Holonomic D-modules と holomorphic map germsの特異点 II
Holonomic D-modules and singularities of holomorphic map germs II

新潟大学大学院自然科学研究科　　田島慎一*1
TAJIMA, Shinichi
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

Abstract

Singularities of finite holomorphic map germs are considered in the context of computational algebraic analysis. Holonomic D-modules associated to image surfaces of a holomorphic maps from 2-space to 3 space are studied. An effective method is proposed for computing s-parametric annihilators. The key of our approach is the concept of logarithmic vector fields. As applications, the holonomic D-modules associated to the isolated components of the singularities are determined.

1　序

本稿では, 代数解析の観点から, holomorphic map germs の特異点の解析を試みる. 計算代数解析の手法を取り入れることで, 特異点の複素解析的諸性質を解析する新たな枠組みを構築したい. この夢を実現するための第一歩として, 論文 [18] では, D. Mond が 1987 年に発表した論文 [6] に載っている $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^3$ への holomorphic map germ の標準形のうち, $S_k, B_k, C_k.F_4$ の 4 つを選んで解析した. そこで解析の対象としたのは, holomorphic map germ の像集合となる複素 2 次元の曲面に付随するホロノミー D-加群である. Poincaré-Birkhoff-Witt 代数を用いて s-parametric annihilator を求めた後, 曲面の特異点集合の孤立成分に台を持つ local cohomology の計算を行いホロノミー D-加群の構造を決定した. (埋没成分上での解析は行わなかった)

本稿では, まず対数的ベクトル場の概念に基づくことで s-parametric annihilator を構成するという新たな計算法を提案する. これにより以下の 3 種類の写像芽の解析を行う

$T_4:\ (x,y,z) = (u, uv+v^3, v^4)$

$H_k:\ (x,y,z) = (u, uv+v^{3k-1}, v^3)$

$P_3:\ (x,y,z) = (u, uv+v^3, uv^2+av^4),\ a \neq 0, 1/2, 1, 3/2$

写像芽 H_k の解析では計算をはじめる前に, 特異点集合の独立成分に対する極大独立集合を用いて, 構造環の拡大を行ってからこの独立成分に台を持つ local cohomology 類を Grothendieck symbol を用いて表現

*1 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp

できるようにしておく. この準備の後, local cohomology の満たす偏微分方程式を解くことでホロノミー D-加群の構造を求めるという手順である.

超曲面の b-関数, ホロノミー D-加群に関する基本的事項については [3, 4, 5, 18, 28] を参照されたい. Poincaré-Birkhoff-Witt 代数と s-parametric annihilator に関しては [8, 9, 14], 対数的ベクトル場については [1, 2, 10, 12, 13, 21]、local cohomology に対するネター作用素の概念等については [16, 17, 25, 26] を参照されたい.

2 対数的ベクトル場と s-parametric annihilator

この節では, まず PBW 代数を用いて得た map germ S_1 の s-parametric annihilator の性質を調べ, これらが特異点集合に沿う対数的ベクトル場であることを示す. 次に, 対数的ベクトル場の概念に注目することで, S_1 の s-parametric annihilator を構成できることを確認する.

map germ $S_1 : (x, y, z) = \varphi(u, v) = (u, v^2, v^3 + u^2 v)$ に対し

$D = \overline{\{(u, v) \mid \exists (u', v') \neq (u, v)\ s.t.\ \varphi(u, v) = \varphi(u', v')\}}$ とおく. $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 = 0\}$ である.

曲面 $S = \mathrm{Im}(\varphi) = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = x^4 y + 2x^2 y^2 + y^3 - z^2 = 0\}$ は weight vector $w = \frac{1}{6}(1, 2, 3)$ に関し weighted homogeneous である. 写像 φ による D の像は

$$\varphi(D) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y = 0, z = 0\} \subset S$$

で与えられる. 集合 $\{x\}$ はイデアル $J = (f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \subset K[x, y, z]$ の極大独立集合であり, イデアル $\mathfrak{p} = (x^2 + y, z) \subset K[x, y, z]$ は J の孤立成分である. 従って $V(J) = \varphi(D) \subset X = \mathbb{C}^3$ が成り立つ.

