t_1^2t_2 \end{pmatrix}$$

この線型方程式の解は，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2+t_2 \\ -1+2t_1+t_1^2 \end{pmatrix}$$

実際の計算は従変数の全次数の低いところから順に求める．従変数 $\boldsymbol{t}$ に関する全次数が *0* のとき，すなわち，数値要素のみからなる線型方程式を解く．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{M}^{(0)})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

逆行列は LU 分解などで計算で計算する．逆行列が存在しない場合には特異値分解など行列の分解に基づく計算法を利用する．

全次数 *1* (多項式要素) のときを考える．全次数 *0* と *1* の項を持つ行列・ベクトルに分解して積の全次数が *1* のこうでまとめる．$\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を $(\mathcal{M}^{(0)} + \delta\mathcal{M}^{(1)} + (\text{高次}))(\boldsymbol{x}^{(0)} + \delta\boldsymbol{x}^{(1)} + (\text{高次})) = \boldsymbol{b}^{(0)} + \delta\boldsymbol{b}^{(1)} + (\text{高次})$ と分解して，全次数 *1* の斉次項をあつめる．

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(0)}\delta\boldsymbol{x}^{(1)} + \delta\mathcal{M}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(0)} &= \delta\boldsymbol{b}^{(1)} \\ \mathcal{M}^{(0)}\delta\boldsymbol{x}^{(1)} &= \delta\boldsymbol{b}^{(1)} - \delta\mathcal{M}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

このとき，実際に計算をすると次を得る．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \delta\boldsymbol{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 9t_1+t_2 \\ 8t_1+t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 & t_1+t_2 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \delta\boldsymbol{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

全次数 *2*（多項式要素）；全次数 *2* の斉次項をあつめる．$\mathcal{M}^{(0)}\delta\boldsymbol{x}^{(2)} + \delta\mathcal{M}^{(1)}\delta\boldsymbol{x}^{(1)} + \delta\mathcal{M}^{(2)}\boldsymbol{x}^{(0)} = \delta\boldsymbol{b}^{(2)}$ は $\mathcal{M}^{(0)}\delta\boldsymbol{x}^{(2)} = \delta\boldsymbol{b}^{(2)} - (\delta\mathcal{M}^{(1)}\delta\boldsymbol{x}^{(1)} + \delta\mathcal{M}^{(2)}\boldsymbol{x}^{(0)})$ と整理できるので，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\delta\boldsymbol{x}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 6t_1^2 \\ 6t_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 & t_1+t_2 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \delta\boldsymbol{x}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ t_1^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

それ故，解は $\boldsymbol{x}^{(0)} + \delta\boldsymbol{x}^{(1)} + \delta\boldsymbol{x}^{(2)}$ である． ∎

アルゴリズムのポイントして，線型方程式は何度も解く必要があるが行列部分は常に同じなので行列の分解などすることで効率よく解の計算ができる．

1.1 本稿の内容

例で上げたものは $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}^{(0)}$ の階数が同じであることを前提に計算をしているが，これは強い制限である．一般化を目指すため本稿では次の問題を考える．

- $\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で $\mathcal{M}$ そのものは正則であり，多項式を要素にもつ解を (1 つ) 持つ．
    1. $\mathcal{M}^{(0)}$ が特異
    2. $\mathcal{M}^{(0)} = \mathbf{0}$

これを安定して計算できることは様々な計算に応用できると考えられる．本稿では近似 GCD の計算を振り返ると共に Pade 近似の計算に寄与できることを示す．計算は効率的であり応用利用できることを期待できる結果である．

注意 1
解が 1 つというのは強い条件の思うが，近似 GCD，および，Pade 近似などがこのカテゴリに含まれる問題である．そのため，リフティング法に依存する部分の問題を解決するとことを問題にしている．

2 線型方程式と近似 GCD 計算

線型方程式に帰着する方法として，Barnett による Bezout 行列，Bezout-Hankel 行列に変換する方法 [3, 4, 10]，Sylvester 行列に変換する方法である [5, 11].

