Topology of boundary special generic maps

九州大学 マス・フォア・イノベーション連係学府　岩倉康樹

Koki Iwakura
Joint Graduate School of Mathematics for Innovation,
Kyushu University

概 要

本稿では, [9] で得られた結果を紹介する。まず, boundary special generic map と呼ばれる境界付き多様体上の写像について, その存在と定義域多様体の微分同相類との関係に関する結果を紹介する。さらに, それらを応用して得られた, special generic map の非特異拡張に関する結果も紹介する。

1　導入

可微分写像の特異点論では, 写像の微分が退化する定義域多様体の点である特異点を研究対象とする。特異点は局所的に定義される対象であるにもかかわらず, 多様体の大域的構造と深く関わることが, これまでの先行研究において明らかにされてきた。とりわけ, 閉多様体上の写像については, 特異点の型やその位置が定義域多様体の構造に強い制約を与えることが明らかになっている。一方で, 境界付き多様体上の写像に関しては, このような理解はまだ十分ではない。その一因は, 境界付き多様体上の写像を扱う際には, 与えられた写像自身の特異点に加えて, 境界への制限が持つ特異点も同時に扱う必要があることにある。そこで著者は, [9] において, 境界付き多様体上の写像のうち特異点が最も素朴な型に属するものとして boundary special generic map を導入し, その性質を研究した。これは Shibata [18] によりコンパクト, 連結な向き付け可能 3 次元多様体に対して定義されたものの一般化である。関数の場合, これは内部に特異点を持たず, 境界への制限の特異点は元の関数の極大点と極小点であるような, 極めて単純な状況を表している。さらに, そのような写像の存在が, 定義域である境界付き多様体の大域的構造に与える影響について, いくつかの結果を得た。本稿の第 2 節では特異点論の基本用語を導入し, 第 3 節では boundary special generic map に関する結果を述べる。

さらに, ここで得られた結果は写像の非特異拡張問題にも応用される。この問題は, 閉多様体上の写像が, ある境界付き多様体上の特異点を持たないような写像, すなわち沈め込みに拡張できるかどうかを問うものである。この問題は Curley [2], Seigneur [17], Iwakura [7, 8] らによって研究されてきた。このほかにも関連する研究がいくつも存在する。しかし, 既存の方法は, 与えられた写像の定義域と値域の次元に強く依存している。本稿では, 拡張を

考える写像を special generic map という特別なクラスの写像に制限することにより, 様々な次元の多様体間の写像に対する非特異拡張の結果を得る。第 4 節では, それらの結果を紹介する。

本稿では, 多様体および写像は全て C^∞ 級であるとする。また, $\cong$ で多様体間の微分同相を表すものとする。さらに, Diff(M) は M の自己微分同相写像全体からなる群を表す。ただし, M が境界付き多様体である場合にも, 境界への制限に条件は設けない。

2　基本事項の復習

本節では, 本稿で用いる写像の特異点論に関する用語を復習する。以下, M を m 次元多様体, K を k 次元多様体とし, $f\colon M \to K$ を写像とする。また $m \geq k \geq 1$ を仮定する。詳細は [4, 13] を参照されたい。

定義 2.1 (特異点). $p \in M$ が f の**特異点**であるとは, $\operatorname{rank} df_p < k$ を満たすことをいう。一方, $\operatorname{rank} df_p = k$ であるとき, p を f の**正則点**という。特に, M のすべての点が f の正則点であるとき, f を**沈め込み**という。

写像 f の特異点全体からなる M の部分集合を $S(f)$ で表す。すなわち,

$$S(f) = \{p \in M \mid \operatorname{rank} df_p < k\}$$

である。この集合を f の**特異点集合**という。次に, 写像の各ファイバーの連結成分を一点に潰して得られる位相空間である Reeb 空間を導入する。

定義 2.2 (Reeb 空間). $x, y \in M$ に対して, 次で定まる M 上の関係を考える：

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \text{ かつ } x, y \text{ は } f^{-1}(f(x)) \text{ の同じ連結成分に含まれる。}$$

この $\sim$ は M 上の同値関係になる。このとき, 商空間 $W_f := M/\sim$ を f の **Reeb 空間**という。W_f は商位相により位相空間となる。このとき, 連続写像 $\bar{f}\colon W_f \to K$ であって,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_f"'] & K \\ W_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものがただ一つ存在する。この写像 $\bar{f}$ を f の **Reeb 写像**という。ここで, $q_f\colon M \to W_f$ は商写像である。