論文 [8, 9] にあるアルゴリズムで, PBW 代数におけるグレブナ基底計算を行い, f の s-parametric annihilator $Ann_{D[s]}(f^s)$ を求める. つぎを得る.

$$6s - x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y} - 3z\frac{\partial}{\partial z}, B = (x^2 + 3y)\frac{\partial}{\partial x} - 4xy\frac{\partial}{\partial y}$$
$$A_1 = z\frac{\partial}{\partial x} + (2xy^2 + 2x^3 y)\frac{\partial}{\partial z}, A_2 = 2z\frac{\partial}{\partial y} + (3y^2 + 4x^2 y + x^4)\frac{\partial}{\partial z}.$$

作用素 A_1, A_2 は, b-関数の計算には必要ないので, 次の 2 つの作用素 E と B に注目する.

$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z} \quad B = (x^2 + 3y)\frac{\partial}{\partial x} - 4xy\frac{\partial}{\partial y}$$

E および B は f に $E(f) = 6f,\ B(f) = 0$ と作用する. イデアル $\mathfrak{p}$ の生成元に作用させてみると

$$E(x^2 + y) = 2(x^2 + y), E(z) = 3z,\ B(x^2 + y) = 2x(x^2 + y), B(z) = 0$$

を得る. このことは, E, B が $\varphi(D) \subset \mathbb{C}^3$ に沿って対数的なベクトル場であることを意味する.

さてここで, $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 = 0\}$ に沿って対数的なベクトル場全体のなす加群 $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}^2}(-\mathrm{log}D)$ を考える. D は weighted homogeneous なので, 加群 $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}^2}(-\mathrm{log}D)$ の $\mathcal{O}_X$ 上の生成元はよく知られている. ここで ϵ, γ を次で決める.

$$\epsilon = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}, \gamma = (u^2 + v^2)\frac{\partial}{\partial u} \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}^2}(-\mathrm{log}D)$$

写像 φ によるこれら 2 つの対数的ベクトル場の像を $v_0 = \varphi'(\epsilon),\ v_1 = \varphi'(\gamma)$ とおく. 次を得る.

$$v_0 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z},\ v_1 = (x^2 + y)\frac{\partial}{\partial x} + 2xz\frac{\partial}{\partial z}$$

簡単な計算で, v_0, v_1 はともに $\varphi(D)$ に沿って対数的なベクトル場であることを確かめられる.

$$v_0, v_1 \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}^3}(-\mathrm{log}\varphi(D))$$

曲面 S の定義多項式 f への作用を計算すると, $v_0(f)=6f,\ v_1(f)=4xf$ を得る. そこで, ベクトル場 v を $v=3v_1-2xv_0$, で定めれば, v は $v(f)=0$ を満たす. 即ち, s-parametric annihilator $v\in Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ を得ることが出来た. $v=(3x^2+y)\frac{\partial}{\partial x}-4xy\frac{\partial}{\partial y}$ は偏微分作用素 B と一致する.!!

3 対数的ベクトル場と local cohomology

この節では map germ $S_k:(x,y,z)=\varphi(u,v)=(u,v^2,u^{k+1}v+v^3)$ の特異点を解析する. 前半では, 対数的ベクトル場の概念を用いることで s-parametric annihilator を構成する. 後半では, 特異点集合の孤立成分に台をもつ local cohomology 類で,s-paramettric annihilator が定める偏微分方程式系を満たすものを求めるが, s-parametric annihilator の対数的ベクトル場としての性質に着目することにより, この計算が容易になることを紹介する.

集合 $D=\overline{\{(u,v)\mid \exists(u',v')\neq(u,v)\ s.t.\ \varphi(u,v)=\varphi(u',v')\}}$ は, $D=\{(u,v)\mid u^{k+1}+v^2=0\}$ で与えられる. 写像 φ の像 $S=\mathrm{Im}(\varphi)$ は, $S=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=x^{2k+2}y+2x^{k+1}y^2+y^3-z^2=0\}$ である.