2.1 特異値分解による線型方程式の解法

- $\mathcal{S}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ where $\mathrm{rank}(\mathcal{S}) = K-1$ が，唯一つ多項式を要素とする解を持つ．

このとき，$\mathcal{S}_{k-1}\boldsymbol{z}^{(w)} \equiv \mathbf{0} \pmod{\boldsymbol{t}^{w+1}}$ を $w \geq 0$ について下から順にリフティング法で解く．ここで，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{(0)} + \delta\boldsymbol{z}^{(1)} + \cdots + \delta\boldsymbol{z}^{(w)} \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]^K$ である

$z^{(w-1)} = \boldsymbol{z}^{(0)} + \sum_{i=1}^{w-1}\delta z^{(i)}$ まで計算できたと仮定する．このとき，$\boldsymbol{z}^{(w)} = \boldsymbol{z}^{(w-1)}\delta\boldsymbol{z}^{(w)}$ について，$\mathcal{S}_{k-1}\boldsymbol{z}^{(w)} \equiv \mathbf{0} \pmod{\boldsymbol{t}^{w+1}}$ を整理することによて，次の式を得る．

$$\mathcal{S}_{k-1}^{(0)}\delta\boldsymbol{z}^{(w)} = -\sum_{j=1}^{w}\mathcal{S}_{k-1}^{(j)}\delta\boldsymbol{z}^{(w-j)} = \delta\boldsymbol{p}^{(w)}$$

この線型方程式を解くことによって，$\delta\boldsymbol{z}^{(w)}$ を得る．

2.2 特異値分解による方法の丸め誤差の影響

線型方程式を何度も解くリフティング法は何度も行列とベクトルの積和計算 (行列の次元に依存する多項式同士の積和計算) を行うため丸め誤差が積もりやすく，実際にこれが弊害になって高い次数に不安定になる．

ただし，特異値分解を利用すると直交性のため積和計算による丸め誤差の影響を受けづらい（リフティングの回数にのみ依存）．そのため算法は非常に安定する (本稿では証明は示さない)．線型方程式を解くアルゴリズムも重要になってくる．

3 初期行列を再考する

本稿で提案するリフティング法に基づく方法の精度は数値部分の線型方程式をいかに精度良く解くかに依存する．数値部分が零行列ではない特異な行列である場合には特異値分解などによって解くことができる可能性が残っているが，零行列である場合は全く考慮されていない．

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}^{(0)} + \delta\mathcal{M}^{(1)} + \cdots + \delta\mathcal{M}^{(w)} + \text{高次の行列}\\ &= \left(t_1\delta\tilde{\mathcal{M}}_d + t_1^2\delta\tilde{\mathcal{M}}_{d-1} + \cdots + t_1^d\delta\tilde{\mathcal{M}}_0\right) + \delta\mathcal{M}^{(1)} + \cdots + \delta\mathcal{M}^{(w)}.\end{aligned}$$

本章では，数値部分が零行列の場合，変換などすることが有効であるのか例題を用いて検討を行う．

例 2

$\mathcal{M}^{(0)}$ が零行列となるパターンを次の例を見ながら検討する．変数を平行移動すると必ず数値行列が作れるかの検証になり，どの変数を平行移動するべきなのかの場合分けを検討することにつながる．

単項式の順序が重要になるので，この例題では $t_1 \succ t_2 \succ t_3$ とする．

1. ある変数からなる単項式と数値行列の積の組み合わせが存在する場合

$$\mathcal{M}_1 = t_1\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + t_1^2\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} + \text{高次の行列}$$

$$\mathcal{M}_2 = t_1\begin{pmatrix} t_2 & t_3\\ 0 & 0\end{pmatrix} + t_1^2\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} + \text{高次の行列}$$

