

Knot surgered elliptic surfaces without 1- and 3-handles for a $(2, 2h + 1)$ -torus knot

岡山大学・大学院環境生命自然科学研究科 藪口 怜央

博士後期課程 2 年環境生命自然科学専攻

Reo Yabuguchi

Graduate school of Environmental, Life, Natural Science and Technology
Okayama University

概要

本稿では, Fintushel-Stern による knot surgery により得られる elliptic surface $E(n)_K$ があるクラス of fibered knot K に対して 1-と 3-ハンドルを含まないハンドル分解を持つことを解説する. とくに, $(2, 2h + 1)$ -torus knot に対する knot surgery の場合に, Lefschetz fibration のモノドロミー分解と Kirby 計算を組み合わせることで, 1-と 3-ハンドルを消去できることのアイディアを述べる. 証明の詳細や一般化は著者の別稿 ([14]) に譲り, 本稿では講演で用いた図式とその背後にある考え方を中心に概説的にまとめる. 本研究は岡山大学の門田直之氏との共同研究に基づく.

1 はじめに

4 次元可微分多様体のハンドル分解は, いくつかの 4 次元球体による分解のことであり, そのトポロジーや微分構造を理解する上で基本的な道具である. 多様体の基本群が消えているとき単連結というが, 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ多様体は幾何学的単連結であるという. ラフに言えば, 4 次元以外では単連結性と幾何学的単連結性は同値であるが, 4 次元に限っては同値ではない. 特に, 1-および 3-ハンドルを含まないハンドル分解を持つかどうか, あるいは 1-ハンドルのみを含まない分解を持つかどうかといった問題は, Kirby のリストの問題 4.18([11]) と関連していくつかの研究がある.

一方で, Fintushel-Stern による knot surgery は, 与えられた 4 次元多様体 X と knot $K \subset S^3$ から新たな 4 次元多様体 X_K を構成する強力な方法である. 特に, 手術前と手術後で同相だが微分同相でない多様体を得られる例として, elliptic surface $E(n)$ に対して knot surgery を施すことで得られる $E(n)_K$ は重要である.

本稿で扱う主題は, knot surgered elliptic surface $E(n)_K$ のハンドル分解の構造である. とくに, K が $(2, 2h + 1)$ -torus knot のときに, $E(n)_K$ が 1-および 3-ハンドルを含まないハンドル分解を持つことを説明する. この結果は Lefschetz fibration のモノドロミーから得られる具体的な Kirby 図式の計算に基づいている.

証明の完全な詳細については別稿 ([14]) を参照し, ここでは

- Lefschetz fibration と knot surgery
- $(2, 2h + 1)$ -torus knot のファイバー構造
- D^2 上 genus- g Lefschetz fibration を許容する多様体の Kirby 図式の描き方
- 1-および 3-ハンドルの消去のアイディア

を中心に解説する.

2 準備：Lefschetz fibration と knot surgery

本節では、本稿で用いる Lefschetz fibration と knot surgery の定義と、必要最小限の事実を復習する。

2.1 Lefschetz fibration の定義

(例えば [9] を、正則値上での局所自明性については [5] も参照)

定義 1. コンパクトで向き付けられた 4 次元多様体 X と 2 次元多様体 B に対し、 C^∞ 級写像 $f: X \rightarrow B$ が *genus- g Lefschetz fibration* であるとは、次を満たすことを言う：

1. $\partial X = f^{-1}(\partial B)$
2. f の特異値集合は有限集合 $C = \{q_i \mid i = 1, \dots, k\}$ であって、 q_i 上のファイバー $f^{-1}(q_i)$ 上に f の特異点 p_i が一意に存在して次を満たす：
 - (a) $f: X \setminus f^{-1}(C) \rightarrow B \setminus C$ は種数 g の閉曲面 Σ_g をファイバーとするファイバー束である。
 - (b) 各特異点近傍において、 X と B の向きに適合するように局所複素座標 (z_1, z_2) と B の局所複素座標 w が存在して、 f は

$$w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$$

と表される。

正則値 $q_0 \in B \setminus C$ の逆像 $f^{-1}(q_0)$ を一般ファイバー、特異値 $q_i \in C$ の逆像 $f^{-1}(q_i)$ を (*Lefschetz 型*) 特異ファイバーという。以降本稿では簡単のため、底空間が $B = S^2$ あるいは $B = D^2$ の場合に限って考える。すべての特異ファイバーは、一般ファイバー上の単純閉曲線 γ_i (vanishing cycle という) が一点に潰れた状況になっている。これについて以下で説明する。

