サブリーマン構造と接分布の特異曲線

北海道大学，石川剛郎
Goo Ishikawa, Hokkaido University

1 導入.

C^∞ 多様体 M 上の接分布 (tangent distribution) とは，M の接束 TM の C^∞ 部分ベクトル束のことを意味する．本論文の主要テーマは，接分布の局所的分類問題である．接分布はさまざまな幾何的問題に登場する基本的な対象であり，その局所的分類問題は，数学の基本的問題の 1 つである．E.Cartan の仕事，その後の発展，田中昇による仕事，R.L.Bryant の仕事などにより，一般化された接続の理論に基づいて，不変量の理論，与えられた典型的な接分布についての不変量に依る特徴付け，あるいは平坦性による特徴付けが研究されている．

M 上の**サブリーマン構造**とは，接分布 $D \subset TM$ とその上の C^∞ リーマン計量の組のことである．いま，接分布 $D \subset TM$ にリーマン計量 $g : D \otimes D \to \mathbb{R}$ が与えられると，M 上の D に接する曲線（D-積分曲線） $\gamma : [a, b] \to M, \dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$, の長さ

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt$$

が定まる．ここでは曲線 γ は少なくとも絶対連続と仮定している．この条件から，ほとんどいたるところで γ は微分可能であり，上の積分が意味を持つ．そうすると，**測地線** (geodesic) あるいは**局所最短曲線** (local minimiser) の概念が自然に定義される．

リーマン構造（$D = TM$）の場合は，それらは，オイラー・ラグランジュ方程式により接束 TM 上でも，また余接束 T^*M 上のハミルトン方程式でも特徴付けられる．サブリーマン構造の場合は，ハミルトン方程式により特徴付けられる．さらに，サブリーマン構造の場合は，通常の測地線（正常測地線）の他に，計量には依らず接分布のみから決まる**特異曲線**と呼ばれる対象も現れるという現象が生じる．

Key words: 制御系，終点写像，異常測地線，拘束ハミルトン系，擬直積構造，ラグランジュ錐構造
2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 53C17, Secondary 53B30, 58E10, 70H05, 93B27.

本稿では，正常測地線への興味もさることながら，特異曲線を接分布の無視できない興味深く重要な “不変量” として捉えて注目し，特異曲線に関する情報から接分布に付随する様々な構造が得られるか？という問題設定から得られる結果を中心に，特異曲線に関する話題をいくつか取り上げて，なるべく具体例に沿って説明する．

特異曲線に注目するという問題意識は,「万物は特異点である」といった古代の哲学者がいたかどうかはわからないが（[26] の序文参照），たとえば，多様体の特性類の理論で，オイラー類，ホイットニー類などの特性類が特異点に注目することで得られる，というようなことを連想させるかもしれない．

なお，サブリーマン幾何は，複素幾何・CR 幾何，準楕円型偏微分方程式，ロボティックス，最適輸送，空間識の研究など，今回の講演で説明する内容を含む広汎で重要な分野・問題とも関係する興味深いテーマ（例えば文献 [8, 10, 27, 39, 37] などを参照）である．

本稿で概説する内容は，いくつかの共同研究 [25, 19, 20, 21, 18, 22] の成果を含んだものとなっている．

本稿は，2024 年 9 月に大阪大学で行った日本数学会企画特別講演 [16] の原稿を基に，改めてそれを大幅に修正・加筆して数理研講究録としたものである．

2　制御系と最適制御問題

以下，多様体 M は連結と仮定する．多様体 M 上の**制御系** (control system) とは，M 上の C^∞ ファイバー束 $\pi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to M$ と C^∞ 写像 $F : \mathcal{U} \to TM$ の組で，図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{U}}"'] & & TM \arrow[dl, "\pi_{TM}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

を可換にするもののことである．開集合 $V \subset M$ 上の局所自明化 $\mathcal{U}|_V \cong V \times U$ が与えられれば，制御系はベクトル場の族 $\{f_u\}_{u \in U}$， ただし $f_u(x) := F(x, u)$, で与えられ，制御パラメータ $u \in U$ による “制御付き常微分方程式”$\dot{x}(t) = f_{u(t)}(x(t))$ が得られる．制御 $u(t)$ でベクトル場 $f_{u(t)}$ をいろいろ乗り換えながら曲線 $x(t) \in M$ が進むのである．ここで，$\pi_{TM} : TM \to M$ は接束の射影である．

可測でほとんどいたるところ有界な曲線，すなわち L^∞ 曲線 $c : [a, b] \to \mathcal{U}$ を考える．$c(t) = (x(t), u(t)), x(t) \in M$ とおくと，$x(t)$ は絶対連続である．$u(t) \in \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(x(t))$ に対し，微分方程式

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \ (\text{a.e. } t \in [a, b])$$

が満たされるとき，$\mathcal{U}$ 上の曲線 $c(t)$ は制御系の**許容制御**，M 上の曲線 $\gamma(t) = x(t) = \pi_{\mathcal{U}}(c(t))$ は**軌道** (trajectory) と呼ばれる．このとき，軌道 $x(t)$ はリプシッツ曲線となる．