定義多項式 f は weight vector $w=\frac{1}{6(k+1)}(2,2(k+1),3(k+1))$ に関し, weighted homogeneous である. $\varphi(D)=\{(x,y,z)\mid x^{k+1}+y=0,z=0\}\subset S$ を得る. イデアル $J=(f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\subset K[x,y,z]$ は, $\mathfrak{p}=(x^{k+1}+y,z)\subset K[x,y,z]$ を孤立成分として持ち, $V(J)=\varphi(D)\subset X=\mathbb{C}^3$ が成り立つ.

さて, D に沿って対数的なベクトル場全体のなす加群 $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}^2}(-\log D)$ に注目する. 生成元として

$$\epsilon=2u\frac{\partial}{\partial u}+(k+1)v\frac{\partial}{\partial v},\ 2v\frac{\partial}{\partial u}-(k+1)u^k\frac{\partial}{\partial v},\ \gamma=(u^{k+1}+v^2)\frac{\partial}{\partial u},\ (u^{k+1}+v^2)\frac{\partial}{\partial v}$$

を得る. ここで, ϵ,γ の φ による像 $v_0=\varphi'(\epsilon),\ v_1=\varphi(\gamma)$ に注目する.

$$v_0=2x\frac{\partial}{\partial x}+2(k+1)y\frac{\partial}{\partial y}+3(k+1)z\frac{\partial}{\partial z}$$
$$v_1=(x^{k+1}+y)\frac{\partial}{\partial x}+(k+1)x^kz\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る. 簡単のため $p=x^{k+1}+y$ とおく. $\varphi(D)=V(p,z)$ と表せる. 簡単な計算で次を示せる

補題

$$v_0(p)=2(k+1)p,\ v_0(z)=3(k+1)z$$
$$v_1(p)=(k+1)x^kp,\ v_1(z)=(k+1)x^kz$$

即ち, v_0,v_1 は共に, $\varphi(D)$ に沿って対数的なベクトル場である: $v_0,v_1\in\mathcal{D}er_{\mathbb{C}^3}(-\log(\varphi(D)))$. ここで v_0,v_1 の f への作用は, $v_0(f)=6(k+1)f,\ v_1(f)=2(k+1)x^kf$ であることに注目し,

$$E=6(K+1)s-v_0,\ B=3v_1-x^kv_0$$

と定める.

命題

(i) $E,B\in Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$,

(ii) $B(p)=(k+1)x^k(p),\ B(z)=0$

これより, $\varphi(D)=\{(x,y,z)\mid x^{k+1}+y=z=0\}$ に台を持つ local cohomology 類

$$\eta=\left[\begin{array}{c}h(x)\\(x^{k+1}+y)z\end{array}\right]\in\mathcal{H}^2_{\varphi(D)}(\mathcal{O}_X),\ \text{ただし } h(x) \text{ は未知函数}$$

を考える. local cohomology 類 η は $(x^{k+1}+y)\eta=z\eta=0$ を満たす.

$$B[\begin{array}{c}1\\(x^{k+1}+y)z\end{array}]=[\begin{array}{c}-(k+1)x^k\\(x^{k+1}+y)z\end{array}],\ Bh(x)=(3(x^{k+1}+y)-2x^{k+1})\tfrac{\partial h}{\partial x}$$

より,

$$B\eta=-x^k(2x\tfrac{\partial h}{\partial x}(x)+(k*1)h(x))[\begin{array}{c}1\\(x^{k+1}+y)z\end{array}]$$

を得る. 微分方程式 $B\eta=0$ を解くことで

$$\eta=x^{-\frac{k+1}{2}}[\begin{array}{c}1\\(x^{k+1}+y)z\end{array}]$$

を得ることが出来る. この計算は [18] で与えた計算より平易である.

