

Constraint qualification for generic constraint map-germs in optimization problems

KLab 株式会社 濱田 直希

KLab Inc.

慶應義塾大学 早野 健太

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Keio University

関西大学 寺本 央

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science,

Kansai University

1. 序

N を可微分多様体, $f = (f_1, \dots, f_p) : N \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g = (g_1, \dots, g_q) : N \rightarrow \mathbb{R}^q$, $h = (h_1, \dots, h_r) : N \rightarrow \mathbb{R}^r$ を可微分関数とする. また $M(g, h) \subset N$ を次のように定義する.

$$M(g, h) = \{x \in N \mid g_1(x), \dots, g_q(x) \leq 0, h_1(x) = \dots = h_r(x) = 0\}.$$

(f_1, \dots, f_p を目的関数, g_1, \dots, g_q を不等号制約関数, h_1, \dots, h_r を等号制約関数とする) **多目的最適化問題**とは, 以下の条件を満たす点 $x \in M(g, h)$ を求める問題のことである:

条件: 任意の $y \in M(g, h)$ に対し, 以下のいずれかが成立する.

- $f_i(x) < f_i(y)$ となる $i \in \{1, \dots, p\}$ が存在する.
- 任意の $j \in \{1, \dots, p\}$ に対し $f_j(x) = f_j(y)$ が成立する.

この条件を満たす点, つまり多目的最適化問題の解を**パレート解**といい, $M(g, h)$ をこの問題における**実行可能領域**という. また $x \in M(g, h)$ に対し, その近傍 $U \subset M(g, h)$ で, x が $f|_U$ を目的関数とする多目的最適化問題の**パレート解**となるものが存在するとき, x を**局所パレート解**という.

多目的最適化問題においてパレート解を直接特徴づけることは一般には困難である. そのため, しばしば(局所)パレート解が満たすと期待される一次の必要条件がまず検討される. その代表的なものが, 以下の($x \in M(g, h)$ についての) **Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件**である:

KKT 条件: 以下を満たす $\alpha_i \geq 0, \lambda_j \geq 0, \mu_k \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q, k = 1, \dots, r$) が存在する.

- $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$.
- $$\sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^q \lambda_j \nabla g_j(x) + \sum_{k=1}^r \mu_k \nabla h_k(x) = 0.$$
- 任意の $j \in \{1, \dots, q\}$ に対し, $\lambda_j g_j(x) = 0$.

この条件はいくつの場合(たとえば制約関数がない, つまり $q = r = 0$ のときなど)では, 実際に x が(局所)パレート解になるための必要条件となるが(たとえば [3] を参照), 一般にはその限りではない.

以上の背景のもとで研究されてきた概念が、本稿の主題である**制約想定 (Constraint Qualification)**であり、任意の目的関数芽 $f : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ に対し、 $(x$ についての)KKT 条件が局所パレート解であることの必要条件になるための、制約関数芽 $g : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^q, z)$ ($z_j \leq 0$)、 $h : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ に対する十分条件のことを指す。以下で、本稿で扱う4つの代表的な制約想定を説明する。 $g : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^q, z)$ 、 $h : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ を写像芽とし、 $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}^q = \{w \in \mathbb{R}^q \mid w_1, \dots, w_q \leq 0\}$ とする。また $I = \{j \in \{1, \dots, q\} \mid z_j = 0\}$ とし、 $g_I = (g_j)_{j \in I}$ とする。

- ([10]) $d(g_I, h)_x$ が全射であるとき、 (g, h) は **Linear Independence Constraint Qualification (LICQ)** を満たすという。
- ([12]) dh_x が全射で、任意の $j \in I$ に対し $d(g_j)_x(d) < 0$ となる $d \in \text{Ker } dh_x$ が存在するとき、 (g, h) は **Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification (MFCQ)** を満たすという。

以下、 x のまわりの N のチャートの一つとり、 g, h を $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上定義された写像芽とみなす。部分集合 $C^+(g, h), L^+(g, h) \subset \mathbb{R}^n$ を次のように定義する。

$$C^+(g, h) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} M(g, h) \text{ 内の点列 } \{x_l\}_{l \geq 1} \text{ と正の実数列 } \{t_l\}_{l \geq 1} \text{ で,} \\ \lim_{l \rightarrow \infty} x_l = 0, \lim_{l \rightarrow \infty} t_l x_l = d \text{ となるものが存在する.} \end{array} \right\},$$

$$L^+(g, h) = \{d \in \text{Ker } dh_0 \mid \text{任意の } j \in I \text{ に対して } d(g_j)_0(d) \leq 0\}.$$

$C^+(g, h)$ を $M(g, h)$ の**接錐**、 $L^+(g, h)$ を (g, h) の**線型錐**という。一般に $C^+(g, h) \subset L^+(g, h)$ が成立する ([2])。 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対し、 $X^\circ = \{v \in \mathbb{R}^n \mid d \cdot v \leq 0 \text{ for } \forall d \in X\}$ を X の**極錐**という。