$f: X \rightarrow B$ を genus- g Lefschetz fibration とし、特異値集合を

$$C = \{q_1, \dots, q_k\} \subset B$$

とする。基点 $q_0 \in B \setminus C$ を固定し、一般ファイバー

$$F := f^{-1}(q_0) \cong \Sigma_g$$

を取る。 $B \setminus C$ 上では局所自明なファイバー束になっている。そこで各特異値 q_i に対して、 q_0 を始点とし q_i を一周して戻る $B \setminus C$ 内の単純閉曲線 $\ell_i: [0, 1] \rightarrow B \setminus C$, $\ell_i(0) = \ell_i(1) = q_0$ を取ると、一般ファイバー F の自己微分同相が定まる。この自己微分同相の同位写像類は、曲面 Σ_g の mapping class group

$$\text{Mod}(\Sigma_g)$$

の元を与える。

定義より、各 ℓ_i に対応するモノドロミーは、ある単純閉曲線 $\gamma_i \subset \Sigma_g$ に沿った Dehn twist

$$t_{\gamma_i} \in \text{Mod}(\Sigma_g)$$

に一致する。例えば [9, 13] を参照されたい。この曲線 γ_i を、 q_i に対応する *vanishing cycle* と呼ぶ。

以上により、Lefschetz fibration f に対して、Dehn twist の積

$$t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} \cdots t_{\gamma_k} \in \text{Mod}(\Sigma_g)$$

が定まる。これを f の **モノドロミー分解** と呼ぶ。

Lefschetz fibration のモノドロミーは、 $B \setminus C$ の基本群から mapping class group への表現として記述される。

本稿では、底空間が $B = S^2$ あるいは $B = D^2$ の場合を主に考えるが、 $B = S^2$ の場合には $t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} \cdots t_{\gamma_k} = \text{id}$ という条件が付く。

2.2 Elliptic surface $E(n)$ の標準 Lefschetz fibration

標準的な elliptic surface $E(n)$ は、genus-1 の Lefschetz fibration

$$f_n: E(n) \rightarrow S^2$$

を持つことが知られている。([12, 9]) この Lefschetz fibration の一般ファイバーは 2 次元トーラス T^2 であり、特異ファイバーはすべて nodal fiber と呼ばれる型の Lefschetz 型特異ファイバーである。特に、 $E(n)$ は $12n$ 個の特異ファイバーを持つ。

まず $n = 1$ の場合を考える。elliptic surface $E(1)$ は、

$$E(1) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9 \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$$

と微分同相であり、genus-1 の Lefschetz fibration

$$f_1: E(1) \rightarrow S^2$$

を持つ。

定義 2. $f_i: X_i \rightarrow B_i$ ($i = 1, 2$) を genus- g Lefschetz fibration とし、 $b_i \in B_i$ を正則値とする。一般ファイバーを

$$F_i := f_i^{-1}(b_i) \cong \Sigma_g$$

とおく。

各 i に対して、 F_i の管状近傍

$$\nu(F_i) \cong \Sigma_g \times D^2$$

を取り、境界

$$\partial\nu(F_i) \cong \Sigma_g \times S^1$$

の間の向きを反転する同相写像

$$\varphi: \partial\nu(F_1) \rightarrow \partial\nu(F_2)$$

を用いて貼り合わせた多様体

$$X_1 \#_{\Sigma_g} X_2 := (X_1 \setminus \text{int } \nu(F_1)) \cup_{\varphi} (X_2 \setminus \text{int } \nu(F_2))$$

を、 X_1 と X_2 のファイバー和 (fiber sum) と呼ぶ。

一般の $n \geq 1$ に対して、 $E(n)$ は $E(1)$ のファイバー和として構成される。すなわち、一般ファイバー $T^2 \subset E(1)$ に沿って n 個の $E(1)$ をファイバー和することで、

$$E(n) \cong \underbrace{E(1) \#_{T^2} E(1) \#_{T^2} \cdots \#_{T^2} E(1)}_{n \text{ copies}}$$

が得られる。この操作は Lefschetz fibration の構造を保つように行うことができ f_1 たちを貼り合わせることで $E(n)$ 上の Lefschetz fibration f_n が自然に誘導される。

$E(n)$ の Kirby 図式は、例えば Gompf–Stipsicz によって明示的に与えられている。

2.3 knot surgery の定義

定義 3. [6] X を 4 次元多様体, $T \subset X$ を自己交差数 0 の埋め込みトーラスとし, $N(T) \cong T^2 \times D^2$ をその近傍とする. $K \subset S^3$ を結び目とする. このとき, *knot surgery* によって得られる多様体 X_K を

$$X_K = (X \setminus \text{int } N(T)) \cup_{\varphi} (S^1 \times (S^3 \setminus \text{int } N(K)))$$

で定義する. ここで, 境界 $\partial(T^2 \times D^2) \cong T^3$ と $\partial(S^1 \times (S^3 \setminus N(K))) \cong T^3$ の間に適切な同相 φ を取り, ファイバー構造を対応させる.

