平面６次曲線の定義式導出における余計因子について

On the Extraneous Factors in Deriving the Defining Equation of a Plane Sextic Curve

羽衣国際大学・現代社会学部 放送・メディア映像学科　　高橋　正 *1
Tadashi Takahashi
Department of Media Studies, Faculty of Social Sciences,
Hagoromo University of International Studies

Abstract

2 次元複素射影空間における A_{19} 特異点をもつ平面６次曲線の定義式は，1979 年に，吉原により得られている。グレブナー基底および終結式を用いた計算によって，この定義式を導出する方法を得た。その過程において余計因子への対応が必要になる。余計因子の現れる状況とその対処方法を示す。

1　はじめに

3 次元複素射影空間の 4 次曲面に現れる A_{19} 特異点定義式については，1982 年 2 月の RIMS 研究集会で発表された ([1])。3 次元複素射影空間の 4 次曲面は $K3$ 曲面であり興味深い対象であるが，2 次元複素射影平面の 6 次曲線も $K3$ 曲面であり興味深い対象である ([2])。A_{19} が現れる 2 次元複素射影平面の 6 次曲線の定義式は，吉原の論文で示された ([3])。

数式処理システム Mathematica を用いて 2 次元複素射影平面の 6 次曲線定義式で $(1,0,0)$ で A_n 特異点が現れる設定をし，その定義式の係数（パラメータ）の条件を求める方法で吉原の定義式を導出した。

6 次曲線上に現れる特異点（有理 2 重点）としてどのようなものが現れるかについては，特異点達のミルナー数の総和は 19 以下であることが知られている。それらの研究では，Artal らによる 6 次曲線に関する研究 ([4]) が有名である。この研究で引用されている A_{19} 特異点を持つ 6 次曲線の定義式は，上記の 1979 年に吉原により得られている結果である ([3])（この定義式は吉原の論文において示されているがその導出方法は示されていない）。定義式のパラメータ空間の構造を具体的に記述するという問題（どのようなパラメータの条件（定義式の係数達の条件）のときどのような特異点が現れるかという問題）は，数学的に興味深い問題である。

A_{19} 特異点が現れる 6 次曲線の定義式をどのように導出できるかについて，グレブナー基底及び終結式の計算を用いる方法（数式処理の手法（計算機数学の手法））を明らかにする。

2　吉原の定義式の導出

吉原の定義式を導出した方法を以下に示す。

*1 〒 592-8344 大阪府堺市西区浜寺南町 1 丁目 89-1　 E-mail: ttakahashi@hagoromo.ac.jp

2 次元複素射影空間の同次座標を (x, y, z) とし，与えられた 6 次曲線 C が点 $(1,0,0)$ で 2 重点を持つとすると，C の定義式は次の形をしている:

$x^4z^2 + x^3(-2y^2z + a_1yz^2 + a_2z^3) + x^2(y^4 + a_3y^3z + a_4y^2z^2 + a_5yz^3 + a_6z^4)$
$+ x(a_7y^5 + a_8y^4z + a_9y^3z^2 + a_{10}y^2z^3 + a_{11}yz^4 + a_{12}z^5) + a_{13}y^6 + a_{14}y^5z + a_{15}y^4z^2 + a_{16}y^3z^3 + a_{17}y^2z^4 + a_{18}yz^5 + a_{19}z^6 = 0$

A_n 型特異点を持つパラメータ（文字係数）を有する定義式に対しては変数変換 $x = x' + cy^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+,\ c \in \mathbb{C})$ を実行し定義式の係数達がどのような条件のもとで，原点における特異点のミルナー数が，どのように変化するかを判定することができる。

その際，係数達の関係を同時に満たす条件を見出す方法として，グレブナー基底を計算する方法と終結式を計算する方法がある。

グレブナー基底を計算する方法は計算が大規模になるが複数の条件を見出すことに有効である。それに対し，2 つの多項式（係数達の条件を構成する多項式）の共通解の条件を求める際には，終結式を計算する方法が（計算の規模がグレブナー基底を計算する方法より，この場合は，大きくならず）有効である。以下にそれらを効率的に行なった A_{19} 特異点をもつ 6 次曲線の定義式への変形過程を示す。

