ルジャンドルデータから
写像を復元する方法について

横浜国立大学
西村 尚史
Takashi Nishimura
(nishimura-takashi-yx@ynu.ac.jp)
Yokohama National University

筆者は，2025 年 11 月 25 日から 11 月 28 日の間に京都大学数理解析研究所 420 号室で開催された以下の研究集会

RIMS 共同研究 (公開型)
「可微分写像の特異点論とその応用」
Singularity theory of differentiable maps and its applications

に於いて，2024 年 11 月より続けていたバレンシア大学の Christian Muñoz-Cabello, Raul Oset Sinha との共同研究の内容を講演する機会をいただいた．

本稿は，講演に使ったスライド [3] に基づく講演内容の記録である．

1　カスピダルクロスキャップの標準形

1.1　カスピダルクロスキャップの標準形に対する復元問題

以下で定義される写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を**カスピダルクロスキャップの標準形**[1]と呼び，この写像が第 1 節の主役である．

$$f(x,y)=\left(x,y^2,xy^3\right)\quad\left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right).$$

[1]ページ数の制約がある本稿に図を載せることは差し控えるが，カスピダルクロスキャップの標準形の図を眺めたい読者は講演に使ったスライド [3] の 2 ページに手書きの図があるので参照してほしい．

写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ をソース $\mathbb{R}^2$ の座標 x,y で偏微分してみると次を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left(1,0,y^3\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \left(0,2y,3xy^2\right)=y(0,2,3xy).\end{aligned}$$

得られた二つの 3 次元ベクトル $(1,0,y^3)$, $(0,2,3xy)$ の外積を計算して次を得る．

$$\left(1,0,y^3\right)\times(0,2,3xy) = \left(-2y^3,-3xy,2\right).$$

得られた 3 次元ベクトル $(-2y^3,-3xy,2)$ の長さを 1 にすることにより次の写像 $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ が定義できる．ただし，S^2 は $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面である．写像 $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ は f **のガウス写像**と呼ばれる．

$$\nu(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\left(-2y^3,-3xy,2\right).$$

写像 $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ の像ベクトルは S^2 の要素だが，$S^2\subset\mathbb{R}^3$ であるから 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素でもある．$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ の像ベクトルと $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ の像ベクトルの内積は well-defined である．そこで，二つの 3 次元ベクトル $f(x,y),\nu(x,y)$ の内積 $f(x,y)\cdot\nu(x,y)$ により関数 $a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を定義することができる．関数 $a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は f **の高さ関数**と呼ばれる．

$$a(x,y)=f(x,y)\cdot\nu(x,y)=\frac{-3xy^3}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}.$$

$\nu(x,y)\,(\in S^2)$ を単位法ベクトルとし，$a(x,y)\,(\in\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^3$ の原点 $(0,0,0)$ との（符号付きの）距離とする 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面を $L_{(x,y)}$ という記号で表すことにする．

$$L_{(x,y)}=\left\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3 \mid \nu(x,y)\cdot(X,Y,Z)=a(x,y)\right\}.$$

定義 1 ($f(x,y)=(x,y^2,xy^3)$ のルジャンドルデータ)

$$\left\{L_{(x,y)}\right\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}=\left\{\begin{array}{lcl}\nu(x,y) &=& \frac{1}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\left(-2y^3,-3xy,2\right),\\ a(x,y) &=& \frac{-3xy^3}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\end{array}\right\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

を $f(x,y)=(x,y^2,xy^3)$ **のルジャンドルデータ**と呼ぶ．

注意 1 ソース $\mathbb{R}^2$ の任意の点 (x,y) に対し，定義により平面 $L_{(x,y)}$ は $\nu\,(x,y)$ と $a\,(x,y)$ から一意的に定まる．逆について考えてみる．平面 $L_{(x,y)}$ の単位法ベクトルは $\pm\nu(x,y)$ の 2 通りありえて，それぞれに対して平面 $L_{(x,y)}$ と原点 $(0,0,0)$ の符号付きの距離が $\pm a(x,y)$ と一意的に決まる．つまり，平面の集合 $\left\{L_{(x,y)}\right\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ からガウス写像と高さ関数の集合 $\{\nu(x,y),a(x,y)\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ への対応は一意的に定まらない．しかし，どこか *1* 点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ での平面 $L_{(x_0,y_0)}$ の単位法ベクトルを $\nu\,(x_0,y_0)$ か $-\nu\,(x_0,y_0)$ のどちらか一つ指定してやれば，連続性により，平面の集合 $\left\{L_{(x,y)}\right\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ からガウス写像の像と高さ関数の像の集合 $\{\nu(x,y),a(x,y)\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ への対応は一意的となる．従って，ルジャンドルデータの定義は *well-defined* である．