- ([1]) $C^+(g, h) = L^+(g, h)$ が成立するとき、 (g, h) は **Abadie Constraint Qualification (ACQ)** を満たすという。
- ([6]) $C^+(g, h)^\circ = L^+(g, h)^\circ$ が成立するとき、 (g, h) は **Guignard Constraint Qualification (GCQ)** を満たすという。

一般に「LICQ \Rightarrow MFCQ \Rightarrow ACQ \Rightarrow GCQ」という含意が成立し、どの含意も逆は成立しない ([13])。

本稿の目的は、多目的最適化における一般的な制約関数芽の制約想定に関して、[7] および [8] で得られた結果の概説を与えることである。本稿の構成は次の通りである。まず2節で結果を説明するための準備として、制約関数芽の $\mathcal{K}[G]$ -同値、簡約化、拡張された内在的微分の説明を行う。 $\mathcal{K}[G]$ -同値は Mather により導入された \mathcal{K} の、Damon ([4]) の意味で幾何学的な部分群から定まる同値関係で、実行可能領域芽の微分同相類を保つなど、多目的最適化の状況設定に適合するものである。また簡約化は余分な不等号制約を取り除き、一部の等号制約により定まる部分多様体に残った制約関数を制限する操作で、この操作も多目的最適化の状況設定に適合するものであると言える。実際これらの操作で上述の4つの制約想定は不変である (定理 2.1)。拡張された内在的微分は、制約関数芽が制約想定 (特に ACQ と GCQ) を満たすか、を判定するうえで重要な役割を果たす。[9] において、制約関数の一般的な4変数族の中に現れ得る制約関数芽が、 $\mathcal{K}[G]$ -同値と簡約化の差を除いて分類されている。第3節ではこの分類の内容、およびこの分類に現れる制約関数芽が、いつ上述の4つの制約想定を満たすか、を説明する。

2. 結果の説明のための準備

本節では [7] の結果の説明に必要となる、 $\mathcal{K}[G]$ -同値、簡約化、拡張された内在的微分の説明を行う。

2.A. $\mathcal{K}[G]$ -同値 $GL(q, \mathbb{R})$ の部分群 G_{gp} を次のように定義する。

$$G_{gp} = \{(a_i \delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq q} \mid a_i > 0\}.$$

つまり G_{gp} は各列に非零な成分は唯一つで、その成分が正となる正則行列全体からなる部分群である。次に $GL(q+r, \mathbb{R})$ の部分群 G を次のように定義する。

$$G = \left\{ \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ O_{r,q} & \Psi_{22} \end{pmatrix} \mid \Psi_{11} \in G_{gp}, \Psi_{12} \in M_{q,r}(\mathbb{R}), \Psi_{22} \in GL(r, \mathbb{R}) \right\}.$$

2つの制約関数芽 $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$, $(g', h') : (N', x') \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ に対し、

$$(g'(x), h'(x)) = \left(\Psi_{11}(x)g(\Phi^{-1}(x)) + \Psi_{12}(x)h(\Phi^{-1}(x)), \Psi_{11}(x)h(\Phi^{-1}(x)) \right) \quad (1)$$

となる微分同相写像芽 $\Phi : (N, x) \rightarrow (N', x')$ と可微分写像芽 $\Psi : (N', x') \rightarrow G$ が存在するとき、 (g, h) と (g', h') は $\mathcal{K}[G]$ -同値という。定義より、 (g, h) と (g', h') が $\mathcal{K}[G]$ -同値、つまり (1) を満たす Φ, Ψ が存在するとき、 $\Phi(M(g, h)) = M(g', h')$ となることが容易にわかる。より一般に $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, (z, 0))$ と $(g', h') : (N', x') \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, (z', 0))$ が写像芽で $z_j, z'_j \leq 0$ であるとき、 $I = \{j \in \{1, \dots, q\} \mid z_j = 0\}$, $g_I = (g_j)_{j \in I}$ とし、 $I', g'_{I'}$ も同様に定義し、 (g_I, h) と $(g'_{I'}, h')$ が $\mathcal{K}[G]$ -同値であるとき、 (g, h) と (g', h') は $\mathcal{K}[G]$ -同値であるという。

(g, h) , (g', h') が写像芽ではなく k -ジェットであるときも、上と同様の Φ や Ψ の k -ジェットを考えることにより、 $\mathcal{K}[G]$ -同値を定義し、 k -ジェットを考えていることを明確にしたいときは $\mathcal{K}[G]^k$ -同値と呼ぶことにする。 $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ を写像芽とする。 k -ジェットが $j^k(g, h)(x)$ と $\mathcal{K}[G]^k$ -同値となる任意の写像芽が (g, h) と $\mathcal{K}[G]$ -同値となるとき、 (g, h) は ($\mathcal{K}[G]$ に関して) **k -確定**といい、 (g, h) が k -確定となる $k \geq 0$ が存在するとき、 (g, h) は **有限確定**という。 (g, h) が k -確定か判定する方法については、[11, Corollary 4.5] を参照せよ。([9, Proposition 2.1] でも同様の主張があり、その直後に証明の概略が説明されている。)