多様体 M 上の制御系 $\mathbb{C}:\mathcal{U}\xrightarrow{F}TM\xrightarrow{\pi_{TM}}M$ と関数（評価関数） $e:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，“コスト”

$$C:=\int_a^b e(c(t))dt$$

を最小にする制御（最適制御）

$$c:[a,b]\to\mathcal{U},\ c(t)=(x(t),u(t)),\ c(a)=(x_0,u_0),\ c(b)=(x_1,u_1)$$

あるいは対応する軌道 $x:[a,b]\to M$ を見つける問題を**最適制御問題**と呼ぶ．

2 つの制御系 $\mathbb{C}:\mathcal{U}\xrightarrow{F}TM\xrightarrow{\pi_{TM}}M$ と $\mathbb{C}':\mathcal{U}'\xrightarrow{F'}TM'\xrightarrow{\pi_{TM'}}M'$ と 2 つの関数 $e:\mathcal{U}\to\mathbb{R},e':\mathcal{U}'\to\mathbb{R}$ について，2 つの最適制御問題 $(\mathcal{U},e)$ と $(\mathcal{U}',e')$ が同型であるとは，図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R} & \xleftarrow{e} & \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & TM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & M \\
|| & & \psi\downarrow & & \varphi_*\downarrow & & \downarrow\varphi \\
\mathbb{R} & \xleftarrow{e'} & \mathcal{U}' & \xrightarrow{F'} & TM' & \xrightarrow{\pi_{TM'}} & M'
\end{array}$$

を可換にする微分同相写像 ψ,φ が存在するときに言う．また，$(\mathbb{C},0)$ と $(\mathbb{C}',0)$ が同型のとき，すなわち，評価を気にせず制御系の構造だけが同一視されるとき，2 つの制御系 $\mathbb{C},\mathbb{C}'$ が同型であると言う．

本稿では，接分布 $D\subset TM$ を扱うが，接分布は包含写像により M 上の制御系 $\mathbb{D}:D\hookrightarrow TM\xrightarrow{\pi_{TM}}M$ と見なされる．2 つの接分布が制御系として同型なのは，通常の意味で接分布が同型なことである．

最適制御問題 $(\mathbb{C},e)$ の**ハミルトニアン** $H=H_{(\mathbb{C},e)}:(\mathcal{U}\times_M T^*M)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$H_{(\mathbb{C},e)}(x,p,u,p^0):=H_{\mathbb{C}}(x,p,u)+p^0e(x,u):=\langle p,F(x,u)\rangle+p^0e(x,u),$$

により定める．ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は接ベクトルと余接ベクトルのペアリングで，$\mathcal{U}\times_M T^*M:=\{(x,p,u)\mid(x,u)\in\mathcal{U},(x,p)\in T^*M\}$ はファイバー積である．

ポントリャーギンの最大値原理 [38, 3] により，最適解 $c:[a,b]\to\mathcal{U},c(t)=(x(t),u(t))$ に対しては，リプシッツ曲線 $(x(t),p(t))\in T^*M$ および非正の定数 $p^0\leq 0$ が存在し，ハミルトニアン $H=H_{(\mathbb{C},e)}$ に関する次の拘束ハミルトン方程式

$$\begin{cases}
\dot{x}_i(t)=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}(x(t),p(t),u(t),p^0),\ (1\leq i\leq m),\\[2mm]
\dot{p}_i(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x(t),p(t),u(t),p^0),\ (1\leq i\leq m),\\[2mm]
\dfrac{\partial H}{\partial u_j}(x(t),p(t),u(t),p^0)=0,\ (1\leq j\leq r),\quad (p(t),p^0)\neq 0,\ p^0\leq 0
\end{cases}$$

が成り立つ ([38][3]).

拘束ハミルトン方程式の解を与える T^*M 上の曲線 $(x(t), p(t))$ は陪極値曲線 (bi-extremal) と呼ばれ，$p^0 < 0$ のときは正常 (normal)，$p^0 = 0$ のときは異常 (abnormal) な陪極値曲線と呼ばれる．

有限次元の場合の**制限付き極値問題**（ラグランジュの未定乗数法）とのアナロジーでいうと，定義域の正則点上に在るような関数の臨界点が正常と呼ばれ，定義域そのものの特異点が異常（特異）と呼ばれていることになる．

曲線 $x : [a, b] \to M$ や制御 $c = (x, u) : [a, b] \to \mathcal{U}$ が**正常極値曲線** (normal extremal)（あるいは**異常極値曲線** (abnormal extremal)）とは，正常（あるいは異常）な陪極値曲線を付随するときに言う．なお，異常でない正常極値曲線もあるし，正常かつ異常な極値曲線もあり得るし，また正常でない異常極値曲線の例も知られている [33, 34].

以下，主に，多様体上の接分布あるいは "接錐分布" について，評価関数 e としては，長さ，あるいはエネルギー（作用）を選んだ場合の最適制御問題を考える．

3　測地線と特異曲線

簡単のため，サブリーマン多様体 (M, D, g) について， $D \subset TM$ の局所正規直交枠 $X_1, \ldots, X_r$ を取り，制御系 $\pi : \mathcal{U} = M \times \mathbb{R}^r \to M, \pi(x, u) = x$, $F : \mathcal{U} \to TM, F(x, u) = \sum_{i=1}^r u_i X_i(x), \dot{x} = \sum_{i=1}^r u_i X_i(x)$ を設定し，エネルギー $e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r u_i(t)^2$ に関する最適制御問題を考える．速さ（接ベクトルの長さ）$\sqrt{\sum_{i=1}^r u_i(t)^2}$ に関する最適制御問題（カルノー・カラテオドリの問題）と同じ最適解（測地線）を持つ．ハミルトニアンは

$$H(x, p, u, p^0) = \left\langle p, \sum_{i=1}^r u_i X_i(x) \right\rangle + p^0 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r u_i^2 \right)$$

により与えられる．陪極値曲線に関する拘束条件 $\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0$ は，$p^0 u_j = -\langle p, X_j(x) \rangle$ と同値であり，$p^0 < 0$ のとき（正常な場合）は，$u_j = -\frac{1}{p^0}\langle p, X_j(x) \rangle$ となり，ハミルトニアンが (p, p^0) に関して線形なので，$p^0 = -1$ と正規化すれば，$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \langle p, X_i(x) \rangle^2$ となり，通常の（拘束なし）ハミルトン方程式に帰着される．正常極値曲線は局所最短曲線となり，正常測地線 (normal geodesic) と呼ばれる．

一方，$p^0 = 0$ の場合の異常極値曲線は局所最短になるとは限らないが，正常ではない異常極値曲線が局所最短になる例が知られている [34].