まず，$f_1 = x^4z^2 + x^3(-2y^2z + a_1yz^2 + a_2z^3) + x^2(y^4 + a_3y^3z + a_4y^2z^2 + a_5yz^3 + a_6z^4)$
$+ x(a_7y^5 + a_8y^4z + a_9y^3z^2 + a_{10}y^2z^3 + a_{11}yz^4 + a_{12}z^5) + a_{13}y^6 + a_{14}y^5z + a_{15}y^4z^2 + a_{16}y^3z^3 + a_{17}y^2z^4 + a_{18}yz^5 + a_{19}z^6$ とおき，$x = 1$ とする（$\mathbb{P}^2$ の (1,0,0) で考える)。

このとき，$f_1 = 0$ で定義される 6 次曲線は，(1,0,0) で $A_i (i \geqq 4)$ 特異点を有する（パラメータ $a_j (1 \leqq j \leqq 19)$ の条件によって，i は変化する。最初の変数変換として $z = z' + y^2$ を実行し，z' を再び z とすると，以下の f_2 を得る。

$f_2 = z^2 + c_{5,0}y^5 + c_{3,1}y^3z + c_{6,0}y^6 + c_{7,0}y^7 + c_{4,1}y^4z + c_{8,0}y^6 + \cdots$ （$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）
ここで $G[\{c_{5,0}, c_{3,1}, c_{6,0}, c_{7,0}, c_{4,1}, c_{8,0}, c_{9,0}\}, \{a_{19}, \cdots, a_1\}]$ を $c_{5,0}, c_{3,1}, c_{6,0}, c_{7,0}, c_{4,1}, c_{8,0}, c_{9,0}$ の変数順序 $a_{19}, \cdots, a_1$ でのグレブナー基底とすると，グレブナー基底の共通解として，(1,0,0) で A_9 特異点を有するパラメータの条件
$a_{11} = -a_{16}, a_9 = -a_{14} - a_5, a_8 = -\dfrac{3a_{13}}{2} - \dfrac{a_4}{2}, a_6 = -a_{10} - a_{15}, a_3 = -2a_7, a_2 = \dfrac{a_{13}}{2} - \dfrac{a_4}{2}, a_1 = a_7$
を見出すことができる。

同様にして，変数変換 $z = z' - \dfrac{c_{5,1}}{2}y^5$ を実行し z' を再び z とすると以下の f_3 を得る。

$f_3 = z^2 + c_{10,0}y^{10} + c_{11,0}y^{11} + c_{6,1}y^6z + c_{12,0}y^{12} + c_{13,0}y^{13} + \cdots$ （$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）
ここで $c_{10,0}, c_{11,0}, c_{6,1}, c_{12,0}, c_{13,0}$ の変数順序 $a_{19}, a_{18}, a_{17}, a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{10}, a_7, a_5, a_4$ でのグレブナー基底を計算するとそのグレブナー基底の共通解のなかで (1,0,0) において A_{13} 特異点を有するパラメータの条件
$a_{19} = -\dfrac{1}{8}(a_{14} - a_5)(3a_{13}a_{14} - 4a_{16} - a_{14}a_4 - 3a_{13}a_5 + a_4a_5), a_{18} = \dfrac{1}{4}(a_{14} - a_5)^2a_7,$
$a_{17} = \dfrac{1}{4}(3a_{14}^2 - 4a_{14}a_5 + a_5^2), a_{12} = \dfrac{1}{2}(-a_{14}^2 + a_{14}a_5), a_{10} = -2a_{15} + a_{14}a_7 - a_5a_7$
を見出すことができる。

次に，変数変換 $z = z' - \dfrac{c_{7,1}}{2}y^7$ を実行し，z' を再び z とすると以下の f_4 を得る。

$f_4 = z^2 + c_{14,0}y^{14} + c_{15,0}y^{15} + \cdots$ （$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）

ここで $c_{14,0}, c_{15,0}$ の変数順序 $a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_7, a_5, a_4$ でのグレブナー基底を計算すると，

グレブナー基底の共通解のなかで (1,0,0) において A_{15} 特異点を有するパラメータの適切な条件

$$a_{16} = \frac{1}{4a_{14}a_7 - 2a_5a_7}(a_{14} - a_5)(-((2a_{14} - a_5)(2a_{14} - a_5 + (-3a_{13} + a_4)a_7))$$
$$+ \sqrt{(-2a_{14} + a_5)^4 - (a_{13} - a_4)(a_{14} - a_5)(-2a_{14} + a_5)^2a_7}),$$
$$a_{15} = \frac{1}{4a_7^2}(2(-2a_{14} + a_5)^2 - (a_{13} - a_4)(a_14 - a_5)a_7 + 2(a_{14} - a_5)a_7^3$$
$$- 2\sqrt{(-2a_{14} + a_5)^4 - (a_{13} - a_4)(a_{14} - a_5)(-2a_{14} + a_5)^2a_7}$$