$\mathcal{K}[G]$ -同値と制約想定については次のことがわかっている。

定理 2.1 ([7, Theorem 3.1]). LICQ, MFCQ, ACQ, GCQ は $\mathcal{K}[G]$ -同値で不変である。つまり、 (g, h) がこれらの制約想定の一つを満たせば、それと $\mathcal{K}[G]$ -同値な写像芽も同じ制約想定を満たす。

2.B. 簡約化 $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}^q$, $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, (z, 0))$ を写像芽とする。添え字の部分集合 $(k) = (k_1, \dots, k_{q-s}) \subset \{1, \dots, q\}$ は $z_{k_i} < 0$ を満たすとし、 $(i) = (i_1, \dots, i_{r-\ell}) \subset \{1, \dots, r\}$ は $\text{rank } d(h_{i_1}, \dots, h_{i_{r-\ell}})_x = r - \ell$ を満たすとする。このとき $(h_{i_1}, \dots, h_{i_{r-\ell}})^{-1}(0)$ は部分多様体芽となるが、 $\iota_{(i)} : (\mathbb{R}^{n-r+\ell}, 0) \rightarrow ((h_{i_1}, \dots, h_{i_{r-\ell}})^{-1}(0), x)$ をはめ込み芽とする。このとき、 (k) と $\iota_{(i)}$ による (g, h) の **簡約化** $(g, h)_{\iota_{(i)}, (k)} : (\mathbb{R}^{n-r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{q+s}$ を次のように定義する。

$$(g, h)_{\iota_{(i)}, (k)} := (g_{\iota_{(i)}, (k)}, h_{\iota_{(i)}}) := \left(g_1 \circ \iota_{(i)}, \dots, g_q \circ \iota_{(i)}, h_1 \circ \iota_{(i)}, \dots, h_r \circ \iota_{(i)} \right).$$

このとき $\text{rank } dh_{\iota_{(i)}, 0} = \text{rank } dh_x - (r - \ell)$ となる ([9, Lemma 3.1]). $g_{\iota_{(i)}, k}(0) = 0$ で $\text{rank } dh_{\iota_{(i)}, 0} = 0$ となる簡約化を (g, h) の **完全簡約化** という。

簡約化と $\mathcal{K}[G]$ -同値については以下が示されている。

命題 2.2 ([7, Lemmas 2.1, 2.3]). $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}^q$, $z' \in \mathbb{R}_{\leq 0}^{q'}$ とし, $\#\{j \mid z_j = 0\} = \#\{j' \mid z'_{j'} = 0\}$ とする. また $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, (z, 0))$, $(g', h') : (N', x') \rightarrow (\mathbb{R}^{q'+r}, (z', 0))$ を写像芽とする.

1. (g, h) のある簡約化と (g', h') のある簡約化が $\mathcal{K}[G]$ -同値であれば, (g, h) と (g', h') も $\mathcal{K}[G]$ -同値である.
2. (g, h) と (g', h') は $\mathcal{K}[G]$ -同値で, さらにこれらは ($\mathcal{K}[G]$ に関して) 有限確定であるとする. このとき (g, h) と (g', h') の簡約化で, 同じ個数の等号制約を持つものは $\mathcal{K}[G]$ -同値である.

一方で, 簡約化と制約想定については次が示されている.

定理 2.3 ([7, Theorem 3.2]). 写像芽 (g, h) が LICQ, MFCQ, ACQ, GCQ のいずれかを満たすことと, その簡約化が同じ制約想定を満たすことは同値である.

2.C. 拡張された内在的微分 $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ を $\text{corank } d(g, h)_x = 1$ となる写像芽とする. (ここでは簡単のため, 不等号制約関数が x で 0 となるもののみを考えるが, 一般の場合には不等号制約を簡約化した後に内在的微分を定義する.) $\mu_{(g,h)} \in (\text{Im } d(g, h)_x)^\perp \setminus \{0\}$ を一つとり, $W_{(g,h)} \subset T_x N$ を以下で定義する.

$$W_{(g,h)} = \text{Ker } dh_x \cap \left(\bigcap_{\substack{1 \leq j \leq q \\ (\mu_{(g,h)})_j \neq 0}} \text{Ker } dg_{j,0} \right).$$