異常極値曲線は，評価関数 e，したがってサブリーマン計量 g には依存せず，接分布にのみ依存し，接分布の**特異曲線**という概念と一致する [34, 3]：

定義. 接分布 D が与えられた空間 M のある点 p から出発するリプシッツ D-積分曲線 $x:[a,b]\to M$, $x(a)=p$ の全体の空間（正確には制御も込めた空間）$\mathscr{C}$ から M への終点写像 $\mathrm{End}:\mathscr{C}\to M$ を，終点を対応させて $\mathrm{End}(x):=x(b)$ により定義する．$\mathscr{C}$ にはバナッハ多様体の構造が入り，微分写像 $\mathrm{End}_*:T_x\mathscr{C}\to T_{x(b)}M$ が定まる．終点写像 End の臨界「点」（微分写像が全射にならない「点」）を**特異曲線**，あるいは **D-特異曲線**とよぶ．許容された範囲で途中の経路をいくら動かしてみても，終点を（無限小の意味で）自由には変えられない軌道である．この文脈では「特異曲線」とは，特異点をもつ曲線という意味ではなく，**特異点である曲線**を意味している．

$p^0=0$ の場合の拘束ハミルトン方程式により，特異曲線（異常極値曲線）は（曲線のパラメータに関して）局所的に特徴付けられる．

特異曲線は滑らか（微分可能，あるいは C^∞）とは限らない．その定義から明らかなように，滑らかな特異曲線をいくつか接続してできる曲線も特異曲線となるが，接分布 (M,D) の特異曲線を考察する上で，特に C^∞ に径数付けられた D-特異曲線の情報が重要になる．さらにはめ込まれた，つまり速度が零にならない C^∞ D-特異曲線を **D-特異パス**と呼ぶことにする．そこで，**特異速度錐** (singular velocity cone) $SVC=SVC(D)$ を

$$SVC(D):=\{(x,u)\in D\mid \exists C^\infty\ D\text{-特異曲線}\ \ \gamma:(\mathbb{R},0)\to M,\ \gamma(0)=x,\ \gamma'(0)=u\}$$

により定める．$SVC(D)$ は錐，つまり，ファイバーごとに $\mathbb{R}^\times$-不変であることがわかる．

すべての D-特異曲線は $SVC(D)$-積分曲線となる．与えられた接分布 D に対して，特異速度錐 $SVC(D)$ を確定して幾何学を展開することが当座の問題となる．もちろん，D にサブリーマン計量が与えられたときに，D-特異曲線が局所最短性を持つかどうかを議論するという難しい問題が控えている．とは言え，特異曲線は，最適制御問題においては，いわば「秘技」「裏技」あるいは「奥の手」のようなものであり，念のため，とにかくいつも考慮に入れておくのもそう悪い発想ではないだろう．

なお，サブリーマン幾何では，通常，接分布 $D\subset TM$ には次の**ブラケット生成条件（ヘルマンダー条件）**を課す．すなわち，D の局所切断の作る層 $\mathcal{D}$ について，リー括弧積で得られる導来系 $\partial\mathcal{D}=\mathcal{D}+[\mathcal{D},\mathcal{D}]$, $\partial^{(2)}\mathcal{D}=\partial\mathcal{D}+[\mathcal{D},\partial\mathcal{D}]$, $\partial^{(3)}\mathcal{D}=\partial^{(2)}\mathcal{D}+[\mathcal{D},\partial^{(2)}\mathcal{D}],\ldots,$ について，ある r があって $\partial^{(r)}\mathcal{D}$ が TM （への局所切断の作る層）と一致するという条件を課す．この条件の下，連結な M の任意の 2 点は D-積分曲線により結ぶことができる（チャウ・ラシェフスキーの定理）．このことから，連結な M に距離を入れることができる（カルノー・カラテオドリ距離）．

逆に，D が完全可積分（葉層構造）の場合は，D の積分曲線は，1 つの葉に閉じ込められていて，その葉から抜け出すことができないので，$(\mathrm{rank}(D)<\dim(M)$ なら）すべての D-積分曲線は D-特異曲線となる．

本稿では，各点 $x \in M$ での茎 $(\partial^{(i)}\mathcal{D})_x$ の値 (evaluation) 全体の作るベクトル空間の次元が M 上で局所一定（したがって，空間 M が連結なら一定）という正則性をもつ接分布 D を主に扱う．このとき，各 $\partial^{(i)}\mathcal{D}$ はある接分布 $\partial^{(i)}D$ の局所切断の作る層となる．このとき，D の**小増大度ベクトル** (small growth vector) を $(\mathrm{rank}(D), \mathrm{rank}(\partial D), \mathrm{rank}(\partial^{(2)}D), \mathrm{rank}(\partial^{(3)}D), \cdots)$ により定める．小増大度ベクトルで接分布の局所同型類は一般に定まらないが，接分布を扱う際の重要な指標となる．

4　接分布の特異動物園

モンゴメリーによるサブリーマン幾何の本 [34] の第 6 章のタイトルは “A Zoo of Distributions” である．それをまねて，特に接分布の特異曲線という対象に注目して，興味深い，いくつかのタイプの接分布（動物？植物？）たちをゆっくり観察しながら楽しんで観て歩いてみよう．

4.1　接触分布

奇数 $2n+1$ 次元多様体 M 上の階数 $2n$ の接分布 $D \subset TM$ が接触分布 (contact distribution) であるとは，局所的な微分 1 形式 θ で D を $\theta = 0$ により定めたとき，$d\theta|_D$ が非退化（つまりベクトル束 D 上のシンプレクティック形式）になるときにいう．接触分布は $(2n, 2n+1)$-分布となり，また，局所的にはすべて同型である（ダルブーの定理）．接触分布には，定値曲線以外に特異曲線はない．$SVC(D) = \{0\}$ である.（次の 4.2 節も参照.）