4 map germ T_4

map germ $T_4:(x,y,z)=\varphi(u,v)=(u,uv+v^3,v^4)$ に対し, 集合
$D=\overline{\{(u,v)\mid\exists(u',v')\neq(u,v)\ s.t.\ \varphi(u,v)=\varphi(u',v')\}}$ は $D=\{(u,v)\mid u^3+u^2v^2+uv^4+v^6=0\}$ で与えられる. $D_1=\{(u,v)\mid u+v^2=0\}, D_2=\{(u,v)\mid u^2+v^4=0\}$ により, $D=D_1\cup D_2$, $D_2=D_{2+}\cup D_{2,-}$ と分解される. 写像 φ の像集合 $S=\mathrm{Im}(\varphi)$ は

$$S=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=x^4z-2x^2z^2+4xy^2z-y^4+z^3=0\}$$

である. 定義多項式 f は weight vector $w=\frac{1}{12}(2,3,4)$ に関し, weighted homogeneous である.

$$\varphi(D_1)=\{(x,y,z)\mid y=0,x^2-z=0\}\subset S,$$

$$\varphi(D_2)=\{(x,y,z)\mid x^2+z=0,2xz-y^2=0\}\subset S$$

を得る. D に沿って対数的なベクトル場

$$\epsilon=2u\tfrac{\partial}{\partial u}+v\tfrac{\partial}{\partial v},\ \gamma=(u^3+u^2v^2+uv^4+v^6)\tfrac{\partial}{\partial u}$$

に注目し, 写像 φ による像

$$\varphi'(\epsilon)=2x\tfrac{\partial}{\partial x}+3y\tfrac{\partial}{\partial y}+4z\tfrac{\partial}{\partial z}$$

$$\varphi'(\gamma)=(x^3-xz+y^2)\tfrac{\partial}{\partial x}+(x^2y+yz)\tfrac{\partial}{\partial y}$$

をそれぞれ $v_0=\varphi'(\epsilon)$, $v_1=\varphi'(\gamma)$ で表す.

補題

$$v_0,v_1\in\mathcal{D}er_X(-\log(\varphi(D_k)),\ k=1,2$$

定義多項式 f への作用は $v_0(f)=12f$, $v_1(f)=4x^2f$ である. 作用素 E,B を $E=12s-v_0$, $B=3v_1-x^2v_0$ で定める.

$$B=(x^3-3xz+3y^2)\tfrac{\partial}{\partial x}+3yz\tfrac{\partial}{\partial y}-4x^2z\tfrac{\partial}{\partial z}$$

命題

$$E,B\in Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$$

これより, $\varphi(D_1)=\{(x,y,z)\mid y=0,x^2-z=0\}$ に台を持つ local cohomology 類を考える.

$$B(\begin{bmatrix} 1 \\ y(x^2-z) \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2z \\ y(x^2-z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x^2 \\ y(x^2-z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4z \\ y(x^2-z) \end{bmatrix}$$

より, B は $\eta = \begin{bmatrix} h(z) \\ y(x^2-z) \end{bmatrix}$ に

$$B\eta = (-4x^2 z\frac{\partial h}{\partial z} - 4zh(z))\begin{bmatrix} 1 \\ y(x^2-z) \end{bmatrix} = 4z(z\frac{\partial h}{\partial z}(z) - h(z))\begin{bmatrix} 1 \\ y(x^2-z) \end{bmatrix}$$

と作用することが分かる. 微分方程式 $B\eta = 0$ を解くことで

$$\eta = const\begin{bmatrix} z \\ y(x^2-z) \end{bmatrix}$$

を得る. $\varphi(D_2)$ での解析も同様である.

5 map germs H_k

H_k : $(x, y, z) = \varphi(u, v) = (u, uv + v^{3k-1}, v^3)$ $k = 2, 3, 4, \cdots$ を解析する. 集合 D, 像集合 S はそれぞれ

$$D = \{(u, v) \mid u^2 + uv^{3k-2} + v^{2(3k-2)} = 0\}$$

$$S = \{(x, y, z) \mid x^4 z + 3xyz^k + z^{3k-1} - y^3 = 0\}$$

で与えられる. S の定義多項式 f は weight vector $w = \frac{1}{3(3k-1)}(3k-2, 3k-1, 3)$ に関し weighted homogeneous である. $\varphi(D) = \mathrm{Sing}(S)$ が成り立つが, その定義イデアル $\mathfrak{p}$ は次で与えられる.

$$\mathfrak{p} = (xy + z^{2k-1}, yz^{k-1} + x^2, y^2 - xz^k) \subset K[x, y, z]$$