(2) 与えられた C^∞ 級写像 $\widetilde{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ に対し，C^∞ 級写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}^2\to S^1$ が存在して

$$d\widetilde{f}_{(x,y)}\,(\mathbf{v})\cdot\widetilde{\nu}(x,y)=0$$

が任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ と任意の $\mathbf{v}\in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ において成立していれば，$\widetilde{f}$ は**フロンタル**と呼ばれる．本稿における *§1* の主役であるカスピダルクロスキャップの標準形はフロンタルの一例である．また，任意のフロンタルに対してガウス写像や高さ関数が自然に定義できるので，任意のフロンタルに対してルジャンドルデータも定義できることになる．

次の問題を考えてみる．

問題 1 (ルジャンドルデータからの復元問題)

$$\left\{L_{(x,y)}\right\}_{x,y\in\mathbb{R}}=\left\{\begin{array}{lcl}\nu(x,y)&=&\frac{1}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\left(-2y^3,-3xy,2\right),\\ a(x,y)&=&\frac{-3xy^3}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\end{array}\right\}_{x,y\in\mathbb{R}}$$

が与えられたとする．さらに，このルジャンドルデータは（カスピダルクロスキャップの標準形 $f(x,y)=(x,y^2,xy^3)$ のルジャンドルデータだったが）どういう写像のルジャンドルデータなのか忘れてしまって思い出せないとする．でもある C^∞ 写像 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ のルジャンドルデータであることは覚えているとする．**ルジャンドルデータからの復元問題**とはこれらの仮定の下で，$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を決定せよ，という問題のことである．

注意 2 (1) [*2*] において問題 1 の解法は原理的には与えられていた．つまり，S^2 の正規座標系と S^2 のレビ・チビタ平行移動を使った f の表現公式が既に

得られていたのである．そこで当初は [*2*] にあるこの表現公式を用いて f の具体的な表示を復元しようと努めていた．ところが，S^2 の正規座標系と S^2 のレビ・チビタ平行移動の具体的な計算はたとえ高度な数式処理を使ったとしてもまず不可能そうだということがわかってきたので，この正攻法はあきらめることにして，代替法を探すことにした．我々が採用する代替法は**緯度・経度法**と呼ぶ方法であり，これについてはすぐ後でご説明する．
(2) 与えられた C^∞ 級写像 $\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ に対し，C^∞ 級写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}^n\to S^n$ が存在して

$$d\widetilde{f}_{(x,y)}(\mathbf{v})\cdot\widetilde{\nu}(\mathbf{x})=0$$

が任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ と任意の $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ において成立していれば，$\widetilde{f}$ は**フロンタル**と呼ばれる．本稿における第 1 節の主役であるカスピダルクロスキャップの標準形はフロンタルの一例である．また，任意のフロンタルに対してガウス写像や高さ関数が自然に定義できるので，任意のフロンタルに対してルジャンドルデータも定義できることになる．従って，任意のフロンタルに関しても，ルジャンドルデータからの復元問題を考えることができる．
(3) 任意のフロンタル $\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ に関するルジャンドルデータからの復元問題を定式化してみる．$\widetilde{\nu}:\mathbb{R}^n\to S^n$，$\widetilde{a}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は，あるフロンタル $\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ のガウス写像と高さ関数であり，それぞれ具体的に与えられているとする．そのとき，ルジャンドルデータからの復元問題とは次の問題 2 のことである．

問題 *2* 以下の制約条件付 1 階微分方程式系の解を与える写像 $\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ の存在はわかっているが，具体的な形はわからないとする．そのとき，以下の制約条件付 1 階微分方程式系の解を与える写像の具体的な形を求めよ．ただし，以下における $(x_1,\dots,x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の点 $\mathbf{x}$ の座標表示である．

$$\begin{cases}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x_1}(\mathbf{x})\cdot\widetilde{\nu}(\mathbf{x}) & = & 0,\\ \quad\vdots & & \\ \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\cdot\widetilde{\nu}(\mathbf{x}) & = & 0,\\ \widetilde{f}(\mathbf{x})\cdot\widetilde{\nu}(\mathbf{x}) & = & \widetilde{a}(\mathbf{x}).\end{cases}$$