3　Boundary special generic map について

本節では boundary special generic map の定義を導入したのち, その性質について得られた結果を紹介する。以下, N をコンパクト, 連結な境界付き n 次元多様体, K を k 次元開多様体とし, $F\colon N \to K$ を写像とする。また, $n > k \geq 1$ を仮定する。

3.1 Boundary special generic map の定義

まず, 本稿の主役である boundary special generic map の定義を述べる。

定義 3.1. 点 $p \in \partial N$ が F の **boundary definite fold point** であるとは, p 周りの N の局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ と $F(p)$ 周りの K の局所座標 $(y_1, \ldots, y_k)$ が存在し, これらの座標を用いて

$$F; (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_k) = \left(x_1, \cdots, x_{k-1}, \sum_{i=k}^{n-1} x_i^2 + x_n\right),$$

と表せることをいう。ここで, $x_n > 0$ と $x_n = 0$ はそれぞれ $\mathrm{Int}\, N$ と ∂N に対応している。特に, 沈め込み F について $S(F|_{\partial N})$ の点が全て F の boundary definite fold point であるとき, F を **boundary special generic map** という。

本稿および [9] で扱う boundary special generic map の値域 K は, 全て Euclid 空間 $\mathbb{R}^k$ であることに注意する。

注意 3.2. 定義から分かるように, boudnary definite fold point は F 自身の特異点ではない。一方, これは $F|_{\partial N}$ の特異点であり, 特にその boundary definite fold point である。したがって, boundary special generic map F の境界への制限 $F|_{\partial N}$ は special generic map である。Boundary definite fold point および special generic map の定義については, 定義 4.1 を参照されたい。この関係は第 4 節で本質的に用いられる。

次に, boundary special generic map の具体例を 2 つ紹介する。

例 3.3. 図 1 に描かれている $F_1 \colon D^2 \to \mathbb{R}$ は D^2 上の高さ関数である。この関数は沈め込みである。一方, 境界 $\partial D^2 = S^1$ への制限 $F_1|_{S^1}$ の特異点集合 $S(F_1|_{S^1})$ は, 図 1 で赤点として描かれているように, S^1 の北極と南極である。また, その各点の近傍で, F は定義 3.1 の局所表示を持つ。したがって, F_1 は boundary special generic map である。

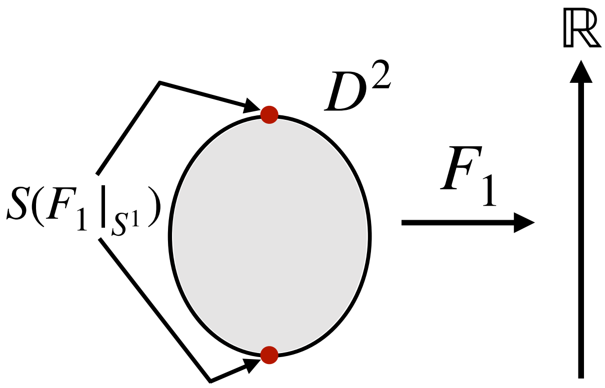

図 1: Boundary special generic map $F_1 \colon D^2 \to \mathbb{R}$ と $F_1|_{S^1}$ の特異点集合。

例 3.4. 図 2 に描かれている $F_2 \colon S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^2$ は, 自然な射影 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を, $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた $S^1 \times D^2$ へ制限して得られる写像である。このとき, F_2 は沈め込みである。さらに, 図中で赤い線で描かれている $F_2|_{S^1 \times S^1}$ の特異点集合 $S(F_2|_{S^1 \times S^1})$ の各点の近傍で, F_2 は定義の局所表示を持つ。したがって, F_2 は boundary special generic map である。

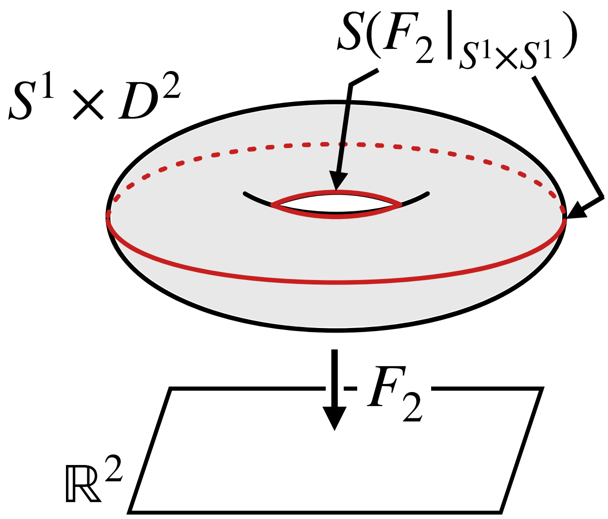

図 2: Boundary special generic map $F_2 \colon S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}$ と $F_2|_{S^1 \times S^1}$ の特異点集合。