$\text{corank } d(g, h)_x = 1$ より, $W_{(g,h)}$ は $\mu_{(g,h)}$ の取り方によらないことに注意する. x のまわりの N のチャートの一つとり, (N, x) を $(\mathbb{R}^n, 0)$ と同一視する. $d(g, h)_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \text{Hom}(T\mathbb{R}^n, (g, h)^*T\mathbb{R}^{q+r})$ を (g, h) の微分により定まる $\text{Hom}(T\mathbb{R}^n, (g, h)^*T\mathbb{R}^{q+r})$ の切断とする. $T\mathbb{R}^n$ と $(g, h)^*T\mathbb{R}^{q+r}$ の標準的な自明化により, $\text{Hom}(T\mathbb{R}^n, (g, h)^*T\mathbb{R}^{q+r})$ の接空間は $\mathbb{R}^n \times \text{Hom}(T_0\mathbb{R}^n, T_0\mathbb{R}^{q+r})$ と同一視できる. この同一視のもと, 第 2 成分への射影

$$p_2 : T_{d(g,h)_0} \text{Hom}(T\mathbb{R}^n, (g, h)^*T\mathbb{R}^{q+r}) \cong \mathbb{R}^n \times \text{Hom}(T_0\mathbb{R}^n, T_0\mathbb{R}^{q+r}) \rightarrow \text{Hom}(T_0\mathbb{R}^n, T_0\mathbb{R}^{q+r})$$

と微分 $d(d(g, h))_0 : T_0\mathbb{R}^n \rightarrow T_{d(g,h)_0} \text{Hom}(T\mathbb{R}^n, (g, h)^*T\mathbb{R}^{q+r})$ の合成を用いて,

$$\tilde{D}^2(g, h) : W_{(g,h)} \otimes W_{(g,h)} \rightarrow \text{Coker } d(g, h)_0$$

を,

$$\tilde{D}^2(g, h)(v_1 \otimes v_2) = [p_2(d(d(g, h))_0(v_1))(v_2)]$$

で定義する. これを**拡張された内在的微分**という. これを $\text{Ker } d(g, h)_0 \otimes \text{Ker } d(g, h)_0 \subset W_{(g,h)} \otimes W_{(g,h)}$ に制限すると, 通常の内在的微分

$$D^2(g, h) : \text{Ker } d(g, h)_0 \otimes \text{Ker } d(g, h)_0 \rightarrow \text{Coker } d(g, h)_0$$

を得られることに注意する. 拡張された内在的微分は (N, x) のチャートの取り方によらない. より強く, 以下が成立する.

命題 2.4 ([8], [9, Theorem 2.2]). $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ と $(g', h') : (N', x') \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ は $\mathcal{K}[G]$ -同値で, $\Phi : (N, x) \rightarrow (N', x')$ と $\Psi : (N', x') \rightarrow G$ に対して (1) を満たすとする.

1. $d\Phi_x(W_{(g,h)}) = W_{(g',h')}$ であり, $\Psi(x') \in G$ は同型写像 $\overline{\Psi(x')} : \text{Coker}d(g, h)_x \rightarrow \text{Coker}d(g', h')_{x'}$ を誘導する.
2. 以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} W_{(g,h)} \otimes W_{(g,h)} & \xrightarrow{\tilde{D}^2(g,h)} & \text{Coker}d(g, h)_x \\ d\Phi_x \otimes d\Phi_x \downarrow & & \downarrow \overline{\Psi(x')} \\ W_{(g',h')} \otimes W_{(g',h')} & \xrightarrow{\tilde{D}^2(g',h')} & \text{Coker}d(g', h')_{x'}. \end{array}$$

写像芽 $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ に対し $d(h_{i_1}, \dots, h_{i_{r-\ell}})_x$ が全射となるよう, $(i) = (i_1, \dots, i_{r-\ell}) \subset \{1, \dots, r\}$ をとり, $\iota_{(i)} : (\mathbb{R}^{n-r+\ell}, 0) \rightarrow ((h_{i_1}, \dots, h_{i_{r-\ell}})^{-1}(0), x)$ をはめ込み芽とする. $j_1, \dots, j_\ell \in \{1, \dots, r\}$ を $j_k < j_{k+1}$, $\{i_1, \dots, i_{r-\ell}, j_1, \dots, j_\ell\} = \{1, \dots, r\}$ となるようにとり, $\kappa_{(i)} : (\mathbb{R}^{q+\ell}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ を, $z \in \mathbb{R}^{q+\ell}$ に対し, $\kappa_{(i)}(z)$ の第 j 成分は z_j ($j = 1, \dots, q$), 第 $q + j_k$ 成分は z_{q+k} ($k = 1, \dots, \ell$), その他の成分は 0 となるよう定義する.