1.2 緯度・経度法

緯度・経度法は次の仮定を満たしているフロンタルに対して有効な解法である．

仮定 1 フロンタル $\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}^n\to S^n$ の正則点の集合

$$Reg(\widetilde{\nu})=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid d\widetilde{\nu}_{\mathbf{x}}:T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n\to T_{\widetilde{\nu}(\mathbf{x})}S^n \text{ は線形同型写像}\right\}$$

が $\mathbb{R}^n$ 内において稠密である．

カスピダルクロスキャップの標準形 $f(x,y)=(x,y^2,xy^3)$ のガウス写像 ν は $\nu(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}(-2y^3,-3xy,2)$ であった．直接計算により

$$Reg(\nu)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y\neq 0\}$$

を得るので，カスピダルクロスキャップの標準形は仮定 1 を満たしていることがわかる．

以下では，カスピダルクロスキャップの標準形 $f(x,y)=(x,y^2,xy^3)$ のガウス写像 $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ と高さ関数 $a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に適用してみることにより緯度・経度法を説明することにする．

緯度・経度法は四つのステップから成りたっている．

【緯度・経度法ステップ 1】

$$\begin{aligned}&\nu(x,y)\\ =\ &\left(\cos\theta_1(x,y)\cos\theta_2(x,y),\cos\theta_1(x,y)\sin\theta_2(x,y),\sin\theta_1(x,y)\right).\end{aligned}$$

とおく．すると，$u=x$ または y に対して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\nu}{\partial u} &= \frac{\partial\theta_1}{\partial u}\left(-\sin\theta_1\cos\theta_2,-\sin\theta_1\sin\theta_2,\cos\theta_1\right)\\ &\quad+\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\cos\theta_1\left(-\sin\theta_2,\cos\theta_2,0\right).\end{aligned}$$

を得る．$\mu_1=\left(-\sin\theta_1\cos\theta_2,-\sin\theta_1\sin\theta_2,\cos\theta_1\right)$, $\mu_2=\left(-\sin\theta_2,\cos\theta_2,0\right)$ とおくことにより次の補題を得る．

補題 1
(1) $\frac{\partial\nu}{\partial x}=\mu_1\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\mu_2\cos\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial x}$
(2) $\frac{\partial\nu}{\partial y}=\mu_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\mu_2\cos\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y}$

注意 3 (1) $\mathbf{x}=(x,y)$ が $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ の正則点であれば $\theta_1(x,y),\theta_2(x,y)$ は多価可関数芽として *well-defined*.
(2) $\langle\nu,\mu_1,\mu_2\rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる.
(3)[2] 例外的な場合を除き，たとえ (x_0,y_0) が ν の正則点であったとしても，$(\nu(U),(\nu|_U)^{-1})$ は正規座標近傍ではない．ただし，U は点 (x_0,y_0) の小さな近傍を表しており，ν については

$$\begin{aligned}&\nu(x,y)\\=\ &(\cos\theta_1(x,y)\cos\theta_2(x,y),\cos\theta_1(x,y)\sin\theta_2(x,y),\sin\theta_1(x,y)).\end{aligned}$$

とおいている.

注意3の(2)から次の補題を得る,ただし,$b_1(x,y)=f(x,y)\cdot\mu_1(x,y)$, $b_2(x,y)=f(x,y)\cdot\mu_2(x,y)$ とおいている.

補題 2 ν の正則点 (x_0,y_0) の近くでは次の恒等式が成立する.

$$\begin{aligned}f&=(f\cdot\nu)\nu+(f\cdot\mu_1)\mu_1+(f\cdot\mu_2)\mu_2\\&=a\nu+(f\cdot\mu_1)\mu_1+(f\cdot\mu_2)\mu_2\\&=a\nu+b_1\mu_1+b_2\mu_2.\end{aligned}$$

補題2により，もしも与えられた $\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ と $a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ のみを使って b_1, μ_1, b_2, μ_2 の記述が可能であれば，f の正確な復元が可能となる．また，$u=x$ または y としたとき，補題1は

$$\frac{\partial\nu}{\partial u}=\mu_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\mu_2\cos\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial u}$$

を主張していた．また，注意1の(2)は，「$\langle\nu,\mu_1,\mu_2\rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底」という注意であった．この二つから，$u=x$ または y としたとき，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\nu}{\partial u}(x,y)\cdot\mu_1(x,y)&=\frac{\partial\theta_1}{\partial u}(x,y),\\\frac{\partial\nu}{\partial u}(x,y)\cdot\mu_2(x,y)&=\frac{\partial\theta_2}{\partial u}(x,y)\cos\theta_1(x,y),\end{aligned}$$

がわかる．従って，次の補題3が成立する.