4.2　$(2,3)$-分布（3 次元接触分布）

任意の $(2,3)$-分布 $D \subset TM$ に対し，M の任意の点の近傍上で D の局所枠 ξ_1, ξ_2 をとる．M の局所座標系 $x = (x_1, x_2, x_3)$ を選んで，$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + a(x)\frac{\partial}{\partial x_3}$ という具合に滑らかな関数 $a(x)$ を使って表すことができる．$(2,3)$-分布であるという条件から，$\xi_1, \xi_2, [\xi_1, \xi_2]$ が局所枠となり，$\frac{\partial a}{\partial x_1}$ は消えないことがわかるので，座標系を改めて取り直せば，生成系を $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$ にできる．D を定める局所 1-形式は接触形式 $\alpha = dx_3 - x_1 dx_2$ となり，ジェット空間 $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上の自然な微分式系でモデルが与えられる．また，定値曲線以外に特異曲線は存在しない．実際，$p^0 = 0$ の場合の D のハミルトニアンは $H(x,p) = \langle p, u_1X_1 + u_2X_2 \rangle = u_1p_1 + u_2(p_2 + x_1p_3)$ であり，特異曲線に対する拘束ハミルトン方程式は $\dot{x}_1(t) = u_1(t), \dot{x}_2(t) = u_2(t), \dot{x}_3(t) = u_2(t)x_1(t), \dot{p}_1(t) = -u_2(t)p_3(t), \dot{p}_2(t) = 0, \dot{p}_3(t) = 0$, $p_1(t) = 0, p_2(t) + x_1(t)p_3(t) = 0$, $(p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \neq (0,0,0)$ で与えられ，容易に分かるように，これらを満たす異常陪極値曲線 $(x(t), p(t))$ が付随するような曲線 $x = x(t)$ （特異曲線）は定値曲線しかない．なお，リーマン曲面上の単位接束には自然に $(2,3)$ 型サブリーマン接触

構造が入るが，すべてのサブリーマン（正常）測地線の曲面への射影に関するすべての特異点の完全な分類を得ている [18].

4.3 $(2, 3, 4)$-分布（エンゲル分布）

小増大度ベクトル $(2, 3, 4)$ の分布を考える．つまり，4 次元多様体 M 上の階数 2 の接分布 $E \subset TM$ で，リー括弧積を 1 回とれば階数 3 の接分布 $\partial(E)$ が得られ，さらに E の局所切断とのリー括弧積で TM 全体が得られるようなものである．このような接分布を**エンゲル分布**とよぶ．3 次元接触多様体 (N, D) の延長 (M, E)， ただし，$M := P(D) = (D \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$, $(x, [u]) \in P(D)$, $E_{(x,[u])} := \{v \in T_{(x,[u])}P(D) \mid \pi_*(v) \in \mathbb{R}u\}$，について，$E$ はエンゲル分布となる．エンゲル分布は局所的にすべて同型であり，ジェット空間 $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上の座標 $x, y, p(= \frac{dy}{dx}), q(= \frac{d^2y}{dx^2})$ に関して，微分式系 $dy - pdx = 0, dp - qdx = 0$ によってモデルが与えられる．特異曲線は,（定値曲線と）q 方向の直線（エンゲル直線）から成る：$SVC(E) = \langle \frac{\partial}{\partial q} \rangle_{\mathbb{R}}$ である．3 次元接触多様体 (N, D) の延長 $(M = P(D), E)$ の特異パスの空間は元々の 3 次元接触多様体 N と同一視される．

4.4 $(2, 3, 5)$-分布（カルタン分布）

E. カルタンは G_2 型例外単純リー環を $(2, 3, 5)$-分布の無限小変換の作るリー環として構成した [7, 25]．$(2, 3, 5)$-分布は**カルタン分布**とも呼ばれる．

$S \subset TM$ を 5 次元多様体 M 上の $(2, 3, 5)$-分布とする．このとき，M の任意の点 x と S_x の任意の方向 $[u] \in P(S_x)$ に対して,（径数付けを除いて）一意的に $\gamma(0) = x, [\gamma'(0)] = [u]$ を満たす S-特異曲線が存在する．さらに，(M, S) の延長 (Z, E), ただし，$Z := P(S) = (S \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$, $E \subset T(P(S))$, $E_{x,[u]} := \{v \in T_{(x,\ell)}M \mid \pi_*(v) \in \mathbb{R}u\}$ に対して，S-特異曲線の自然な持ち上げの方向 K により，E の分解 $E = L \oplus K$（$L := \mathrm{Ker}(\pi_* : TZ \to TM)$）が定まる．これは（田中昇の意味 [42] で） G_2 型擬直積構造となり，次が成り立つ．

定理 4.1 ([19, 21]) $(2, 3, 5)$-分布 (M, S) と G_2 型擬直積構造 (Z, E) と非退化ラグランジュ錐構造 (N, H, C) の局所同型類の間に自然な全単射が存在する：