命題 2.5 ([8]). $\iota_{(i)}$ の微分 $d\iota_{(i),0} : T_0\mathbb{R}^{n-r+\ell} \rightarrow T_x N$ は $\text{Ker} d(g, h)_{\iota_{(i),0}}$ を $\text{Ker} d(g, h)_x$ に, $W_{(g,h)\iota_{(i)}}$ を $W_{(g,h)}$ に, それぞれ同型に移す. また $\kappa_{(i)}$ の微分 $d\kappa_{(i),0} : T_0\mathbb{R}^{q+\ell} \rightarrow T_0\mathbb{R}^{q+r}$ は $\text{Coker}d(g, h)_{\iota_{(i),0}}$ から $\text{Coker}d(g, h)_x$ への同型写像 $\overline{d\kappa_{(i),0}}$ を誘導する. さらに, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} W_{(g,h)} \otimes W_{(g,h)} & \xrightarrow{\tilde{D}^2(g,h)} & \text{Coker}d(g, h)_x \\ d\iota_{(i),0} \otimes d\iota_{(i),0} \uparrow & & \uparrow \overline{d\kappa_{(i),0}} \\ W_{(g,h)\iota_{(i)}} \otimes W_{(g,h)\iota_{(i)}} & \xrightarrow{\tilde{D}^2(g,h)\iota_{(i)}} & \text{Coker}d(g, h)_{\iota_{(i),0}}. \end{array}$$

3. 一般的な制約関数芽の分類と制約想定の評定

本節では [9] で得られた, 制約関数の一般的な 4 変数族の中に現れ得る制約関数芽の分類に関する結果と, 分類に現れる各制約関数芽がいつどの制約想定を満たすか, について説明をする.

まず以下の通り, 制約関数の一般的な 4 変数族の中に現れ得る制約関数芽は, $\mathcal{K}[G]$ -同値と簡約化の差を除いて分類されている.

定理 3.1 ([9, Theorem 5.2]). $n \gg q, r$ とし, N を境界のない多様体, $U \subset \mathbb{R}^4$ を開集合とする. このとき, 制約関数 $(g, h) \in C^\infty(N \times U, \mathbb{R}^{q+r})$ で次の条件を満たすもの全体の集合は, $C^\infty(N \times U, \mathbb{R}^{q+r})$ 中の残留集合, 特に稠密な部分集合である.

1. 任意の $u \in U$ と $\bar{x} \in M(g_u, h_u)$ に対し, $(g_u, h_u) : (N, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}^{q+r}$ の完全簡約化の微分の余階数は高々 1 である. ここで, $g_u : N \rightarrow \mathbb{R}^q$ は $g_u(x) = g(x, u)$ で定義される写像で, h_u についても同様である.
2. $g_k(\bar{x}, u) = 0$ となる $k \in \{1, \dots, q\}$ が存在しないような $u \in U$ と $\bar{x} \in M(g_u, h_u)$ に対し, 写像芽 $(g_u, h_u) : (N, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}^{q+r}$ の完全簡約化は, 定値写像か表 1 の写像芽のいずれかの普遍開折と $\mathcal{K}[G]$ -同値である.

以下, $g_k(\bar{x}, u) = 0$ となる $k \in \{1, \dots, q\}$ が存在すると仮定する.

3. $\text{corank}((dh_u)_{\bar{x}}) = 0$ となる $u \in U$ と $\bar{x} \in M(g_u, h_u)$ に対し, 写像芽 $(g_u, h_u) : (N, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}^{q+r}$ の完全簡約化は, 沈めこみ芽か表 2 の写像芽のいずれかと $\mathcal{K}[G]$ -同値である.
4. $\text{corank}((dh_u)_{\bar{x}}) = 1$ となる $u \in U$ と $\bar{x} \in M(g_u, h_u)$ に対し, 写像芽 $(g_u, h_u) : (N, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}^{q+r}$ の完全簡約化は表 3 の写像芽のいずれかと $\mathcal{K}[G]$ -同値である.

型	写像芽	変数	\mathcal{K} -確定次数
$(1, k)$	$x_1^k + \sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^2$	$2 \leq k \leq 5$	k
(2)	$x_1^3 + \epsilon_2 x_1 x_2^2 + x_3^2 + \sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$		3

表 1: 一般的な 4 変数族の中の制約関数芽の完全簡約化として現れ得る, 不等号制約を持たない写像芽. ここで, $\epsilon_j \in \{1, -1\}$ である.

定理 3.1 と定理 2.1, 2.3 より, 制約関数の一般的な 4 変数族に現れる制約関数芽がいつどの制約想定を満たすか, を決定するためには, 表 1, 2, 3 に現れる写像芽に対して同じ問題を考えれば十分であることがわかる. (正確には, 一般的な助変数族に現れた制約関数芽が, 分類表 1, 2, 3 のどの写像芽と $\mathcal{K}[G]$ -同値になるか, つまり認識問題を解く必要があるが, その解答(の一つ)は [8] で与える予定である.)

以下で, 分類表 1, 2, 3 の写像芽のそれぞれが, 前節で紹介した 4 つの制約想定を満たすための条件を説明する. まず LICQ の定義より, 分類表 1, 2, 3 の写像芽は全て, LICQ を満たさないことが容易にわかる. 実際, 制約関数の一般的な助変数族に現れる写像芽で, LICQ を満たすのは, 完全簡約化が沈めこみ芽のときのみである. 次に MFCQ については, 以下のように容易に (1 次の情報のみで) 判定することができる.