[2] ここは少々わかりにくいかもしれない．例外的な場合とは $\nu(x_0,y_0)$ が赤道上にあった場合である．赤道以外の緯線が測地線ではないので，$\nu(x_0,y_0)$ が赤道以外の緯線上にあれば正規座標近傍にならない．ここの説明用の図を眺めたい読者は講演に使ったスライド [3] の9ページにここの説明用の手書きの図があるので参照してほしい.

補題 3 ν の正則点 (x_0, y_0) の近くで以下が成り立つ.
(1) $\frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \nu}{\partial x}(x,y) \cdot \mu_1(x,y)$,
(2) $\frac{\partial \theta_2}{\partial x}(x,y) \cos\theta_1(x,y) = \frac{\partial \nu}{\partial x}(x,y) \cdot \mu_2(x,y)$,
(3) $\frac{\partial \theta_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \nu}{\partial y}(x,y) \cdot \mu_1(x,y)$,
(4) $\frac{\partial \theta_2}{\partial y}(x,y) \cos\theta_1(x,y) = \frac{\partial \nu}{\partial y}(x,y) \cdot \mu_2(x,y)$.

【緯度・経度法ステップ 2】 再び補題 1 を使うと，$u = x$ または y に対し,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(f \cdot \nu) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \nu\right) + \left(f \cdot \frac{\partial \nu}{\partial u}\right) \\
&= f \cdot \frac{\partial \nu}{\partial u} \\
&= f \cdot \left(\mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \mu_2 \cos\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) \\
&= (f \cdot \mu_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + (f \cdot \mu_2) \cos\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \\
&= b_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + b_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial u}
\end{aligned}
$$

となる．従って，次の補題 4 を得る.

補題 4 ν の正則点 (x_0, y_0) の近くで以下も成り立つ.
(1) $\frac{\partial a}{\partial x} = (f \cdot \mu_1)\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + (f \cdot \mu_2)\cos\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}$
(2) $\frac{\partial a}{\partial y} = (f \cdot \mu_1)\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + (f \cdot \mu_2)\cos\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial y}$.

補題 4 から次の補題 5 を得る.

補題 5 ν の正則点 (x_0, y_0) の近くで次の恒等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&((f(x,y) \cdot \mu_1(x,y)), (f(x,y) \cdot \mu_2(x,y)) \cos\theta_1(x,y)) \\
= &\left(\frac{\partial a}{\partial x}(x,y), \frac{\partial a}{\partial y}(x,y)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}^{-1}.
\end{aligned}
$$

補題 5 の恒等式は (θ_1, θ_2) のヤコビ行列の逆行列を用いて記述されている.
従って，補題 4 での (x,y) は ν の正則点でなければならないことがわかる.

【緯度・経度法ステップ 3】　復元問題に対しては

$$\begin{aligned} & \nu(x,y) \\ = \; & (\cos\theta_1(x,y)\cos\theta_2(x,y), \cos\theta_1(x,y)\sin\theta_2(x,y), \sin\theta_1(x,y)) \,. \end{aligned}$$

の表示は具体的に与えられている．だから，$\pm$ の符号に注意する必要はあるものの，(x,y) が ν の正則点であるならば

$$\cos\theta_1(x,y),\ \cos\theta_2(x,y),\ \sin\theta_2(x,y)$$

および

$$\mu_1(x,y),\ \mu_2(x,y)$$

の具体的な表示を得ることにさほどの困難はない．従って，(x,y) が ν の正則点であるならば，補題 3 を使い

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(x,y)$$

の具体的な表示を得ることが可能ということがわかる．さらに，(x,y) が ν の正則点であるならば，補題 5 を使えば

$$b_1(x,y),\ b_2(x,y)$$

の具体的な表示を得ることにもさほどの困難はない．

【緯度・経度法ステップ 4】　補題 2 は「(x,y) が ν の正則点であるならば，

$$\begin{aligned} & f(x,y) \\ = \; & a(x,y)\nu(x,y) + b_1(x,y)\mu_1(x,y) + b_2(x,y)\mu_2(x,y) \end{aligned}$$

が成立する」という主張であった．ステップ 3 において，(x,y) が ν の正則点であるのであれば

$$a(x,y), \nu(x,y), b_1(x,y), \mu_1(x,y), b_2(x,y), \mu_2(x,y)$$

の具体的な表示はすべて得られるので，それらをすべて補題 2 に代入して整理してみれば $f(x,y)$ になるはずである．具体的な計算を実行して確認してみる．

　まず，与えられたルジャンドルデータ $\nu(x,y), a(x,y)$ の具体的表示は以下であった．ここでの (x,y) は $Reg(f)$ に属していようがいまいがかまわない，