を見出すことができる。

次に，変数変換 $z = z' - \frac{c_{8,1}}{2}y^8$ を実行し，z' を再び z とすると以下の f_5 を得る。

$f_5 = z^2 + c_{16,0}y^{16} + c_{17,0}y^{17} + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）となる。

この $c_{16,0}, c_{17,0}$ を因数分解すると適切な因子（パラメータの条件多項式）を見出すことができる。その因子を h_{16}, h_{17} とする。ここで，$R[\{h_{16}, h_{17}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{17} の終結式とするとその終結式は変数 a_{13}, a_7, a_5, a_4 の多項式となる。

同様に，変数変換 $z = z' - \frac{c_{9,1}}{2}y^9$ を実行し，z' を再び z とすると以下の f_6 を得る。
$f_6 = z^2 + c_{18,0}y^{18} + c_{19,0}y^{19} + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）となる。

この $c_{18,0}, c_{19,0}$ を因数分解すると適切な因子（パラメータの条件多項式）を見出すことができる。その因子を h_{18}, h_{19} とする。$R[\{h_{16}, h_{18}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{18} の終結式，$R[\{h_{16}, h_{19}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{19} の終結式とすると，この 2 つの終結式も変数 a_{13}, a_7, a_5, a_4 の多項式となる。

上記の 3 つの多項式を P, Q, R とする。この 3 つの多項式 P, Q, R に対し，変数 a_5 に対して，$R[\{P, Q\}, a_5]$, $R[\{P, R\}, a_5]$, $R[\{Q, R\}, a_5]$ を求めそれらを S, T, U とする（S, T, U は，変数 a_{13}, a_7, a_4 の多項式となる)。
ここで $G[\{S, T, U\}, \{a_{13}, a_7, a_4\}]$ を計算すると余計因子が現れる ([5])。余計因子を見出し，その共通解として，(1,0,0) で A_{19} 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

そのパラメータの条件は,

$$a_{13} = \frac{1}{242}(311a_7^2 - 112\sqrt{5}a_7^2), \quad a_4 = -\frac{3}{242}(-141a_7^2 + 50\sqrt{5}a_7^2) \qquad (1)$$

または

$$a_{13} = \frac{1}{242}(311a7^2 + 112\sqrt{5}a7^2), \quad a_4 = \frac{3}{242}(141a7^2 + 50\sqrt{5}a7^2) \qquad (2)$$

となる。

$a_{13} = \frac{a + c\sqrt{5}}{b}, a_7 = \frac{d + f\sqrt{5}}{e}, a_4 = \frac{g + i\sqrt{5}}{h}$ $\quad a, \cdots, i \in \mathbb{Z}, b \neq 0, b \neq e, h \neq 0$（ここでは，多項式の係数を一時的に $a, \cdots, i \in \mathbb{Z}$）として (2) に代入し，$a, \cdots, i$ の多項式の連立方程式のグレブナー基底を計算すると,

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} = \Big\{\frac{b(311d^2 + 1120df + 1555f^2)}{242e^2}, b, \frac{b(56d^2 + 311df + 280f^2)}{121e^2}, d, e, f,$$
$$\frac{3(141d^2 + 500df + 705f^2)h)}{242e^2}, h, \frac{3(25d^2 + 141df + 125f^2)h}{121e^2}\Big\}$$ が条件となる。

全体としてバランスをとり，b, d, e, f, h を定めると，
$a = 37, b = 16, c = 7, d = 7, e = 4, f = -1, g = 51, h = 16, i = 9$ となる（これが吉原の定義式の係数である）。

(1) に代入しても，同様のことが成り立つ。

これらの得られた数を P, Q, R に代入することで a_5, a_{14} が決定でき，
$a_5 = -\frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{5}}{8}$，$a_{14} = -\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$ を得る。

(1) に対しても，同様にして a_5, a_{14} が決定でき，
$a_5 = -\frac{7}{8} + \frac{3\sqrt{5}}{8}$，$a_{14} = -\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}$ を得る。

これらを前の段階で定めた係数の条件に代入することにより吉原の定義式を得る。

この導出過程においては（変数変換による高次項の生成及びグレブナー基底や終結式を用いた定義式の係数達の条件設定を行う際），グレブナー基底と終結式の手法を絶妙なバランスで使い分けることが必要である。グレブナー基底の計算が膨大になるところでは，グレブナー基底を求める計算をする前に，部分的な係数達の必要条件を終結式で求め，その結果を因数分解し，有効な因子をイデアルに添加することによって素イデアル分解を効率的に計算できる。