定理 3.2 ([7, Theorem 4.1]). 表 1 と 3 の写像芽は全て MFCQ を満たさない. 表 2 の写像芽が MFCQ を満たすための必要十分条件は, 標準形の中に現れるパラメーター $l_1 \neq 0$ となることである.

注意 3.3. より一般に, 微分の余階数が 1 の写像芽 $(g, h) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ が $\text{corank} dh_x = 0$ で $\dim dg_x(\text{Ker } dh_x) = q - 1$ を満たすと, (g, h) の完全簡約化は等号制約を持たず, さらに $\mathcal{K}[G]$ の作用により表 2 にある標準形に変形することができる. このとき (2.C 節でも用いた) $\mu_{(g,h)} \in (\text{Im } d(g, h)_x)^\perp \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{q+r}$ を, その第 1 成分から第 q 成分のうち, 0 より大きいものの個数が 0 より小さいものの個数以下になるようにとると, 標準形のパラメーター l_1 は, $\mu_{(g,h)}$ の第 1 成分から第 q 成分のうち 0 より小さいものの個数と一致する. さらに上の定理と同様の事実がこの一般的な状況でも成立する, つまり上記の写像芽が MFCQ を満たすための必要十分条件は $l_1 \neq 0$ となることである.

ACQ と GCQ については, 次のように, (拡張された) 内在的微分により判定できることがある.

定理 3.4 ([8], cf. [7, Lemmas 4.1, 4.2]). $(g, h) : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ を, $d(g, h)_x$ の余階数が 1 の写像芽とする. $((g, h)(x) = 0$, つまり 0 でない値をとる不等号制約はないと仮定していることに注意する.)

型	$\tilde{g}(x_{l+1}, \dots, x_n)$	l	変数
(1, k)	$\epsilon_q x_q^k + \sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-1$	$2 \leq k \leq 5$
(2)	$x_q^3 + \epsilon_{q+1} x_q x_{q+1}^2 + \sum_{j=q+2}^n \epsilon_j x_j^2$		
(3, k)	$\epsilon_{q-1} x_{q-1}^k + \sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-2$	$2 \leq k \leq 4$
(4, k)	$\epsilon_q x_q^k + x_{q-1} x_q + \sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$		
(5)	$\epsilon_{q-1} x_{q-1}^2 + x_q^3 + \sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$		
(6)	$\sum_{j=1}^2 \delta_j x_{q-j}^2 + \alpha x_{q-2} x_{q-1} + \sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-3$	$\alpha \in \mathbb{R}, \delta_j = \pm 1, (*)$
(7)	$\epsilon_{q-2} (x_{q-2} + \epsilon'_{q-1} x_{q-1})^2 + \epsilon_{q-1} x_{q-1}^3 + \sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$		
(8)	$\epsilon_{q-2} x_{q-2}^3 + \epsilon_{q-1} x_{q-1}^2 + \epsilon'_{q-1} x_{q-2} x_{q-1} + \sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$		
(9)	$x_q^3 + \epsilon_{01} x_{q-1} x_q + \epsilon_{02} x_{q-2} x_q + \epsilon_{12} x_{q-2} x_{q-1} + \sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$		
(10)	$\sum_{j=1}^3 \delta_j x_{q-4+j}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_{ij} x_{q-4+i} x_{q-4+j} + \epsilon_0 x_{q-3} x_{q-2} x_{q-1} + \sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-4$	$\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \delta_j = \pm 1, (**)$

表 2: 一般的な 4 変数族の中の制約関数芽の完全簡約化として現れ得る, 等号制約を持たない写像芽の $\mathcal{K}[G]$ -同値類は, $(x_1, \dots, x_{q-1}, \sum_{j=1}^{l_1} x_j - \sum_{j=l_1+1}^l x_j + \tilde{g}(x_{l+1}, \dots, x_n))$ (ここで $j^1 \tilde{g}(0) = 0$) という形の写像芽で代表される. この表ではこの標準形に現れる \tilde{g} のみを並べている. それぞれの写像芽の $\mathcal{K}[G]$ -確定次数は \tilde{g} の最高次の項の次数と一致する (紙面の都合で, 表には記載しない). ここで $\epsilon_j, \epsilon'_j, \epsilon_{ij} \in \{1, -1\}$, $0 \leq l_1 \leq \lceil \frac{l}{2} \rceil$, (6) に現れる (*) は $4\delta_1 \delta_2 - \alpha^2 \neq 0$ という条件で, (10) に現れる (**) は次の条件である.

$$4\delta_i \delta_j - \alpha_{ij}^2 \neq 0 \ (i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j), \ 4\delta_1 \delta_2 \delta_3 + \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} - \delta_3 \alpha_{12}^2 - \delta_2 \alpha_{13}^2 - \delta_1 \alpha_{23}^2 \neq 0.$$