つまり，$\mathbb{R}^2$ の任意の点 (x,y) において以下が成り立っていることを一応注意しておく．

$$\nu(x,y)=\frac{(-2y^3,-3xy,2)}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}},\qquad a(x,y)=\frac{-3xy^3}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}.$$

ここから先の (x,y) は $Reg(f)$ に属している，つまり，$y\neq 0$ を満たしていることに注意し，符号を慎重に吟味することにより次を得ることができる．

$$\begin{aligned}
\sin\theta_1(x,y)=&\frac{2}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}, &\quad \cos\theta_1(x,y)=&\sqrt{\frac{9x^2y^2+4y^6}{4y^6+9x^2y^2+4}},\\
\sin\theta_2(x,y)=&-\frac{3xy}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2}}; &\quad \cos\theta_2(x,y)=&-\frac{2y^3}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2}}.
\end{aligned}$$

チェインルールを適用すれば次を得ることができる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta_1}{\partial x} &= \frac{1}{\cos\theta_1}\frac{\partial\sin\theta_1}{\partial x}=-\frac{18xy^2}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}\,(9x^2y^2+4y^6+4)},\\
\frac{\partial\theta_2}{\partial x} &= \frac{1}{\cos\theta_2}\frac{\partial\sin\theta_2}{\partial x}=\frac{6y^2}{9x^2+4y^4},\\
\frac{\partial\theta_1}{\partial y} &= \frac{1}{\cos\theta_1}\frac{\partial\sin\theta_1}{\partial y}=-\frac{6\,(3x^2y+4y^5)}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}\,(9x^2y^2+4y^6+4)},\\
\frac{\partial\theta_2}{\partial y} &= \frac{1}{\cos\theta_2}\frac{\partial\sin\theta_2}{\partial y}=-\frac{12xy}{9x^2+4y^4}.
\end{aligned}$$

$b_1(x,y),b_2(x,y)$ についてであるが，(x,y) は ν の正則点であるから，(θ_1,θ_2) の正則点である．従って，次の方程式を満たす $b_1(x,y),b_2(x,y)$ は一意に定まるので次の方程式を具体的に解いてみればそれで済みである．

$$da=b_1\,d\theta_1+b_2\,d\theta_2$$

実行してみて以下を得る．

$$b_1(x,y)=\frac{xy^2\,(9x^2y^2+4y^6+10)}{\sqrt{9x^2+4y^4}\sqrt{9x^2y^2+4y^6+4}};\quad b_2(x,y)=\frac{3x^2y-2y^5}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6+4}}$$

さらに, 正規直交基底 $\{\nu(x,y),\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)\}$ を構成する $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$

は次の形をしていることがわかる．

$$\begin{aligned}\mu_1(x,y) &= \frac{-(4y^3, 6xy, 9x^2y^2+4y^6)}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}\sqrt{9x^2y^2+4y^6+4}},\\ \mu_2(x,y) &= \left(\frac{3xy}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}}, -\frac{2y^3}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}}, 0\right).\end{aligned}$$

以上により構成要素の具体的表示は全て求まったので，あとは代入するだけである．[3]

$$\begin{aligned}&a(x,y)\nu(x,y)+b_1(x,y)\mu_1(x,y)+b_2(x,y)\mu_2(x,y)\\ =\ &\frac{-3xy^3}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\frac{(-2y^3,-3xy,2)}{\sqrt{4y^6+9x^2y^2+4}}\\ &\quad+\frac{xy^2\left(9x^2y^2+4y^6+10\right)}{\sqrt{9x^2+4y^4}\sqrt{9x^2y^2+4y^6+4}}\frac{-(4y^3,6xy,9x^2y^2+4y^6)}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}\sqrt{9x^2y^2+4y^6+4}}\\ &\quad+\frac{3x^2y-2y^5}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6+4}}\left(\frac{3xy}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}},-\frac{2y^3}{\sqrt{9x^2y^2+4y^6}},0\right)\\ =\ &(x,y^2,xy^3)=f(x,y).\end{aligned}$$