Remark イデアル $\mathfrak{p}$ の生成元の個数が 3 であり, $V(\mathfrak{p})$ の codimension の値 2 より大きい. そのため, これら 3 個の生成元では, Grothendieck symbol を使って local cohomology 類を表すことが出来ない. 解析を遂行する為には, この困難に対応する必要がある

さて, $D = \{(u, v) \mid u^2 + uv^{3k-2} + v^{2(3k-2)} = 0\}$ に沿って対数的なベクトル場のなす加群 $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}^2}(-\log(D))$ から

$$\epsilon = (3k-2)u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v},\ \gamma = (u^2 + uv^{3k-2} + v^{2(3k-2)})\frac{\partial}{\partial u}$$

を選び, 写像 φ による像 $v_0 = \varphi'(\epsilon)$, $v_1 = \varphi'(\gamma)$ を考える. 次をえる.

$$v_0 = (3k-2)x\frac{\partial}{\partial x} + (3k-1)y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$v_1 = (x^2 + yz^{k-1})\frac{\partial}{\partial x} + (xy + z^{2k-1})\frac{\partial}{\partial y}$$

イデアル $\mathfrak{p}$ の生成元を, g_1, g_2, g_3 で表すことにする.

$$g_1 = xy + z^{2k-1}, g_2 = yz^{k-1} + x^2, g_3 = y^2 - xz^k$$

次を得る.

補題

$$v_0(g_1) = (6k-3)g_1, v_0(g_2) = (6k-4)g_2, v_0(g_3) = (6k-2)g_3$$

$$v_1(g_1) = 2xg_1 + z^{k-1}g_3, v_1(g_2) = z^{k-1}g_1 + 2xg_2, v_1(g_3) = yg_1 + xg_3$$

従って, v_0, v_1 は共に, $\varphi(D)$ に沿って対数的なベクトル場である: $v_0, v_1 \in \mathcal{D}er_X(-\log(\varphi(D)))$

定義多項式 f への作用は $v_0(f)=3(3k-1)f,\ v_1(f)=3xf$, であるので $((3k-1)v_1-xv_0)(f)=0$ を満たす．偏微分作用素 E,B を $E=3(3k-1)s-v_0,\ B=(3k-1)v_1-xv_0$ で定める．

$$B=(x^2+(3k-1)yz^{k-1})\frac{\partial}{\partial x}+(3k-1)z^{2k-1}\frac{\partial}{\partial y}-3xz\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る．次が成り立つ．

命題

$$E,B\in Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$$

これより，$\varphi(D)=V(\mathfrak{p})$ 上での解析をはじめる．イデアル $\mathfrak{p}=(g_1,g_2,g_3)$ は生成元を 3 つ持っている．

$$g_1=xy+z^{2k-1},g_2=yz^{k-1}+x^2,g_3=y^2-xz^k$$

構造環 $K[x,y,z]$ を拡大し $\mathfrak{p}$ の拡大 $\mathfrak{p}^e=K(x)[y,z]\mathfrak{p}$ を考える．拡大 $\mathfrak{p}^e\subset K(x)[y,z]$ は, つぎの 2 つの多項式で生成されることが分かる．

$$p_1=xy+z^{2k-1},p_2=z^{3k-2}-x^3,$$

p_1,p_2 と g_1,g_2,g_3 はつぎの関係を満たしている

$$g_1=p_1,\ xg_2=z^{k-1}p_1-p_2,\ x^2g_3=-z^{2k-1}p_1+z^kp_2$$

この p_1,p_2 を使えば $V(\mathfrak{p})-\{(0,0,0)\}$ 上で local cohomology 類を扱うことが可能になる．

$$\eta=\left[\begin{array}{c}h(x)\\p_1p_2\end{array}\right]$$

とおけばよい．作用素 B はすこし複雑な形をしているので, 計算を始める前にすこし準備をしておく．

準備その 1 $B(p_1)=a_1p_1+a_2p_2,\ B(p_2)=b_1p_1+b_2p_2$ とする．次が成り立つ．

$$B(\left[\begin{array}{c}1\\p_1p_2\end{array}\right])=\left[\begin{array}{c}-a_1-b_2\\p_1p_2\end{array}\right]$$