型	h	q	変数	$\mathcal{K}[G]$ - 確定次数
(1, k)	$x_1^k + \sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^2$	1	$2 \leq k \leq 4$	k
(2)	$x_2^3 + x_1^2 + \sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$			3
(3, k)	$x_2^k + \epsilon_1 x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$		$3 \leq k \leq 4$	k
(4)	$\delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \alpha x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	2	$\alpha \in \mathbb{R}, \delta_j = \pm 1, (*)$	2
(5)	$x_1^3 + \epsilon_1 x_2^2 + \epsilon_2 x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$			3
(6)	$(x_1 + \epsilon_1 x_2)^2 + \epsilon_2 x_2^3 + \sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$			3
(7)	$x_3^3 + \epsilon_1 x_2 x_3 + \epsilon_2 x_3 x_1 + \epsilon_3 x_1 x_2$ $+ \sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$			3
(8)	$\sum_{j=1}^3 \delta_j x_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_{ij} x_i x_j$ $+ \epsilon_1 x_1 x_2 x_3 + \sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$	3	$\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \delta_j = \pm 1, (**)$	3

表 3: 一般的な 4 変数族の中の制約関数芽の完全簡約化として現れ得る, 等号制約と不等号制約を両方持つ写像芽の $\mathcal{K}[G]$ -同値類は, $(g_1(x), \dots, g_q(x), h(x)) = (x_1, \dots, x_q, h(x))$ という形の写像芽で代表される. この表ではこの標準形に現れる h のみを並べている. ここで $\epsilon_j \in \{1, -1\}$ であり, $(*)$ と $(**)$ は表 2 と同一の条件である.

- $\text{corank} dh_x = 0$ で $\dim dg_x(\text{Ker } dh_x) = q - 1$, つまり (g, h) の完全簡約化が等号制約を持たないとし, さらに MFCQ を満たさないとする. このとき注意 3.3 に現れる $\mu_{(g,h)} \in (\text{Im } d(g, h)_x)^\perp \setminus \{0\}$ で, 第 1 成分から第 q 成分までが全て 0 以上となるものが, 正の定数倍の差を除いて一意に定まる. このベクトルが代表する $\text{Coker} d(g, h)_x$ の元が正の向きとなるよう, $\text{Coker} d(g, h)_x$ に向きを与える. この向きのもと, $\tilde{D}^2(g, h) \neq 0$ で半負定値であれば, (g, h) は ACQ を満たす. また $D^2(g, h) \neq 0$ で半正定値でなければ, (g, h) は GCQ を満たす.
- $\text{corank} dh_x = 1$ で, $\dim dg_x(\text{Ker } dh_x) = q$, つまり (g, h) の完全簡約化が等号制約を 1 つ持ち, 完全簡約化の不等号制約が沈めこみ芽であるとする. このとき, (g, h) が ACQ を満たすのは $D^2 h \equiv 0$ のときに限る. また (g, h) が $\mathcal{K}[G]$ -有限確定で $D^2(g, h)$ が半定値でなければ, (g, h) は GCQ を満たす.

この定理は (一般的なものとは限らない) 完全簡約化の微分の余階数が 1 の制約関数芽が, ACQ あるいは GCQ を満たすための条件を与える. 命題 2.4, 2.5 にある通り, (拡張された) 内在的微分の同型類 (特に定値性) は $\mathcal{K}[G]$ -同値と簡約化で不変であるので, これらの条件は一般的な助変数族に現れる制約関数芽に対し直接 (認識問題を解くことなく) 確かめることができるが, 以下の結果にある通り, この定理の中の主張の逆は成立しないことがある.

定理 3.5 ([7]). $n \gg q + r$ とする.

- 表 1 の写像芽 h はいずれも ACQ を満たさない. これらの写像芽が GCQ を満たすための必要十分条件は, $D^2 h$ が半定値でないことである.
- 表 2 の写像芽で MFCQ を満たさない (つまり $l_1 = 0$ となる) ものを考える.

1. (6) 型, (8) 型, (10) 型以外の写像芽 g が ACQ を満たすための必要十分条件は, \tilde{D}^2g が半負定値となることである.
2. (6) 型の写像芽が ACQ を満たすための必要十分条件は, $\delta_1 = \delta_2 = -1$, $\alpha < 2$, $\epsilon_q = \dots = \epsilon_n = -1$ となることである. なお, この場合 \tilde{D}^2g が半負定値となるための必要十分条件は $\delta_1 = \delta_2 = -1$, $|\alpha| < 2$, $\epsilon_q = \dots = \epsilon_n = -1$ となることである.
3. (8) 型の写像芽が ACQ を満たすための必要十分条件は, $\epsilon'_{q-1} = \epsilon_{q-1} = \dots = \epsilon_n = -1$ となることである. なお, この場合 \tilde{D}^2g は常に不定値である.
4. (10) 型の写像芽が ACQ を満たすための必要十分条件は $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$, $\epsilon_q = \dots = \epsilon_n = -1$ で, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ なる i, j, k で以下を満たすものが存在することである.