$$\{(2, 3, 5)\text{-分布 } (M, S)\}/\cong$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} G_2\text{-型擬直積構造(Z, E):} \\ (2,3,4,5,6)\text{-分布 } E \text{ と分解} \\ E = L \oplus K,\ \mathrm{rank}(K) = \mathrm{rank}(L) = 1 \text{ で} \\ [\mathcal{K}, \mathcal{L}] = \partial\mathcal{E}\ (:= \mathcal{E} + [\mathcal{E}, \mathcal{E}]),\ [\,\mathcal{K}, \partial\mathcal{E}\,] = \partial^{(2)}\mathcal{E},\ [\,\mathcal{L}, \partial\mathcal{E}\,] = \partial\mathcal{E}, \\ [\,\mathcal{K}, \partial^{(2)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(3)}\mathcal{E},\ [\,\mathcal{L}, \partial^{(2)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(2)}\mathcal{E}, \\ [\,\mathcal{K}, \partial^{(3)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(3)}\mathcal{E},\ [\,\mathcal{L}, \partial^{(3)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(4)}\mathcal{E} \text{ を満たす.} \end{array} \right\} /\cong$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 5\text{次元多様体 } N \text{ 上の非退化ラグランジュ錐構造 } (N,H,C), \\ C \subset TN \text{ の線形包 } H \text{ が } N \text{ 上の接触構造となり，} \\ C \subset H \text{ はラグランジュ錐であって，さらに条件，} \\ C \text{ の任意の方向場 } s \text{ に対し } \partial(T_sC) \subset O_s^{(2)}C, \text{を満たす．} \end{array} \right\} / \cong$$

ここで，$O_s^{(2)}C$ は $P(C)$ の s-方向の接触平面族が作る階数 3 の接分布を表す．

さらに，S-特異曲線全体は，Z の K-葉空間 (leaf space) N と同一視され，さらに N 上の錐構造 C は，Z から K-葉空間 N への射影 $\pi : Z \to N$ から誘導される制御系

$$\mathbb{C} : (\mathcal{U} =)\, L \xrightarrow{\pi_*|_L} TN \xrightarrow{\pi_{TN}} N$$

から得られ，さらには，元の接分布 (M, D) は，$\mathbb{C}$-特異曲線全体の空間上の微分式系（接分布）として復元される．

注意 4.2 G_2 型擬直積構造に付随する増大列 $\mathcal{E} \subset \partial\mathcal{E} \subset \partial^{(2)}\mathcal{E} \subset \partial^{(3)}\mathcal{E} \subset \partial^{(4)}\mathcal{E}$, から各点 $z \in Z$ で，$\mathfrak{g}_{-i} := (\partial^{(i-1)}\mathcal{E})_z/(\partial^{(i-2)}\mathcal{E})_z$ とおけば，象徴代数 (symbol algebra)

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-5} \oplus \mathfrak{g}_{-4} \oplus \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} = \langle e_6 \rangle \oplus \langle e_5 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle,$$
$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = 0, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_4] = 0, [e_1, e_5] = 0, [e_2, e_5] = e_6,$$

$\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{l} = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$ を得て，G_2 型リー代数 $\mathfrak{g} = \oplus_{-5 \le j \le 5}\, \mathfrak{g}_j$ に延長される [42, 35].

4.5 $(3,5)$-分布

$D \subset TM$ を 5 次元多様体 M 上の $(3,5)$ 分布とする．D に対して，一意的に階数 2 の部分束 $E \subset D$ が存在して，$[\mathcal{E}, \mathcal{E}] \subset \mathcal{D}$ となる [34]．実際 $SVC(D) = E$ である．したがって，D-特異曲線は，必ず E-積分曲線となり，任意の点 $x \in M$，任意の方向 $u \in P(E_x)$ に対して，$\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to M$, $\gamma(0) = x, [\gamma'(0)] = [u]$ を満たす D-特異曲線が（パラメータ変換を除いて）一意的に存在する．この階数 2 の分布 S は一般には $(2,3,5)$-分布になるとは限らないが，$(2,3,5)$-分布の場合と同様に延長 $(P(S), E)$ と（G_2-擬直積構造とは限らない）分解 $E = K \oplus L$ を構成でき，D からの付加的な情報を用いることで，D-特異曲線の空間 N （5 次元多様体）の上の接触構造 $H \subset TN$ と（非退化とは限らない）ラグランジュ錐構造 $C \subset H$ を対応させることができる．さらに，ラグランジュ錐構造を制御系 $\mathbb{C} : L \xrightarrow{\pi_*|_L} TN \xrightarrow{\pi_{TN}} N$ の $\mathbb{C}$-特異曲線のうち，付随する陪極値曲線（2 節参照）が或る制約を持つものから元々の $(3,5)$-分布 (M, D) を復元できる [15, 17]．この $(3,5)$ 分布と 5 次元接触構造の双対性は，$P(T\mathbb{P}^3)$ と $P(T^*\mathbb{P}^3)$ の間の双対性，つまり，$\mathbb{R}^4$ の旗 $V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^4$ と $V_1 \subset V_3 \subset \mathbb{R}^4$ の間の双対性である．旗の束 $V_1 \subset (V_2)_t$ から $V_1 \subset V_3$ ができ，旗の束 $V_1 \subset (V_3)_t$ から $V_1 \subset V_2$ ができることの一般化とも考えられる．

4.6 $(3,6)$-分布

$D \subset TM$ を 6 次元多様体上の $(3,6)$-分布とする．このとき，任意の $x \in M$ と任意の D に接する方向 $[u] \in P(D_x)$ に対して，（径数付けを除いて）一意的に $\gamma(0) = x, [\gamma'(0)] = [u]$ を満たす D-特異曲線 $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to M$ が存在する [34]．さらに，一般の $(3,6)$ 分布に対して，特異曲線の情報により，擬直積構造を持つ $(3,5,7,8)$-分布，$(3,5,7,8,9)$-分布および $(4,6,8)$-分布へ延長することができる：

定義 4.3 ([24]) $(3,6)$-分布の局所同型類，$B_3(2,3)$-擬直積構造を持つ $(3,5,7,8)$-分布の局所同型類，$B_3(1,2,3)$-擬直積構造を持つ $(3,5,7,8,9)$-分布の局所同型類が特異曲線に関する延長・簡約により一対一に対応する．また，$(3,6)$-分布の局所同型類，一般化された $B_3(1,3)$-擬直積構造を持つ $(3,5,7,8)$-分布の局所同型類，$B_3(1,2,3)$-擬直積構造を持つ $(3,5,7,8,9)$-分布の局所同型類についても特異曲線に関する延長・簡約により一対一に対応する．B_3 平坦な $(3,6)$ 分布から出発すれば，これらの 2 つのルートによってできる $B_3(1,2,3)$-擬直積構造を持つ $(3,5,7,8,9)$-分布の局所同型類は一致する．