証明

$$B(\left[\begin{array}{c}1\\p_1p_2\end{array}\right])=\left[\begin{array}{c}-B(p_1)\\p_1^2p_2\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}-B(p_2)\\p_1p_2^2\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c}-a_1p_1-a_2p_2\\p_1^2p_2\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}-b_1p_1-b_2p_2\\p_1p_2^2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}-a_1-b_2\\p_1p_2\end{array}\right]$$

準備その 2 $B=(x^2+(3k-1)yz^{k-1})\frac{\partial}{\partial x}+(3k-1)z^{2k-1}\frac{\partial}{\partial y}-3xz\frac{\partial}{\partial z}$ に対し

$x^2+(3k-1)yz^{k-1}=c_0+c_1p_1+c_2p_2$ とおく．このときつぎが成り立つ．

$$\left[\begin{array}{c}B(h)\\p_1p_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}c_0\frac{\partial h}{\partial x}(x)\\p_1p_2\end{array}\right]$$

これらより

$$B(\left[\begin{array}{c}h(x)\\p_1p_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}c_0\frac{\partial h}{\partial x}(x)-(a_1+b_2)h(x)\\p_1p_2\end{array}\right]$$

を得る．

さて,

$B(p_1) = a_1p_1 + a_2p_2,\ a_1 = (-3k+2)x + (3k-1)\frac{1}{x}yz^{k-1},\ a_2 = (-3k+1)\frac{1}{x}y$

$B(p_2) = b_1p_1 + b_2p_2,\ b_1 = -3(3k-1)xyz^k,\ b_2 = 3x$

より

$-a_1 - b_2 = 6(k-1)x,\ \mathrm{mod}\ \ (p_1, p_2)$

他方

$x^2 + (3k-1)yz^{k-1} = c_0 + c_1p_1 + c_2p_2,\ c_0 = (-3k+1)x^2,\ c_1 = (3k-2)\frac{1}{x}z^{k-1}\ c_2 = (3k+2)\frac{1}{x}$

であるから,

$$B([\begin{array}{c} h(x) \\ p_1p_2 \end{array}]) = [\begin{array}{c} c_0\frac{\partial h}{\partial x}(x) - (a_1+b_2)h(x) \\ p_1p_2 \end{array}] = [\begin{array}{c} (-3k+1)x^2\frac{\partial h}{\partial x}(x) + 6(k-1)xh(x) \\ p_1p_2 \end{array}]$$

を得るので (途中で計算間違いをしていなければ), 次の微分方程式を解くことで local cohomology 解を得ることが出来る.

$(-3k+1)x^2\frac{\partial h}{\partial x}(x) + 6(k-1)xh(x) = 0$

6 map germ P_3

この節では, map germ $P_3 : (x, y, z) = \varphi(u, v) = (u, uv + v^3, uv^2 + av^4)$ の解析を行う.

$D = \overline{\{(u, v) \mid \exists(u', v') \neq (u, v)\ s.t.\ \varphi(u, v) = \varphi(u', v')\}}$ は, $D = \{(u, v) \mid d(u, v) = 0\}$ で与えられる. ただし $d(u, v) = (a-1)^2u^3 + (a^2-a+1)u^2v^2 + (a^2+a)uv^4 + a^2v^6$ である. $a \neq 1,\ \frac{1}{2}$ のとき $D = D_1 \cup D_2$, と分解される. ここで D_1, D_2 は次である.

$$D_1 = \{(u, v) \mid u + v^2 = 0\},\ \ D_2 = \{(u, v) \mid (a-1)^2u^2 + auv^2 + a^2v^4 = 0\}.$$

像 $S = \mathrm{Im}(\varphi) = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$ の定義多項式 f は, 次である.

$$f(x, y, z) = (a-1)^2x^4z - (a-1)^2x^3y^2 - 2(a-1)x^2z^2 + (4a^2-3a)xy^2z - a^3y^4 + z^3.$$