この場合，$t_1 \to t_1 + a$ *with* $a \in \mathbb{F}\backslash 0$ と平行移動すればよい．並行移動した結果 $\mathcal{M}^{(0)}$ が正則になるようにする．

2. *1* つの変数を平行移動しても特異な場合．この場合は複数の変数を平行させる必要がある．

$$\mathcal{M}_4 = t_1\begin{pmatrix} t_2 & t_2 + t_3\\ 0 & 0\end{pmatrix} + t_1^2\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} + \text{高次の行列}$$

$$\mathcal{M}_5 = t_1\begin{pmatrix} t_2t_3 & t_3^2\\ 0 & 0\end{pmatrix} + t_1^2\begin{pmatrix} t_2 & 0\\ t_3 & 0\end{pmatrix} + \text{高次の行列}$$

残る問題は，線型方程式自身は正則 (階数が K) であるが，低次の項・行列で正則でな事例で平行移動をして正則 (階数が K) になる変換が存在するかであるが，そのようなことはない．すなわち，平行移動をして $\mathcal{M}^{(0)}$ が正則 (階数が K) になる変換が必ず存在する (背理法で示せる)．

そのため数値的に安定に計算できる．残るはどのように最適化するかである．実際の応用例である Pade 近似，偏微分方程式を紹介して，この問題について再考する．

4 多変数 Pade 近似

Pade 近似とは，多項式ないし級数 $F(x,\boldsymbol{t}) = f_0(\boldsymbol{t}) + f_1(\boldsymbol{t})x + f_2(\boldsymbol{t})x^2 + \ldots \in \mathbb{F}[\boldsymbol{t}]\{x\}$ が与えられたとき m 次の多項式 $Q(x)$ と n 次の多項式 $P(x)$ を分母，分子にもつ有理関数に近似することであり次を満たす (order(n,m) の Pade 近似とも呼ばれる).

$$FQ - P \equiv 0 \pmod{x^{m+n+1}}$$

一変数の場合がよく研究されるが，多変数もよく研究されている．
実際の計算を例で示す．

例 3
$F = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots \in \mathbb{F}[x,\boldsymbol{t}]$ の *order*$(2,3)$ での *Padé* 近似とは次を満たす有理関数を求めることである．

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3} + O(x^6, \boldsymbol{t}^{w+1}).$$

- $q_0 = 1$ とおく $(p_0 = q_0 f_0)$.
  ※　求めるべきパラメータは q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 の 5 つ
- $P \equiv QF \pmod{I^*}$ において x^i の係数を見ると

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \cdot f_1 + q_1 f_0, \\ p_2 &= 1 \cdot f_2 + q_1 f_1 + q_2 f_0, \\ 0 &= 1 \cdot f_3 + q_1 f_2 + q_2 f_1 + q_3 f_0 \\ 0 &= 1 \cdot f_4 + q_1 f_3 + q_2 f_2 + q_3 f_1 \\ 0 &= 1 \cdot f_5 + q_1 f_4 + q_2 f_3 + q_3 f_2. \end{aligned}$$

これを書き直すと，行列が正則な線型方程式の問題になる．

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & & f_0 & & \\ & -1 & f_1 & f_0 & \\ \hline & & f_2 & f_1 & f_0 \\ & & f_3 & f_2 & f_1 \\ & & f_4 & f_3 & f_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \\ -f_5 \end{pmatrix}.$$

線型方程式は前章までで述べたとおり解くことが可能である．最後問題となるのは *order*(m,n) が勝手に決めた数であるため P, Q が近似共通因子を持つ可能性があり，それを排除する必要がある．

5 偏微分方程式を例に

Ayaz[1] にある次の偏微分方程式を数値解法を紹介する Turut-Çelik-Yiğider[15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ u(x,0) &= x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= e^x. \end{aligned}$$

数値的に解く方法として Taylor 展開によって算出される関係式 Two-dimensional differential transform method (DTM) が知られており，次の規則に従い問題を離散化する (変数が増えても関係式は構築可能).