次に (x,y) が正則点でない場合を考える．求めよう（復元させよう）とする C^∞ 級写像を $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ とおき，$\varphi(x,y)=(x,y^2,xy^3)$ であることを示したいのである．「ガウス写像 ν の正則点の集合は稠密」という仮定 1 を満たしていたので任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し，ガウス写像 ν の正則点列 $\{(x_k,y_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ が存在して $x=\lim_{k\to\infty}x_k$, $y=\lim_{k\to\infty}y_k$ となっている．従って，

$$\varphi(x,y)=\varphi(\lim_{k\to\infty}x_k,\lim_{k\to\infty}y_k)=\lim_{k\to\infty}\varphi\left(x_k,y_k\right)=\lim_{k\to\infty}\left(x_k,y_k^2,x_ky_k^3\right)=\left(x,y^2,xy^3\right)$$

を得る．これでカスピダルクロスキャップの標準形がルジャンドルデータから確かに復元できた．

2　カスピダルエッジの標準形

次の具体的な表示式で定義される写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を**カスピダルエッジの標準形**[4] と呼ぶ．

$$f(x,y)=\left(x,y^2,y^3\right)\quad\left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right).$$

---

[3]ページ数の制限があるので本稿では途中式の整理を省略するが，興味がある読者は途中式の整理を実行してみて確かに $\left(x,y^2,xy^3\right)$ となることを確認してみてほしい．

[4]ページ数の上限の制約がある本稿に図を載せることは差し控える．

カスピダルエッジの標準形のガウス写像と高さ関数はそれぞれ次の形をしていることが計算により容易にわかる．特にカスピダルエッジの標準形はフロンタルである．

$$\nu(x,y)=\frac{1}{\sqrt{9y^2+4}}\,(0,-3y,2)\,,\quad a(x,y)=\frac{-y^3}{\sqrt{9y^2+4}}.$$

ガウス写像 ν の右辺には x がないので $\frac{\partial\nu}{\partial x}(x,y)\equiv 0$ となり，$\nu:\mathbb{R}^2\to S^2$ の正則点の集合は空集合であることがわかる．従って，カスピダルエッジの標準形に緯度・経度法を使って復元問題を解決したいと望んでも，仮定 1 を満たしていないので緯度・経度法が使えないのである．[5]カスピダルエッジの標準形は一例にすぎず，現実には緯度・経度法が使えないフロンタルは沢山ある．そのようなフロンタルに対しては復元問題の解決は諦めざるを得ないのか？第 3 節において紹介する定理 2 を使えば，仮定 1 を満たさない解析的なフロンタルに限らず，あらゆる解析的写像 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ が $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ への適切な収束列 $\{\varphi_k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\}_{k=1,2,\ldots}$ のルジャンドルデータを使って復元できることがわかる．第 3 節の最後に定理 2 を使ってカスピダルエッジの標準形の復元を実践してみる．

3 主結果

講演に使ったスライド [3] では本節の内容である「主結果」は第 4 節の題目になっており，第 3 節の題目は「クロスキャップの標準形」であった．また，講演時にも第 3 節においては「クロスキャップの標準形」の説明をしていた．しかし，ページ数の制約のため，本稿では「クロスキャップの標準形」の取り扱いは省略する．尚，「クロスキャップの標準形」の取り扱いを省略しても本稿の内容の理解に支障は生じないので安心していただきたい．

定義 2 フロンタル $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ は，$Reg(\nu)$ が $\mathbb{R}^n$ の中で稠密であるようなガウス写像 $\nu:\mathbb{R}^n\to S^n$ が存在するとき，**正則フロンタル**と呼ばれる．ここに，$Reg(\nu)$ はガウス写像 ν の正則点の集合のことである．

フロンタルは正則フロンタルと非正則フロンタルの 2 種類に分類される．第 1 節の主役であったカスピダルクロスキャップの標準形は正則フロンタルの例であり，第 2 節の主役であったカスピダルエッジの標準形は非正則フロン

[5]講演に使ったスライド [3] では REDUCTION METHOD という手法を導入して解決しているが，REDUCTION METHOD は講演の時点では若干の曖昧さがあることが判明してしまっていたので講演時には省略した．本稿でも取り扱わない．

タルの例である．第1節で詳しく説明した緯度・経度法は正則フロンタルに対する復元問題の解法である．そのことを定理の形にまとめたのが次の定理1である．

定理 1 どんな正則フロンタル $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ も，緯度・経度法を使えば ルジャンドルデータ $\{\nu(x),\ a(x)\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ から復元可能である．

次に非正則フロンタルに対する復元問題の解法を説明する．

定義 3 C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ は，以下の二つが満たされているとき**擬正則フロンタル**と呼ばれる．