多項式 f は weight vector $w = \frac{1}{12}(2, 3, 4)$ に関し weighted homogeneous である. 写像 φ による, D_1, D_2 の像は

$$\varphi(D_1) = \{(x, y, z) \mid y = 0, (a-1)x^2 - z = 0\} \subset S,$$

$$\varphi(D_2) = \{(x, y, z) \mid (a-1)^2x^2 + az = 0, (2a-1)xz - a^2y^2 = 0\} \subset S$$

となる. D に沿って対数的なベクトル場のなす加群 $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}^2}(-\log(D))$ から

$$\epsilon = 2u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v},\ \ \gamma = d\frac{\partial}{\partial u}$$

を選び, φ による像 $v_0 = \varphi'(\epsilon),\ v_1 = \varphi'(\gamma)$ を考える.

$$v_0 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 4z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$v_1 = ((a-1)^2x^3 - (a-1)xz + a^2y^2)\frac{\partial}{\partial x} + ((a-1)^2x^2y + ayz)\frac{\partial}{\partial y} + (-(a-1)x^2z + a(a-1)xy^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る. 次が成立する

補題

$v_0, v_1 \in \mathcal{D}er_X(-\log(\varphi(D_i))),\ \ i = 1, 2.$

定義多項式 f への作用そ計算すると

$$v_0(f) = 12f,\ v_1(f) = ((a-1)(4a-5)x^2 + 3z)f$$

を得る. 作用素 E, B を $E = 12s - v_0, B = 12v_1 - ((a-1)(4a-5)x^2 + 3z)v_0$ で定める.

$$B = (2(a-1)(2a-1)x^3 + 12a^2y^2 - 6(2a-1)xz)\frac{\partial}{\partial x} + (3(a-1)x^2y + 3(4a-3)yz)\frac{\partial}{\partial y} + (12a(a-1)xy^2 - 8(a-1)(2a-1)x^2z)\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る. 次がなりたつ

命題

$$E, B \in Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$$

微分作用素 B を用いて, $\varphi(D_1), \varphi(D_2)$ 上 local cohomology 解を求め, その weighted degree を調べれば (あるいは, オイラー作用素 E を用いれば), b-関数の根の値が分かる.

まず, $\varphi(D_1) = V(p_1, p_2),\ p_1 = y, p_2 = (a-1)x^2 - z$ とする. このとき

$$v_0(p_1) = 3p_1, v_0(p_2) = 4p_2,\ v_1(p_1) = ((a-1)^2x^2 + az)p_1,$$

$$v_1(p_2) = a(a-1)(2a-1)xyp_1 + (2(a-1)x^2 + z)p_2$$

より、

$$B(p_1) = a_1p_1 + a_2p_2,\ B(p_2) = b_1p_1 + b_2p_2$$

の係数 a_1, a_2, b_1, b_2 を求め

$$B(\left[\begin{array}{c} 1 \\ p_1p_2 \end{array}\right]) = \left[\begin{array}{c} -a_1 - b_2 \\ p_1p_2 \end{array}\right]$$

を準備しておく. 次に微分作用素 B の $\frac{\partial}{\partial x}$ の係数に注目する.

$$2(a-1)(2a-1)x^3 + 12a^2y^2 - 6(2a-1)xz = -4(a-1)(2a-1)x^3 + 12a^2yp_1$$

より

$$B(\left[\begin{array}{c} h(x) \\ p_1p_2 \end{array}\right]) = (-4(a-1)(2a-1)x^3\frac{\partial h}{\partial x}(x) - (a_1 + b_2)h(x))\left[\begin{array}{c} 1 \\ p_1p_2 \end{array}\right]$$

を計算できる. 微分方程式 $(-4(a-1)(2a-1)x^3\frac{\partial h}{\partial x}(x) - (a_1+b_2)h(x)) = 0$ を解くことで, local cohomology 解を得ることが出来る. ここでは, 詳細は略したい

$\varphi(D_2)$ での解析も同様である.

いづれの問題も, 曲面 S の 1 次元の特異点集合上の確定特異点型常微分方程式の問題に帰着されたことに注意されたい. これらの常微分方程式の monodromy 構造は, D. Siersma が導入した vertical monodromy に対応した概念である.