Original function $w(x,y,t)$	Transformed function $W(k,h,m)$
$u(x,y,t) \pm v(x,y,t)$	$U(k,h,m) \pm V(k,h,m)$
$c \times u(x,y,t)$	$c \times U(k,h,m)$
$\dfrac{\partial^{r+s+p} u(x,y,t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$	$\dfrac{(k+r)!}{k!}\dfrac{(h+s)!}{s!}\dfrac{(m+p)!}{p!}$ $\times U(k+r,h+s,m+p)$
$\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\dfrac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}$	$\displaystyle\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)$ $\times U(k-r+1,r,p)V(r,h-s+1,m-p)$
$u(x,y,t)v(x,y,t)$	$\displaystyle\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$

適用すると，方程式は次のように書き直せる．

$$(k+1)(k+2)U(k+2,h) - 3(k+1)(h+1)U(k+1,h+1) - 4(k+1)(k+2)U(k+2,h) = 0$$

ここで，多項式 $U(k,h)$ は解析解 $u(x,t)$ の $x^k t^h$ の係数に対応する．

$$U(0,0)=1, U(1,0)=0, U(2,0)=0, U(3,0)=0,$$
$$U(0,1)=1, U(1,1)=1, U(2,1)=\frac{1}{2}, U(n,1)=\frac{2}{n!} \text{ for } \ n \geq 3.$$

上から次が得られる．

$$U(0,2) = -\frac{1}{8},\ U(0,3) = \frac{13}{96}.$$

以上から，与えられた偏微分方程式は次のように変換される．

$$u^*(x,t) = t - \frac{1}{8}t^2 + x^2 + tx + \frac{1}{2}tx^2 + \frac{13}{96}t^3 + \cdots.$$

これを数値で評価するために Padé 近似 (=有理関数近似) する．行列式による方法を利用されることが多いが数値的に不安定であることが知られている．また 2 変数にのみ利用が限られるのは，偏微分方程式を級数に書き換える際に非常に複雑な式になってしまうことに加え Padé 近似を実行するために利用される行列の要素が多項式になってしまうため，行列式の展開が困難になることが考えられるが，本稿の提案手法はこの問題を解決している．

例：位数 $(2,3)$ の Padé 近似 $F = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots$ の order$(2,3)$ での Padé 近似：

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3} + O(x^6).$$

- $q_0 = 1$ とおく ($p_0 = q_0 f_0$).
  ※　求めるべきパラメータは q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 の 5 つ

- $P \equiv QF \pmod{I^*}$ において x^i の係数を見ると

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 1 \cdot f_1 + q_1 f_0, \\
p_2 &= 1 \cdot f_2 + q_1 f_1 + q_2 f_0, \\
0 &= 1 \cdot f_3 + q_1 f_2 + q_2 f_1 + q_3 f_0 \\
0 &= 1 \cdot f_4 + q_1 f_3 + q_2 f_2 + q_3 f_1 \\
0 &= 1 \cdot f_5 + q_1 f_4 + q_2 f_3 + q_3 f_2.
\end{aligned}
$$

書き直すと,

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc}
-1 & & f_0 & & \\
 & -1 & f_1 & f_0 & \\
\hline
 & & f_2 & f_1 & f_0 \\
 & & f_3 & f_2 & f_1 \\
 & & f_4 & f_3 & f_2
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \\ -f_5 \end{pmatrix}.
$$

6 まとめ：多変数近似 GCD の最適化について (再考))

近似 GCD を求める問題でなく，それで除算したときの商が応用上重要であることに気が付く．この視点で考えると $P = C\tilde{P} + \Delta = (C + \Delta_C)(\tilde{P} + \Delta_{\tilde{P}})$ なる関係式のとき $\tilde{P} + \Delta_{\tilde{P}}$ に値を代入してシミュレーションすることになる．代入した時の誤差が小さいことが期待されるので $\tilde{P} + \Delta_{\tilde{P}}$ の 1-ノルムが小さいことが期待されることもある．