(1) $Reg(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の中で稠密．

(2) $Reg(\nu|_{Reg(f)})$ は $Reg(f)$ の中で稠密．

ここに，$Reg(f)$ は f の正則点の集合であり，$\nu|_{Reg(f)} : Reg(f) \to S^n$ は $f|_{Reg(f)}$ のガウス写像である．

擬正則フロンタルを定義している定義3における主語は，「（フロンタルではなく）C^∞ 級写像」であることに注意してほしい．擬正則フロンタルは必ずしもフロンタルとは限らないのである．実際，（本稿では取り扱いを省略しているが）講演に使ったスライド [3] では第3節で取り扱われているクロスキャップの標準形 $f(x,y) = (x, y^2, xy)$ は原点 $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ で単位法ベクトルが定義できないのでフロンタルではない．とはいえ，制限写像 $f|_{\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}}$ はフロンタルであり，さらに擬正則フロンタルの定義を満たしていることが計算してみると確認できるので，擬正則フロンタルの例なのである．容易に想像できるように，擬正則フロンタルに対しても緯度・経度法により復元問題を解決可能である．従って次の定理を得る．

定理 2 どんな擬正則フロンタル $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ も，緯度・経度法を使うことにより，ルジャンドルデータ $\{\nu(x),\ a(x)\}_{x\in Reg(f)}$ から復元可能である．

次に，第2節で登場したカスピダルエッジの標準形に対する復元問題にも適用できるし，それのみかどんな解析的な写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の復元問題にも適用できる定理の紹介をする．[6]

---

[6]以後は解析的な写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を扱う．なぜ，解析的な写像に限定するかというと，ホイットニー位相を与えた写像空間の中での部分空間の稠密性を論じるのであるが，以下の定理3の (2) の証明が C^∞ 級のままでは未だに成功していないからである．他方，解析的な写像の場合は，膨大な時間がかかったもののなんとか証明できたからである．その周辺のより詳細なことについては，[1] の第 4.2 部分節（とりわけ，補題 4.2）をご覧いただきたい．

定義 4 次のように置いて，それぞれ，ホイットニー位相を入れた位相空間とする．

$$
\begin{aligned}
C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) &= \left\{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}\ C^\infty\text{級}\right\} \\
A\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) &= \left\{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}\ \text{解析的}\right\} \\
RM\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) &= \left\{f \in A\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) \mid Reg(f)\ \text{は}\ \mathbb{R}^n\text{の中で稠密}\right\} \\
PRF\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) &= \left\{f \in RM\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) \mid f\ \text{は擬正則フロンタル}\right\}
\end{aligned}
$$

定義により，次の包含関係は自明である．

$$PRF\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) \subset RM\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right) \subset A\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right).$$

定理 3 以下の二つが成り立つ．
(1) $RM\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ は $A\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ の中で稠密．
(2) $PRF\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ は $RM\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ の中で稠密．

定理 3 から次の定理 4 が従う．

定理 4 任意の解析的な写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ に対し，f に収束する擬正則フロンタル列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．さらに，$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ のルジャンドルデータ列 $\{\nu_k(x), a_k(x)\}_{x\in Reg(f_k), k\in\mathbb{N}}$ から f を復元することができる．[7]

以下において，定理 4 をカスピダルエッジの標準形 $f(x,y) = (x, y^2, y^3)$ に対して使用してみることで本稿を締めくくることにする．

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，$f_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．

$$f_k(x,y) = \left(x, \frac{x^2}{k} + y^2, y^3\right).$$

$f(x,y) = \lim_{k\to\infty} f_k(x,y)$ であるから，写像列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は f に収束する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，f_k のルジャンドルデータは以下であることは計算により容易にわかる．

$$\nu_k(x,y) = \frac{(6xy, -3ny, 2n)}{\sqrt{9n^2y^2 + 4n^2 + 36x^2y^2}}; \quad a_k(x,y) = \frac{y\left(3x^2 - ny^2\right)}{\sqrt{9n^2y^2 + 4n^2 + 36x^2y^2}}.$$

[7] 講演時のスライド [3] では，この定理は (解析的な写像についての主張ではなく) C^∞ 級写像についての主張になっている．しかし，前ページのフットノートに書いたように解析的写像に対してしか証明できていないので，本稿では解析的な写像についての主張にしてある．