また, boundary special generic map の Reeb 空間の性質を述べた次の命題も, 後の主定理を述べる上で重要となるので, ここで紹介しておく。これは [9, Proposition 2.6] である。

命題 3.5. *$F \colon N \to \mathbb{R}^k$ を boudary special generic map とする。このとき, その Reeb 空間 W_F はコンパクト, 連結, 向き付け可能な k 次元境界付き多様体である。さらに, Reeb 写像 $\bar{F} \colon W_F \to \mathbb{R}^k$ ははめ込みであり, 商写像 $q_F \colon N \to W_F$ は C^∞ 級写像である。また, $q_F|_{S(F|_{\partial N})} \colon S(F|_{\partial N}) \to \partial W_F$ は微分同相写像である。*

この命題で最も重要なことは, 一般には多様体と限らない Reeb 空間が, boundary special generic map に対しては多様体になるという点である。

3.2 Boundary special generic map に関する結果

以上の準備を踏まえて, [9] の主定理を紹介する。これらは Euclid 空間への boundary special generic map を許容する境界付き多様体の微分同相類に関する結果である。以下でその要点を述べるが, 詳しい証明は [9] を参照されたい。

まず, 値域が $\mathbb{R}$（$k = 1$）, すなわち関数のときの結果を紹介する。

定理 3.6. *N が $\mathbb{R}$ への boudnary special generic map を許容することと, N が D^n に微分同相であることは同値である。*

この結果は, Reeb の球面定理の境界付き多様体版とみなせる結果である。その証明には [6, 19] による円板の微分同相群に関する結果および h-コボルディズム定理 [11] が用いられる。

次に, 値域が $\mathbb{R}^2$（$k = 2$）である場合の結果を紹介する。

定理 3.7. *N が $\mathbb{R}^2$ への boundary special generic map を許容することと, N が S^1 上の D^{n-1}-束の有限個の境界和に微分同相であることは同値である。ただし, 0 個の境界和は D^n とする。*

この結果は Shibata [18] によりコンパクト, 連結, 向き付け可能な 3 次元多様体に対して得られていた結果の一般化である。必要条件の証明は, Reeb 空間として現れる境界付き曲面の自然なハンドル分解と, それから q_F により誘導される N のハンドル分解を精査することで与えられる。十分条件の証明は, 具体的に boundary special generic map を構成することで完了する。

次に, 値域が $\mathbb{R}^3$（$k=3$）の場合の結果を紹介する。

定理 3.8. $n \neq 6, 7$ とする。N が $\mathbb{R}^3$ への *boundary special generic map* を許容するとき, N は S^2 上の D^{n-2}-束の有限個の境界和に微分同相である。ただし, 0 個の境界和は D^n とする。

ここでは $n = 6, 7$ を仮定しているが, 特異点集合の成分数に制約を課すことで類似の結果が得られる。[9, Remark 2.8] を参照されたい。さらに, この定理では定理 3.6 と定理 3.7 と異なり, 十分条件は与えられてない。実際, 特別な場合を除いて, S^2 上の D^{n-2}-束から $\mathbb{R}^3$ への boudary special generic map は構成できていない。[9, Remark 2.9] を参照されたい。証明の方針は定理 3.7 と同様であり, Reeb 空間とその商写像から誘導される N のハンドル分解を調べることで与えられる。

最後に, 値域がより一般に $\mathbb{R}^k$（$k \geq 5$）である場合の結果を紹介する。

定理 3.9. $n \geq 6$, $n-k=1$ を仮定する。このとき, N が $\mathbb{R}^k$ への可縮な *Reeb* 空間を持つ *boundary special generic map* を許容することと, N が D^n に微分同相であることは同値である。