Fintushel–Stern の結果 [6] によれば, K が fibered knot であるとき, X_K はしばしば Lefschetz fibration や symplectic structure を持つことが分かっている. 特に $X = E(n)$, T を一般ファイバーとすると, $E(n)_K$ は $E(n)$ と同じホモロジー型を持つが, 一般にはエキゾチックな滑らか構造を持つ.

本稿では K として $(2, 2h+1)$ -torus knot を取り, $E(n)_K$ の具体的な Kirby 図式を構成し, 1- および 3- ハンドルを消去する.

3 $(2, 2h+1)$ -torus knot のファイバー構造

この節では, $(2, 2h+1)$ -torus knot のファイバー構造を簡単に復習する.

3.1 fibered knot としての性質

(p, q) -torus knot は, $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ を単位 3 次元球面とみなしたとき,

$$T_{p,q} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = |z_2| = 1, z_1^p = z_2^q\}$$

で定義される結び目である. 特に, $T_{2,2h+1}$ は genus h の fibered knot である [15, 4].

このとき, 結び目補空間 $S^3 \setminus \nu T_{2,2h+1}$ は, 種数 h , 境界成分 1 個をもつ曲面 Σ_h^1 をファイバーとする mapping torus として記述できる. すなわち,

$$S^3 \setminus \nu T_{2,2h+1} \cong (\Sigma_h^1 \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (\varphi(x), 0))$$

となるような, 境界を pointwise に固定する自己同相 $\varphi: \Sigma_h^1 \rightarrow \Sigma_h^1$ が存在する.

命題 1. $(2, 2h+1)$ -torus knot $K = T_{2,2h+1}$ は genus h の fibered knot であり, そのモノドロミーは $\text{Mod}(\Sigma_h^1)$ における *Dehn twist* の積として与えられる.

具体的なモノドロミーについては割愛するが, Lefschetz fibration の vanishing cycle が比較的扱いやすい形で記述できること, 特に高い対称性を持つことを用いて主定理は示される.

4 $E(n)$ の標準 Lefschetz fibration と Kirby 図式

本節では, elliptic surface $E(n)$ の標準的な Lefschetz fibration と, それに対応する Kirby 図式を復習する.

4.1 $E(1)$ から $E(n)$ へ

$E(1)$ は $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$ と微分同相であり, genus-1 Lefschetz fibration を許容する. その Lefschetz fibration のモノドロミーは, $\text{Mod}(T^2)$ の標準的な生成元 t_a, t_b を用いて,

$$(t_a t_b)^6 = 1$$

$E(n)$ の場合, モノドロミーは

$$(t_a t_b)^{6n} = 1$$

で与えられる (従って特異ファイバーは $12n$ 個である).

5 D^2 上の genus- g Lefschetz fibration の Kirby 図式の概説

本節では, $X = E(n)$, T を一般ファイバー, $K = T_{2,2h+1}$ としたときに得られる knot surgered manifold $E(n)_K$ の Kirby 図式について概説する.

knot surgery の定義に従うと, $E(n)_K$ は

$$E(n)_K = (E(n) \setminus \nu T) \cup_{\varphi} (S^1 \times (S^3 \setminus \nu K))$$

で与えられる. ここで, T は $E(n)$ の一般ファイバーであるトーラス T^2 であり, その管状近傍は $\nu T \cong T^2 \times D^2$ と同相である.

$(2, 2h+1)$ -torus knot K は fibered knot であるから, 結び目補空間 $S^3 \setminus \nu K$ は, genus h , 境界成分 1 個をもつ曲面 Σ_h^1 をファイバーとする mapping torus として記述できる. したがって, $S^1 \times (S^3 \setminus \nu K)$ は, $S^1 \times \Sigma_h^1$ 上のモノドロミーを用いて記述される.