吉原の定義式は，A_{19} 特異点を持つ 6 次曲線の定義式の存在を裏づけるために示されたものであり，その意義は極めて高いが，
・　A_{19} 特異点を持つ 6 次曲線の定義式は唯一なのか？
・　唯一でないならば有限個存在するのか？
・　有限個でない場合は，その自由度はどのようなパラメータ空間で構成されているのか？
等のことを明らかにすることが興味の対象となる。

また，これらの現象を明らかにする際，余計因子をどのように見出すかについても興味深い。このことは,「グレブナ基底を計算する前に，終結式を計算して，その結果を因数分解して，因数分解した因子を，イデアルに添加することで素イデアル分解を効率的に計算できること」に対応するが，それ以上の何かが潜んでいる可能性もある。

上述の吉原の定義式の導出方法では，A_{19} 特異点を持つ 6 次曲線の定義式は唯一ではなく，３つの自由なパラメータがある条件を満たすことで構成できることが分かった。$K3$ 曲面が関わると，奇妙な事が起きる可能性が高い。余計因子がそのようなことに関係するかどうかは定かではないが数式処理的な考察の対象としても興味深い現象である。

A_{19} 特異点をもつ 6 次曲線の定義式の変形過程において終結式から出現する大規模な因子（以下のような多項式）が現れる。

$$\begin{aligned}
&-2048000a13^9a5^5 + 17612800a13^8a4a5^5 - 67174400a13^7a4^2a5^5 + 149094400a13^6a4^3a5^5\\
&- 212172800a13^5a4^4a5^5 + 200704000a13^4a4^5a5^5 - 126156800a13^3a4^6a5^5\\
&+ 50790400a13^2a4^7a5^5 - 11878400a13a4^8a5^5 + 1228800a4^9a5^5 - 98304a13^6a5^7\\
&+ 589824a13^5a4a5^7 - 1474560a13^4a4^2a5^7 + 1966080a13^3a4^3a5^7 - 1474560a13^2a4^4a5^7\\
&+ 589824a13a4^5a5^7 - 98304a4^6a5^7 - 3072000a13^9a4a5^4a7 + 25600000a13^8a4^2a5^4a7\\
&- 94208000a13^7a4^3a5^4a7 + 200704000a13^6a4^4a5^4a7 + \cdots
\end{aligned}$$

これらの多項式は共通解を有するのか？現状ではこれらの多項式の共通解を求めることができていない。もし共通解が存在すれば，A_{19} 特異点を持つ 6 次曲線の定義式は，有理数係数の定義式が存在する可能性がある。有理数係数の定義式が存在しないのであれば吉原の定義式の係数は $Q(\sqrt{5})$ であり，黄金比に関係しているのかも興味深い。これらの問題を明らかにすることが今後の課題である。

謝　辞

本研究を遂行する上でご助言・ご示唆及びご援助を頂いた方々に感謝の意を表します。徳島大学名誉教授の大渕朗教授には，$K3$ 曲面に関する参考文献をお教え頂きました。日本大学特任教授の泊昌孝教授には，多くの参考資料をお教え頂き，さらに，有益なご助言もいただきました。立教大学名誉教授の横山和弘名誉教授からは，グレブナ基底の計算方法について有益なご示唆をいただきました。筑波大学・数理物質系名誉教授の佐々木建昭教授には，余計因子に関する研究成果をお教え頂きました。

ご助言・ご示唆及びご援助を頂きました方々に深く感謝いたします。

参 考 文 献

[1] 加藤満生, 成木勇夫 (1982) *On Rational Double Points on Quartic Surfaces (*特異点をめぐる位相的解析的様相*)*, 京都大学数理解析研究所講究録*, 450* 巻, 62-147.

[2] Huybrechts, Lectures on K3 surfaces (2016) *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Series Number **158**.

[3] H. Yoshihara (1979) *On plane rational curves*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 152–155.

[4] E. Artal, J. Carmona, J. I. Cogolludo (2001) *ON SEXTIC CURVES WITH BIG MILNOR NUMBER*, GARCIA DE GALDEANO **18**, 1-30.

[5] 佐々木建昭 (2023) ＴＥＳ *(Term Elimination Sequence)* について, 京都大学数理解析研究所 講究録*, 2255* 巻, 39-50.