必要条件の証明には, boundary special generic map から誘導される境界付き多様体の分解 [9, Lemma 2.10] を用いる。この分解では, 境界の写像の特異点集合の近傍と, そのような特異点に由来しない部分とに分けて考える。これは, m-関数や境界付き多様体上の Morse 関数から誘導される境界付き多様体の（半）ハンドルによる分解 [1, 5, 10] の, boundary special generic map への拡張とみなすことができる。実際, 関数の場合には一致する概念であることもわかる。十分条件は, 具体的に写像を構成することで示される。$k=4$ の場合や $n-k$ に制約を設けない場合にも, 上述のように綺麗な結果でないにせよ, いくつかの結果が得られている。その際にも, 上で言及した boundary special generic map に由来する境界付き多様体の分解が用いられる。例えば, [9, Proposition 2.14], [9, Proposition 2.15] を参照されたい。

4　非特異拡張について

本節では, まず special generic map および非特異拡張の定義を導入する。その後, special generic map の非特異拡張に関して得られた結果を紹介する。以下, M を連結な m 次元閉多様体, K を k 次元開多様体, $f\colon M \to K$ を写像とする。ここで, $m \geq k \geq 1$ を仮定する。

4.1 Special generic map の定義

まず, special generic map の定義を復習する。その定義や詳しい性質については [12, 14, 15] を参考にされたい。

定義 4.1 (**Special generic map**)**.** 点 $p \in M$ が f の **definite fold point** であるとは, p 周りの M の局所座標 $(x_1, \ldots, x_m)$ と $f(p)$ 周りの K の局所座標 $(y_1, \ldots, y_k)$ が存在して, これらを用いて f が

$$f; (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_k) = \left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \sum_{i=k}^{m} x_i^2\right)$$

と表せることをいう。特に, f の任意の特異点が definite fold point であるとき, f を **special generic map** という。

本稿で取り扱う special generic map の値域 K は Euclid 空間 $\mathbb{R}^k$ である。また, 特に関数の場合（$k = 1$）には, special generic map は極大点と極小点のみを特異点として持つような極めて単純な関数である。

4.2 非特異拡張の定義

次に, 非特異拡張の定義を復習する。

定義 4.2 (**非特異拡張**)**.** コンパクト, 連結な境界付き $(m+1)$ 次元多様体 N で境界が M であるものと, 沈め込み $F\colon N \to K$ で

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & K \\ N, \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在するとする。ここで, i は包含写像である。このとき, F を f の**非特異拡張**という。

4.3 Special generic map の非特異拡張に関する結果

では, special generic map の非特異拡張について得られた結果を紹介する。注意 3.2 で述べたように, boudary special generic map の境界への制限は special generic map である。この点に注意することで, 定理 3.6, 定理 3.7, 定理 3.8, 定理 3.9 を用いて, special generic map の非特異拡張に関する結果が得られる。

まず, 値域が $\mathbb{R}$（$k = 1$）である special generic map の非特異拡張に関して得られた結果を紹介する。

系 4.3. *$f\colon M \to \mathbb{R}$ を special generic map とする。このとき, f が非特異拡張を持つことと, M が S^m に微分同相であることは同値である。*

これは定理 3.6 と Seigneur [17] による結果を用いることで証明される。先行研究によって, 閉多様体 M が $\mathbb{R}$ への special generic map を許容することと, (i) $M \cong S^n$ $(n \leq 6)$, (ii) M はホモトピー球面 $(n \geq 7)$, であることが知られている。一方, この系により, エキゾチック球面上の $\mathbb{R}$ への special generic map は非特異拡張を持たないことが分かる。すなわち, このような写像の拡張を考えたときに, その拡張は特異点を持たざるを得ない。

以下では, この観点から得られる系をいくつか紹介する。次に, 値域が $\mathbb{R}^2$（$k = 2$）である special generic map の非特異拡張に関して得られた結果を紹介する。

系 4.4. Σ^m および $(S^1 \times S^{m-1}) \sharp \Sigma^m$ から $\mathbb{R}^2$ への *special generic map* は, *boundary special generic map* を非特異拡張として持たない。ここで, Σ^m は m 次元エキゾチック球面であり, $m \geq 7$ である。

Saeki [12] によって, Σ^m や $(S^1 \times S^{m-1}) \sharp \Sigma^m$ は $\mathbb{R}^2$ への special generic map を許容することが知られている。この系が主張するのは, そのような special generic map たちが boudary special generic map を非特異拡張として持たないということである。一方で, boundary special generic map でない単なる非特異拡張をこれらの写像が持つかどうかは, まだわかっていない。この系の証明は, 定理 3.7 と Schultz による $S^1 \times S^{m-1}$ の慣性群の計算結果 [16] を用いる。