さらに計算すれば $Reg(f_k) = Reg(\nu_k) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ もわかるので，写像列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は正則フロンタル列であることがわかる．従って，符号を慎重に注意すれば次の具体的表示を得ることができる．

$$\begin{aligned}
\sin\theta_1(x,y) =& \frac{2k}{\sqrt{9k^2y^2+4k^2+36x^2y^2}}, & \cos\theta_1(x,y) =& 3y\sqrt{\frac{k^2+4x^2}{9k^2y^2+4k^2+36x^2y^2}}, \\
\sin\theta_2(x,y) =& -\frac{k}{\sqrt{k^2+4x^2}}, & \cos\theta_2(x,y) =& \frac{2x}{\sqrt{k^2+4x^2}}.
\end{aligned}$$

チェインルールにより次を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta_1}{\partial x} &= \frac{1}{\cos\theta_1}\frac{\partial\sin\theta_1}{\partial x} = -\frac{24kxy}{\sqrt{k^2+4x^2}\,(9k^2y^2+4k^2+36x^2y^2)}, \\
\frac{\partial\theta_2}{\partial x} &= \frac{1}{\cos\theta_2}\frac{\partial\sin\theta_2}{\partial x} = \frac{2k}{k^2+4x^2}, \\
\frac{\partial\theta_1}{\partial y} &= \frac{1}{\cos\theta_1}\frac{\partial\sin\theta_1}{\partial y} = -\frac{6k\sqrt{k^2+4x^2}}{k^2(9y^2+4)+36x^2y^2}, \\
\frac{\partial\theta_2}{\partial y} &= \frac{1}{\cos\theta_2}\frac{\partial\sin\theta_2}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

f_k は正則フロンタルであるから，ν_k の正則点 (x,y) においては $da_k = b_1\,d\theta_1 + b_2\,d\theta_2$ を満たす b_1, b_2 は一意的に決まり，以下の具体的表示を得る．

$$b_1(x,y) = \frac{3k^2y^4+2k^2y^2-2kx^2+12x^2y^4}{\sqrt{k^2+4x^2}\sqrt{9k^2y^2+4k^2+36x^2y^2}}, \quad b_2(x,y) = \frac{3xy\left(k^2+2ky^2+2x^2\right)}{k\sqrt{9k^2y^2+4k^2+36x^2y^2}}$$

正規直交基底 $\{\nu_k(x,y), \mu_1(x,y), \mu_2(x,y)\}$ を構成する $\mu_1, \mu_2 \colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ の具体的表示は以下である．

$$\begin{aligned}
\mu_1(x,y) &= -\frac{(-4kx,\ 2k^2,\ 3y\,(k^2+4x^2))}{\sqrt{k^2+4x^2}\sqrt{9k^2y^2+4k^2+36x^2y^2}}, \\
\mu_2(x,y) &= \left(\frac{k}{\sqrt{k^2+4x^2}},\ \frac{2x}{\sqrt{k^2+4x^2}},\ 0\right).
\end{aligned}$$

これで構成要素の具体的表示はすべて求まったので，後は代入してみれば $f_k(x,y)$ が復元できることが確認できる．つまり，代入し整理してみれば以下を得る．

$$a_k(x,y)\nu_k(x,y) + b_1(x,y)\mu_1(x,y) + b_2(x,y)\mu_2(x,y) = \left(x, \frac{x^2}{k}+y^2, y^3\right) = f_k(x,y).$$

$Reg(f_k) = Reg(\nu_k) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ であったから，ここまでで $y \neq 0$ である (x,y) に対しては

$$f(x,y) = \lim_{k\to\infty} f_k(x,y) = \lim_{k\to\infty} \left(x, \frac{x^2}{k} + y^2, y^3\right) = \left(x, y^2, y^3\right)$$

がわかる．$\mathbb{R}^2$ 内で点列の極限を考えれば，任意の点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で $f(x,y) = (x, y^2, y^3)$ を得ることができる．従って，ルジャンドルデータ列 $\{(\nu_k, a_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ からカスピダルエッジの標準形 f が確かに復元できるのである．

Acknowledgments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
The author was supported by JSPS KAKENHI (Grant No. 23K03109).

References

[1] C. Muñoz-Cabello, T. Nishimura, R. Oset Sinha, *Recovery problem of parametrizations from Legendre data*, preprint (available at https://arxiv.org/abs/2602.19924[math.DG]).

[2] T. Nishimura, *Hyperplane families creating envelopes*, Nonlinearity, **35** (2022), 2588. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac61a0

[3] T. Nishimura, *How to restore the normal form of cuspidal edge from its Legendre data*, slide (available at https://researchmap.jp/0205/presentations/51759322).