参　考　文　献

[1] A. G. Aleksandrov, Cohomology of a quasihomogeneous complete intersection, Math. USSR Izv. **20** (1986), 437-477

[2] J. W. Bruce and R. M. Robert, Critical points of functions on an analytic varieties, Topology **27** (1988), 57-90

[3] 柏原正樹, b-函数と超曲面の特異性, 京都大学数理解析研究所講究録, **225** (1975), 16-53.

[4] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined system of linear differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974–1975) 563–579.

[5] M. Kashiwara, b-functions and holonomic systems,: rationalityof roots of b-functions, Invent. math. **38** (1976), 33-53.

[6] D. Mond, Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space, Topology **26** (1987), 361-383.

[7] D. Mond, The number of vanishing cycles for a quasihomogeneous mappings from C^2 to C^3, Quart. J. Math. **42** (1991), 335-345.

[8] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions, Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM (2016), 349–356.

[9] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in PBW algebra, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules, J. Symbolic Computation **89** (2018), 146–170.

[10] K. Nabeshima and S. Tajima, A new algorithm for computing logarithmic vector fields along an isolated singularity and Bruce-Roberts Milnor ideals, Journal of Symbolic Computation **107** (2021), 190–208.

[11] K. Nabeshima and S. Tajima, Effective algorithm for computing Noetherian operators of positive dimensional ideals, Lecture Notes in Computer Science **14139**, Springer (2023), 272-291.

[12] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA, Math. **27** (1980), 265-291

[13] S. Tajima, On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules, RIMS Kokyuroku Bessatsu **40** (2013), 41–51.

[14] 田島慎一, D. Siersma の非孤立特異点に付随する D-加群と Poincaré-Birkhoff-Witt 代数, 京都大学数理解析研究所講究録,**2054** (2018), 126–133.

[15] S. Tajima, Local cohomology solutions of holonomic D-modules associated with non-isolated hypersurface singularities, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **75** (2019), 61–72.

[16] 田島慎一, Local cohomology に対するネター作用素とホロノミー D-加群, 京都大学数理解析研究所講究録, **2280** (2024), 176-185.

[17] S. Tajima, Holonomic D-modules and Noetherian differential operators for local cohomology classes associated to primary ideals, 第 45 回可換環論シンポジウム報告集, 2024.

[18] 田島慎一, Holonomic D-modules と holomorphic map germs の特異点, 京都大学数理解析研究所講究録, **2319** (2025), 45-59

[19] 田島慎一, Local cohomology に対するネター作用素とホロノミー D-加群 II, 京都大学数理解析研究所講究録, 投稿済.

[20] S. Tajima, K. Nabeshima, K. Ohara and Y. Umeta, Computing holonomic D-modules associated to a family of non-isolated hypersurface singularities via comprehensive Gröbner systems of PBW algebra, Mathematics in Computer Science **17** (2023), 315-337.

[21] S. Tajima, T. Shibuta and K. Nabeshima, Computing logarithmic vector fields along an ICIS germ via Matlis duality, Lecture Notes in Computer Science **12291** (2020), 543–562.

[22] S. Tajima and Y. Umeta, Computing structure of holonomic D-modules associated with a simple line singularity, RIMS Kôkyûroku Bessatsu. **57** (2016), 125–140.

[23] S. Tajima and Y. Umeta, Holonomic D-modules associated with a simple line singularity and the vertical monodromy, Funkcialaj Ekvacioj, **64** (2021), 17–48.

[24] S. Tajima and Y. Umeta, Algebraic analysis of Siersma's non-isolated hypersurface singularities, Hokkaido Math. Journal **51** (2022), 117–151.

[25] S. Tajima and Y. Umeta, Holonomic D-modules and Noetherian differential operators associated to a primary ideal, http://sites.google.com/view/pmaaa2024/home, 2024.

[26] S. Tajima, Y. Umeta and K. Nabeshima, Noetherian operators for local cohomology classes and holonomic D-modules associated with non-isolated hypersurface singularities, Advanced Studies in Pure Math. **89** (2025), 425-454

[27] U. Walther, Survey on the D-module f^s, in Commutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry I, MSRI Pub. **67** 2015.

[28] T. Yano, On the theory of b-functions, Pub. Res. Inst. Math. Sci. **14** (1978) 111–202.