$$\alpha_{ij} \leq 0 \wedge \alpha_{ik} \leq 0 \wedge \alpha_{jk} < 2, \text{ あるいは}$$

$$0 < \alpha_{ij} < 2 \wedge 0 < \alpha_{ik} < 2 \wedge \alpha_{jk} + \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ik}}{2} < 2\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_{ij}^2}{4}\right)\left(1 - \frac{\alpha_{ik}^2}{4}\right)}.$$

なお, この場合 \tilde{D}^2g が半負定値になるための必要十分条件は, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$, $\epsilon_q = \dots = \epsilon_n = -1$, $|\alpha_{ij}| < 2$, $\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13} - 4 < 0$ となることである.

5. (4, k) 型, (9) 以外の写像芽 g が GCQ を満たすための必要十分条件は, D^2g が半正定値でないことである.
 6. (4, k) 型の写像芽が GCQ を満たすための必要十分条件は, $(\epsilon_{q+1}, \dots, \epsilon_n) \neq (1, \dots, 1)$ あるいは $\epsilon_q = (-1)^{k+1}$ を満たすことである. なお, この場合 D^2g が半正定値でないための必要十分条件は $(\epsilon_{q+1}, \dots, \epsilon_n) \neq (1, \dots, 1)$ であることである.
 7. (9) 型の写像芽が GCQ を満たすための必要十分条件は, $(\epsilon_{q+1}, \dots, \epsilon_n) \neq (1, \dots, 1)$, $\epsilon_{01} = 1$, $\epsilon_{02} = 1$ のいずれか一つが成立することである. なお, この場合 D^2g が半正定値でないための必要十分条件は $(\epsilon_{q+1}, \dots, \epsilon_n) \neq (1, \dots, 1)$ であることである.
- 表 3 の写像芽 (g, h) はいずれも ACQ を満たさない. またそれらのうち (3, k) 型以外の写像芽が GCQ を満たすための必要十分条件は $D^2(g, h)$ が半定値でないことである. (3, k) 型の写像芽が GCQ を満たすための必要十分条件は次のいずれかが成立することである.
 - k が偶数で $\epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ のいずれか -1 となる.
 - k が奇数で $\epsilon_1 = 1$ あるいは $\{\epsilon_3, \dots, \epsilon_n\} = \{1, -1\}$ のいずれかが成立する.

なお, (3, k) 型の写像芽 (g, h) の内在的微分 $D^2(g, h)$ が半定値でないための必要十分条件は $\{\epsilon_3, \dots, \epsilon_n\} = \{1, -1\}$ となることである.

参考文献

- [1] J. M. Abadie. *On the Kuhn-Tucker theorem*. In J. M. Abadie, editor, *Nonlinear Programming*, pages 21–36. John Wiley, New York, 1967.

- [2] M. S. Bazaraa, J. J. Goode, and M. Z. Nashed. *On the cones of tangents with applications to mathematical programming*. J Optim Theory Appl, 13:389–426, 1974.
- [3] N. DaCunha and E. Polak. *Constrained Minimization under Vector-Valued Criteria in Finite Dimensional Spaces*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19:103, 1967.
- [4] J. Damon. *The Unfolding and Determinacy Theorems for Subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K}* . American Mathematical Society, 1984.
- [5] F. J. Gould and Jon W. Tolle. *A necessary and sufficient qualification for constrained optimization*. SIAM J. Appl. Math., 20:164–172, 1971.
- [6] M. Guignard. *Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space*. SIAM J. Control, 7:232–241, 1969.
- [7] Naoki Hamada, Kenta Hayano, and Hiroshi Teramoto. *Constraint qualification for generic parameter families of constraints in optimization*. preprint. arXiv:2510.02381.
- [8] Naoki Hamada, Kenta Hayano, and Hiroshi Teramoto. *Recognition and bifurcation of constraints in optimization*. in preparation.
- [9] Naoki Hamada, Kenta Hayano, and Hiroshi Teramoto. *Characterization of generic parameter families of constraint mappings in optimization*. J. Singul., 28:104–147, 2025.
- [10] M. R. Hestenes. *Calculus of Variations and Optimal Control*. John Wiley, New York, 1966.
- [11] S. Izumiya, M. Takahashi, and H. Teramoto. *Geometric equivalence among smooth section germs of vector bundles with respect to structure groups*. in preparation.
- [12] O. L. Mangasarian and S. Fromovitz. *The Fritz John necessary optimality condition in the presence of equality and inequality constraints*. J. Math. Anal. Appl., 17:37–47, 1967.
- [13] David W. Peterson. *A Review of Constraint Qualifications in Finite-Dimensional Spaces*. SIAM Review, pages 639–654, 1973.