次に, 値域が $\mathbb{R}^3$（$k = 3$）である special generic map の非特異拡張に関して得られた結果を紹介する。

系 4.5. 連結, 既約な 3 次元閉多様体で, 非巡回基本群を持つものから $\mathbb{R}^3$ への *special generic map* は, 定義域が単連結である *boundary special generic map* を非特異拡張として持たない。

Eliashberg [3] によって, 向き付け可能な 3 次元閉多様体は $\mathbb{R}^3$ への special generic map を持つ。上の主張は, いくつかの制約のもとで, 単連結な定義域を持つ boudary special generic map を非特異拡張として持たないことを述べている。一方で, この結果も boundary special generic map でない単なる非特異拡張については何も述べていない。この証明は, 定理 3.8 とレンズ空間に関する基本的な性質を用いて行われる。この結果は $m = 3$ の場合を扱っているが, 定理 3.8 周辺の結果を用いることで, m がより一般の場合の結果も得られる。[9, Proposition 3.12] および [9, Proposition 3.13] を参照されたい。さらに, 上の結果を用いて Brieskorn 多様体から $\mathbb{R}^3$ への special generic map の非特異拡張に関する結果も得られている [9, Corollary 3.14]。

最後に, より一般の次元の値域を持つ special generic map の非特異拡張に関する結果を紹介する。

系 4.6. Σ^m から $\mathbb{R}^m$ への *special generic map* は, 可縮な *Reeb* 空間を持つ *boundary special generic map* を非特異拡張として持たない。ここで, Σ^m はエキゾチック球面であり, $m \geq 7$ とする。

Σ^m から $\mathbb{R}^m$ への special generic map は Eliashberg [3] により存在する。上の主張は, Reeb 空間が可縮であるような boudary special generic map を, この写像が非特異拡張として持たないことを述べている。一方で, これらの条件を外した単なる非特異拡張を持つかどうかは, まだ分かっていない。この系の証明は, 定理 3.9 を直接用いて行われる。

謝辞

著者は九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラムの支援を受けている。また, JSPS KAKENHI Grant Number JP23H05437 に部分的な援助を受けている。

参考文献

[1] M. Borodzik, A. Némethi, A. Ranicki, *Morse theory for manifolds with boundary*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), 971–1023.

[2] C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology (1) **16** (1977), 89–97.

[3] Ja. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR-lzv. **4** (1970), 1119–1134.

[4] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., Vol. **14**, Springer, New York-Heidelberg (1973).

[5] B. Hajduk, *Minimal m-functions*, Fund. Math. **111** (1981), 179–200.

[6] A. E. Hatcher, *A proof of the Smale conjecture,* $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq \mathrm{O}(4)$, Ann. of Math. (2) **3** (1983), 553–607.

[7] K. Iwakura, *Non-singular extensions of circle-valued Morse functions*, Advanced Studies in Pure Mathematics "Deepening and Evolution of Applied Singularity Theory" (2026), 325–339.

[8] K. Iwakura, *Non-singular extensions of horizontal stable fold maps from surfaces to the plane*, Topology Appl. **378** (2026).

[9] K. Iwakura, *Topology of boundary special generic maps into Euclidean spaces*, preprint, arXiv:2508.01629v3.

[10] A. Jankowski, R. Rubinsztein, *Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary*, Comment. Math. Prace Mat. **16** (1972), 99–112.

[11] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1965).

[12] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **3** (1993), 265–293.

[13] O. Saeki, *Introduction to global singularity theory of differentiable maps*, Handbook of geometry and topology of singularities VII, Springer, Cham (2025), 273–326.

[14] O. Saeki, K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbf{R}^3$, Pacific J. Math. **184** (1998), 175–193.

[15] O. Saeki, K. Sakuma, *Special generic maps of* 4*-manifolds and compact complex analytic surfaces*, Math. Ann. **313** (1999), 617–633.

[16] R. Schultz, *On the inertia group of a product of spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. **156** (1971), 137–153.

[17] V. Seigneur, *Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (7) **356** (2018), 712–716.

[18] N. Shibata, *On non-singular stable maps of* 3*-manifolds with boundary into the plane*, Hiroshima J. Math. **30** (2000), 415–435.

[19] S. Smale, *Diffeomorphisms of the* 2*-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.

Joint Graduate School of Mathematics for Innovation
Kyushu University
Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
JAPAN
E-mail address: iwakura.koki0105@gmail.com