Fintushel–Stern は, $E(n)_K$ が, Gurtas[10] によって構成された genus- $(2h+n-1)$ の Lefschetz fibration (モノドロミーは W^2) の二つのコピーを, fibered knot K のモノドロミー Φ_K によりひねってファイバー和することによって得られることを示した. さらに, この Lefschetz fibration の具体的なモノドロミーは Yun によって記述されている [16, 17]. これらの結果を用いて $E(n)_K$ の Kirby 図式を構成し, その図式計算から主結果を導く.

まず, D^2 上の genus- g Lefschetz fibration の Kirby 図式は, $\Sigma_g \times D^2$ の Kirby 図式を出発点として, 各 vanishing cycle に対応する (-1) -framed 2-ハンドルを, モノドロミー分解の順序に従って順次付け加えることで得られる.

6 1- および 3- ハンドルの消去

本節では, $E(n)_K$ の Kirby 図式に対して 1- および 3- ハンドルを消去するための基本的なアイデアを説明する. ここでの議論は概説的なものであり, 厳密な図式計算および完全な証明は著者の別稿に譲る.

6.1 1-, 3-ハンドルの消去

$E(n)_K$ は, genus- $(2h+n-1)$ の Lefschetz fibration

$$f: E(n)_K \rightarrow S^2$$

を持ち, モノドロミーは $\Phi_K(W)WW\Phi_K(W) = \text{id}$ である. このとき, 基底 S^2 をモノドロミーの対照的な部分で二つの円板に分割することにより, f は二つの D^2 上の Lefschetz fibration の貼り合わせとして表さ

れる：

$$f_{\pm}: X_{\pm} \rightarrow D^2.$$

それぞれの X_{\pm} は、同じ genus- g の一般ファイバーを持つ D^2 上の Lefschetz fibration で、モノドロミーはそれぞれ $\Phi_K(W)W$ と $W\Phi_K(W)$ であって、その全空間は、 $\Sigma_g \times D^2$ に vanishing cycle に対応する (-1) -framed 2-ハンドルを付加することで得られる。

ここで重要なのは、 D^2 上の Lefschetz fibration の全空間は、3- および 4- ハンドルを含まないという事実である。実際、 $\Sigma_g \times D^2$ は 0-, 1-, 2- ハンドルのみからなるハンドル分解を持ち、vanishing cycle に対応する操作は 2- ハンドルの付加として記述される。

したがって、各 X_{\pm} は 0-, 1-, 2- ハンドルのみからなるハンドル分解を持つ。

ここで、 X_{\pm} がどちらも 1-ハンドルのないハンドル分解を持つとき、一方の D^2 上の Lefschetz fibration X_{-} に対してハンドル分解を双対化することを考える。双対ハンドル分解では、 k -ハンドルは $(4-k)$ -ハンドルに対応するため、 X_{-} は 0-, 2-, 4- ハンドルのみからなるハンドル分解を持つことになる。

この結果、 X_{+} と双対化した X_{-} を貼り合わせて得られる $E(n)_K$ のハンドル分解は、1-, 3- ハンドルを含まない形に整理することができる。

ここで、 K が三葉結び目の場合についての計算を大まかに追う。 $T_{2,3}$ のモノドロミーに現れる vanishing cycles のうち必要な $D_0, D_1, D_2, \Phi_K^{-1}(D_0)$ のみを追ってみる。図 1 のように曲面上に Kirby 図式を描き、 $\Phi_K^{-1}(D_0)$ を D_0 へハンドルスライドを行う。ここでスライドにより得られたハンドルを h_0 と名付けておく。図 2 で、 D_2 を D_1 へハンドルスライドを行う。ここでスライドにより得られたハンドルを $h_{2,1}$ と名付けておく。次に、図 3 で、 D_1 を D_0 へハンドルスライドを行う。ここでスライドにより得られたハンドルを $h_{1,0}$ と名付けておく。以上で得られたハンドル達 $h_0, h_{2,1}, h_{1,0}, D_0$ で図 3 の右側に示した 1-ハンドルを消去する。このような操作を一般化して主定理の証明を行っている。

6.2 主結果 (概要)

以上の議論をまとめると、次のような結果が得られる (証明は別稿参照)。

定理 1. [14] $(2, 2h+1)$ -torus knot K に対する knot surgered elliptic surface $E(n)_K$ は、1- および 3- ハンドルを含まないハンドル分解を持つ。

この定理は、Akbulut による Dolgachev surface の 1- および 3- ハンドルの消去の結果 [2] と一部重なるが、本稿で扱っている例では、knot surgery を通じて広いクラスのエキゾチックな elliptic surface に対して同様の性質が成り立つことを示している。