数値解法とリフティング法では 2-ノルムに関する評価はできても，実応用で期待される最小化は評価できないと考えられるため，応用を考えて算法の最適化について検討をする．

参 考 文 献

[1] F. Ayaz. *On the two-dimensional differential transform method.* Appl. Math. Compu. **143(2–3)** 2003, 361–374.

[2] M. Bakhshi, M. Asghari-Larimi and M. Asghari-Larimi. *Three-dimentional differential transform method for solving nonlinear three-dimensional Volterra integral equations.* J. Math. Comp. Sci., **4(2)** 2012, 246–256.

[3] S. Barnett. *Greatest common divisor of two polynomials.* Linear Algebra Appl., **3**, 1970, 7–9.

[4] S. Barnett. *Greatest common divisor of several polynomials.* Proc. Camb. Phil. Soc., **70**, 1971, 263–268.

[5] R. Corless, P. Gianni, B. Trager and S. Watt, *The singular value decomposition for polynomial systems*, Proc. of ISSAC'95, ACM Press, 1995, 195–207.

[6] S. Gao, E. Kaltofen, J. P. May, Z. Yang and L. Zhi, *Approximate factorization of multivariate polynomials via differential equations*, Proc. of ISSAC'04, ACM Press, 2004, 167–174.

[Jang] B. Jang. *Basic ideas of differential transform method.* Preprint, and it can be downloaded at `http://amath.unist.ac.kr/upload/idea%20of%20the%20differential%20transform%20method.pdf` (2026.3).

[7] M. Ochi, M-T. Noda and T. Sasaki, *Approximate greatest common divisor of multivariate polynomials and its application to ill-conditioned systems of algebraic equations*, J. Inform. Proces., 14 (1991), 292 – 300.

[8] V. Pan. *Univariate polynomials: nearly optimal algorithms for factorization and rootfinding*, Proc. of ISSAC'01, ACM Press, 2001, 253–267.

[9] M. Sanuki. *Computing multivariate approximate GCD based on Barnett's theorem*, Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2009 (SNC 2009), 2009, 149-157, 2009.

[10] M. Sanuki. *Computing multivariate approximate GCD based on Barnett's theorem*, Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2009 (SNC 2009), 2009, 149-157, 2009.

[11] M. Sanuki, A Stable Computation of Multivariarte Apporximate GCD Based on SVD and Lifting Technique, SCSS2024 (10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science), 2024. (electronic publishing)

[12] T. Sasaki and M-T. Noda, *Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations*, J. Inform. Proces., **12** (1989), 159–168.

[13] M. Sanuki and T. Sasaki, *Computing approximate GCDs in ill-conditioned cases*, Proc. of SNC 2007, 2007, 170–179.

[14] V. Turut and N. Güzel. *On solving partial differential equations of fractional orderby using the variational iteration method and multivariate Padé approximations.* EJPAM (European Journal of Pure and Applied Mathematics), **6(2)** 2013, 147–171.

[15] V. Turut, E. Çelik and M. Yiğider. *Multivariate padé approximataion for solving differential equations (PDE)*, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2011, 2011, **68**, 1159–1173,

[16] J. K. . Zhou. *Differential transformation adn its application for electrical circuits*. Huazhong University press, China, 1986 (in Chinese).

[17] Z. Zeng and B. H. Dayton, *The approximate GCD of inexact polynomials part II: A multivariate algorithm*, Proc. of ISSAC'04, ACM Press, 2004, 320–327.

[18] L. Zhi and M-T. Noda, *Approximate GCD of Multivariate Polynomials*, Proc. of ASCM2000, World Scientific, 2000, 9–18.