さらに，特異曲線の情報から $(3,6)$-接分布の幾何（$B_3(3)$ 幾何），ラグランジュ錐構造付き 7 次元接触幾何（$B_3(2)$ 幾何）および $(2,3)$ 型不定値共形幾何（$B_3(1)$ 幾何）という 3 つの幾何学の “三すくみ” についての B_3-幾何が展開できる（待田芳徳さんとの共同研究を進行中）．

4.7 $(4,7)$-分布

この節は，文献 [34, 22] に基づく．$(4,7)$-分布は楕円型，双曲型，放物型に分類される．楕円型 $(4,7)$-分布には，定値曲線以外の特異曲線は存在しない．

定義 4.4 $D \subset TM$ が**双曲型 $(4,7)$-分布**とは，D の局所枠 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ があって，$[\xi_1, \xi_2] \equiv 0$, $[\xi_3, \xi_4] \equiv 0$, $[\xi_1, \xi_4] \equiv [\xi_2, \xi_3], \mathrm{mod}. D$ であり，$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, $\xi_5 := [\xi_1, \xi_3]$, $\xi_6 := [\xi_1, \xi_4]$, $\xi_7 := [\xi_2, \xi_4]$ が TM の局所枠となるときに言う．

命題 4.5 ([22]) (M, D) を双曲型 $(4,7)$ 分布とする．このとき，D に一意的に共形 $(2,2)$ 計量が定まり，その零錐 $C \subset D$ について，$SVC(D) = C$ となる．D-特異曲線は C-積分曲線となる．

そこで，双曲型 $(4,7)$ 分布 (M, D) に対し，C による延長 (Z, E) を，9 次元多様体 $Z := P(C) = (C \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$, $\pi : Z \to M$ を自然な射影, 階数 3 の接分布 $E \subset TZ$ を $E_{(p,[u])} := \{v \in T_{(p,[u])} \mid \pi_*(v) \in \mathbb{R}u\}$ により定める．このとき,（Z の点，つまり D の方向に依存して）E の小増大度ベクトルは，$(3,5,7,8,9)$ または $(3,5,7,9)$ となる．

定義 4.6 双曲型 $(4,7)$-分布 (M,D) が C_3 型であるとは，任意の $(p,[u]) \in Z$ における小増大度ベクトルが $(3,5,7,8,9)$ であるときに言う．

定理 4.7 ([22]) (M,D) を C_3 双曲型 $(4,7)$-分布，(Z,E) をその延長とする．このとき，階数 2 の部分束 $F \subset E$ があり，次が成り立つ：
(1) $(\pi \circ c)'(t) \neq 0$ である任意の F-積分曲線 $c: I \to Z$ は E-特異曲線であり，射影 $\pi \circ c$ は D-特異曲線となる．
(2) 任意の点 $x \in M$, 任意方向 $[u] \in P(C_x)$ に対し，D-特異曲線 $\gamma : (\mathbb{R},0) \to M$, $\gamma(0) = x, [\gamma'(0)] = [u]$ が或る E-特異曲線 $c : (\mathbb{R},0) \to (Z,(x,[u]))$ の射影として得られる．

注意 4.8 C_3 双曲型 $(4,7)$ 分布の具体例は $\mathrm{Sp}(6,\mathbb{R})$ の等質空間として，6 次元シンプレクティック・ベクトル空間の 2 次元イソトロピック・グラスマン多様体の上の標準分布として得られる．標準分布に対しては，定理 4.7 の階数 2 の分布 F の小増大度ベクトルは $(2,3,4,4,\dots)$ であり，完全可積分分布 $\partial^{(2)}(F)$ から Z 上にエンゲル葉層（各葉 L に対し $F|_L$ がエンゲル分布，4.3 節参照）が定まる．

C_3 双曲型 $(4,7)$-分布 (M,D) については，初期値，初期方向に関する D-特異曲線の一意性は成り立たない．しかし，$C = SVC(D)$ の情報を用いて C_3-幾何を展開することができる（これも共同研究として展開中）．

4.8 $(8,15)$-分布

E. カルタンは学位論文で，無限小変換のリー環が単純リー環 F_4 となるような $(8,15)$-分布を与えた（[6, 43, 40]）：
具体的に，座標系 $z, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, x_{ij} (1 \leq i < j \leq 4)$ をもつ $M = \mathbb{R}^{15}$ 上の 1 次独立な 8 個のベクトル場

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial}{\partial z} - x_2\frac{\partial}{\partial x_{12}} - x_3\frac{\partial}{\partial x_{13}} - x_4\frac{\partial}{\partial x_{14}}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial}{\partial z} + x_1\frac{\partial}{\partial x_{12}} - x_3\frac{\partial}{\partial x_{23}} - x_4\frac{\partial}{\partial x_{24}},$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial}{\partial z} + x_1\frac{\partial}{\partial x_{12}} + x_2\frac{\partial}{\partial x_{23}} - x_4\frac{\partial}{\partial x_{34}}, X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + y_4\frac{\partial}{\partial z} + x_1\frac{\partial}{\partial x_{12}} - x_2\frac{\partial}{\partial x_{13}} + x_3\frac{\partial}{\partial x_{34}},$$
$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} - y_4\frac{\partial}{\partial x_{23}} + y_3\frac{\partial}{\partial x_{24}} - y_2\frac{\partial}{\partial x_{34}}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial y_2} + y_4\frac{\partial}{\partial x_{13}} - y_3\frac{\partial}{\partial x_{14}} + y_1\frac{\partial}{\partial x_{34}},$$
$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial y_3} - y_4\frac{\partial}{\partial x_{12}} + y_2\frac{\partial}{\partial x_{14}} - y_1\frac{\partial}{\partial x_{24}}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial y_4} + y_3\frac{\partial}{\partial x_{12}} - y_2\frac{\partial}{\partial x_{13}} + y_1\frac{\partial}{\partial x_{23}},$$

によって生成される $(8,15)$ 接分布 $D \subset T\mathbb{R}^{15}$ である．F_4 のディンキン図式でルート α_4 に対応する放物型部分群の等質空間上の接分布である．

命題 4.9 ([23]) カルタンの $(8,15)$-分布 D 上の共形 $(4,4)$-計量と $D^\perp$ 上の共形 $(4,3)$-計量が一意的に存在し，零錐 $C \subset D$ が D の特異方向錐を与える：$SVC(D) = C$．さらに，$D^\perp$ 内の零空間からなる旗 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_3 \subset D^\perp \subset T^*M$ に対応する零空間の旗 $V_1 \subset V_2 \subset V_4 \subset C \subset TM$ による (M,D) の延長 (Z,E) が

$(4,7,10,13,16,18,20,21,22,23,24)$-分布となり，その象徴代数として，幂零単純リー環 F_4 が復元される．

カルタンの $(8,15)$ 分布を自然に一般化する "F_4 型" $(8,15)$-分布のクラスの特定，延長，それらの特異曲線の解明，F_4 型接触構造の共同研究，関連する E_6 型 $(16,24)$ 分布の特異曲線の共同研究も現在展開中である．

5 興味ある問題

最後に，筆者が興味を持っている問題をいくつか挙げる．

● **単純リー群に付随する接分布の研究．** 本講演内容の自然な続きとして，F_4 型，さらに E_6, E_7, E_8 型の接分布の特異曲線および付随する幾何構造の理論を展開したい．

● **大域的 $(2,3,5)$-分布の存在・分類問題．** $(2,3,5)$-分布の具体例としては，8 元数を用いて $M = S^3 \times S^2$ （$Z = S^3 \times S^3, N = S^2 \times S^3$）上に $(2,3,5)$-分布（G_2 型 $(2,3,4,5,6)$-分布，G_2 型接触分布）が構成される [25]．接触トポロジー（たとえば文献 [11]），エンゲル・トポロジー（たとえば文献 [44]）と同様に，与えられた多様体上に $(2,3,5)$-分布が存在するか否か，存在する場合には，それらの分布の空間の（適切なトポロジーに関しての）連結成分はどうなるか？と言った問題（[12, 1, 9, 10, 32] は興味深い．他のタイプの接分布に対しても同様の大域的な問題が考えられる．

● **特異曲線の局所最短性の一般的な判定法．** サブリーマン多様体 (M, D, g) に対して，接分布 D の特異曲線は局所最短線の候補となるが，それが実際に与えられた計量に関して局所最短線になるかという一般的な判定法は知られていないようである．なるべく一般的な特異曲線の局所最短性に関する判定法を見つけたい．

● **複素特異曲線の意味付けと応用．** 本稿で説明した特異曲線は，実多様体上の接分布（あるいは接錐分布，あるいは制御系）に対して定義されたが，それは拘束ハミルトン方程式により特徴付けられた（3 節を参照）．しかし，拘束ハミルトン方程式は複素多様体上でも同様に定義されるので，（制御理論的な動機付けはさておいて）複素接分布に対して，「複素特異曲線」の概念が定義される．繰り返しになるが，複素特異曲線とは，この文脈では，特異点を持つ複素曲線という意味ではなく，特異点である複素曲線，という意味である．したがって，問題は「特異点である複素曲線」ということはどういうものか，複素特異曲線の意味づけよ，ということである．筆者は，複素特異曲線は幾何学的に意味がある概念であると確信しているが満足できる答えはまだ得ていない．文献 [28] では，複素特異曲線の概念がサブリーマン計量の共形射影剛性に関するワイル型定理について有効に使われている．別のおもしろそうな応用として，（有理曲線が十分に沢山ある）単線織多様体 (uniruled manifold)，特にファノ多様体上で，（許容曲線として）有理曲線を用いて制御理論的な考察が適用できないか？という問題 [29, 13, 14] を挙げておきたい．

References

[1] 足立正久「埋め込みとはめ込み」数学選書，岩波書店 (1984).

[2] J.F. Adams, Spin(8)*, triality,* F_4 *and all that,* in the selected works of J. Frank Adams, vol. 2, ed. by J.P. May and C.B. Thomas, Cambridge Univ. Press (1992), pp. 243–253.

[3] A. Agrachev, Y. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **87**, Springer Berlin Heidelberg, (2010).

[4] R. L. Bryant, *Élie Cartan and geometric duality,* A lecture given at the Institut d'Élie Cartan on 19 June 1998.

[5] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths, *Exterior differential systems,* Mathematical Sciences Research Institute Publications **18**, Springer-Verlag, (1991).

[6] E. Cartan, *Über die einfachen Transformationsgruppen,* Berichte der mathematisch-physikalischen, Classe der Gesellschaft der Wissenschaflen zu Leipzig, Band 45 (1893), 395–420.

[7] E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les èquations aux dérivées partielles du second ordre,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), **27** (1910), 109–192.

[8] J.P. D'Angelo, J.T. Tyson, *An invitation to Cauchy-Riemann and sub-Riemannian geometry,* Notices of the AMS, **57-2**, 208–219.

[9] S. Dave, S. Haller, *On* 5*-manifolds admitting rank two distributions of Cartan type,* Trans. Amer. Math. Soc., **371-7** (2019), 4911–4929.

[10] S. Dave, S. Haller, *Graded hypoellipticity of BGG sequences,* Annals of Global Analysis and Geometry, **62** (2022), 721–789.

[11] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 165–192.

[12] M. Gromov, *Partial Differential Relations,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, **9**, Springer (1986).

[13] J.-M. Hwang, *Mori geometry meets Cartan geometry: Varieties of minimal rational tangents,* Proceedings of ICM 2014, Seoul, vol. I, pp.369–394. arXiv:1501.04720 [math.AG].

[14] J.-M. Hwang, Q. Li, *Lines on holomorphic contact manifolds and a generalization of* $(2,3,5)$*-distributions to higher dimensions,* Nagoya Math. J., **251** (2023), 652–668.

[15] 石川剛郎「$(3,5)$-分布の特異曲線を巡って」数理解析研究所講究録 2281「特異点論の展開」(2024), pp. 38–49.

[16] 石川剛郎「サブリーマン構造と接分布の特異曲線」2024 年度 日本数学会 秋季総合分科会，企画特別講演，大阪大学 豊中キャンパス (2024).

[17] G. Ishikawa, *Singular curves of* $(3,5)$*-distributions,* in preparation.

[18] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, *Legendre singularities of sub-Riemannian geodesics,* arXiv:2212.07615 [math.DG]. To appear in Journal of the Mathematical Society of Japan.

[19] G. Ishikawa, Y. Kitagawa and W. Yukuno, *Duality of singular paths for* $(2,3,5)$*-distributions,* Journal of Dynamical and Control Systems, **21** (2015), 155–171.

[20] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, *Duality on geodesics of Cartan distributions and sub-Riemannian pseudo-product structures,* Demonstratio Mathematica. **48-2** (2015) 193–216.

[21] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, A. Tsuchida, W. Yukuno, *Duality of* $(2,3,5)$*-distributions and Lagrangian cone structures,* Nagoya Math. J., **243** (2021), 303–315

[22] G. Ishikawa, Y. Machida, *Singular curves of hyperbolic* $(4,7)$*-distributions of type* C_3*,* Advanced Studies of Pure Mathematics, 89 (2025), 305-323. arXiv:2310.18739 [math.DG].

[23] G. Ishikawa, Y. Machida, *Prolongation of* $(8,15)$*-distribution of type* F_4 *by singular curves,* Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications (SIGMA), **21** (2025), 076, 20 pages. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2025.076

[24] G. Ishikawa, Y. Machida, *Prolongations of* $(3,6)$*-distributions by singular curves,* submitted. arXiv:2602.10507 [math.DG].

[25] G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, *Singularities of tangent surfaces in Cartan's split* G_2*-geometry,* Asian Journal of Mathematics, **20-2** (2016), 353–382.

[26] 泉屋周一，石川剛郎「応用特異点論」共立出版 (1998).

[27] F. Jean, *Control of Nonholonomic Systems : From Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning,* Springer Briefs in Math., Springer (2014).

[28] F. Jean, S. Maslovskaya, I. Zelenko, *On Weyl's type theorems and genericity of projective rigidity in sub-Riemannian geometry,* Geometriae Dedicata, **213** (2021), 295–314.

[29] J. Kollar, *Rational Curves on Algebraic Varieties,* Springer-Verlag (1996).

[30] W. Kryński, *Singular curves determine generic distributions of corank at least* 3*,* Journal of dynamical and control systems, **11-3** (2005), 375–388.

[31] W. Liu, H.J. Sussman, *Shortest Paths for sub-Riemannian Metrics on Rank-Two Distributions,* Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. **118**, No. **564** (1995).

[32] J. Martìnez-Aguinaga, *Existence and classification of maximal growth distributions*, arXiv:2308.10762 [math.GT].

[33] R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry,* Journal of Dynamical and Control Systems, **1-1** (1995), 49–90.

[34] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications,* Mathematical Surveys and Monographs, **91**, Amer. Math. Soc. (2002).

[35] T. Morimoto, *Geometric structures on filtered manifolds,* Hokkaido Mathematical Journals **22** (1993).

[36] T. Morimoto, *Cartan connection associated with a subriemannian structure,* Differential Geometry and its Applications, **26** (2008) 75–78.

[37] J. Petitot, *Elements of Neurogeometry, Functional Architectures of Vision,* Springer (2017).

[38] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes,* Pergamon Press (1964).

[39] L. Rifford, *Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport,* Springer Briefs in Math., Springer (2014).

[40] H. Sato, F_4*-contact structures and companions,* a lecture at the workshop "Singularities of Differentiable Maps and its Applications", Hokkaido University, 6th March 2023.

[41] H. Sato, K. Yamaguchi, *Lie tensor product manifolds,* Demonstratio Mathematica, **XLV-4** (2012), 909–927.

[42] N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras,* Hokkaido Mathematical Journal, **8** (1979), 23–84.

[43] K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras,* Advanced Studies in Pure Mathematics, **22** (1993), 413–494.

[44] T. Vogel, *Existence of Engel structures,* Annals of Mathematics, **169-1** (2009), 79–137.

[45] I. Zelenko, *Fundamental form and the Cartan tensor of* $(2,5)$*-distributions coincide,* Journal of Dynamical and Control Systems **12-2** (2006), 247–276.

本研究は JSPS 科研費 (JP19K03458, JP24K06700) からの助成，RIMS 拠点事業からの助成，および，CREST「空間識の幾何」からの助成等も受けて成されたものです.

末筆になりますが，サブリーマン幾何や接分布の理論，特異点論など様々なことについて，いままで手解き・ご教示いただいた諸先輩，同輩，後輩の方々に，ここにはお名前を挙げませんが深く感謝します.

Goo ISHIKAWA
e-mail: ishikawa@math.sci.hokudai.ac.jp