7 議論と今後の問題

本節では、いくつかの議論と今後の問題を簡単に述べる。

本稿で扱った $(2, 2h+1)$ -torus knot は、比較的単純なモノドロミーを持つため、Kirby 図式での計算が行いやすい。一方で、一般の fibered knot K に対しても、 $E(n)_K$ が 1- および 3- ハンドルを含まないハンドル分解を持つかどうかは興味深い問題である。

以上、本稿では $(2, 2h+1)$ -torus knot に対する knot surgered elliptic surface $E(n)_K$ のハンドル分解について、講演の内容を概説した。詳細な証明については [14]、さらなる一般化については、著者の今後の研究に委ねる。

参考文献

- [1] S. Akbulut, *A fake compact contractible 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), 335–356.
- [2] S. Akbulut, *On Dolgachev surfaces*, J. Differential Geom. **30** (1989), 573–585.
- [3] R. I. Baykur, *Handle decompositions of smooth 4-manifolds*, to appear in *Handbook of Geometry and Topology of 4-Manifolds*.
- [4] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 5, Walter de Gruyter, 2003.
- [5] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, in: *Colloque de Topologie (espaces fibrés)*, Bruxelles, 1951, 29–55.
- [6] R. Fintushel and R. Stern, *Knots, links, and 4-manifolds*, Invent. Math. **134** (1998), 363–400.
- [7] R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.
- [8] R. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. **148** (1998), 619–693.
- [9] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [10] Y. Gurtas, *Positive Dehn twist expressions for some Lefschetz fibrations*, Topology Appl. **153** (2006), 161–180.
- [11] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, in: *Geometric Topology* (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 2.2, Amer. Math. Soc., 1997, 35–473.
- [12] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces II*, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626.
- [13] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach*, Topology Appl. **59** (1994), 177–193.
- [14] N. Monden and R. Yabuguchi, *Knot surgered elliptic surfaces for a $(2, 2h + 1)$ -torus knot*, arXiv:2503.06102 [math.GT].
- [15] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, 1976.
- [16] H. Yun, *Lefschetz fibrations on knot surgery 4-manifolds*, J. Korean Math. Soc. **53** (2016), no. 1, 1–29.
- [17] H. Yun, *Twisted fiber sums and knot surgery*, J. Korean Math. Soc. **55** (2018), no. 2, 357–375.

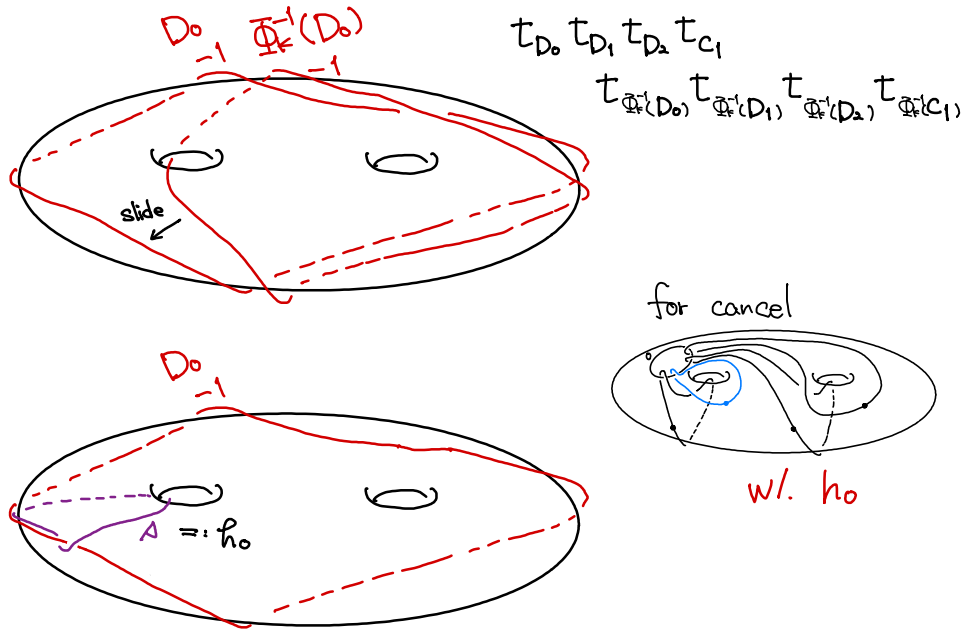


図 1: $\Phi_K^{-1}(D_0)$ を D_0 へハンドルスライド

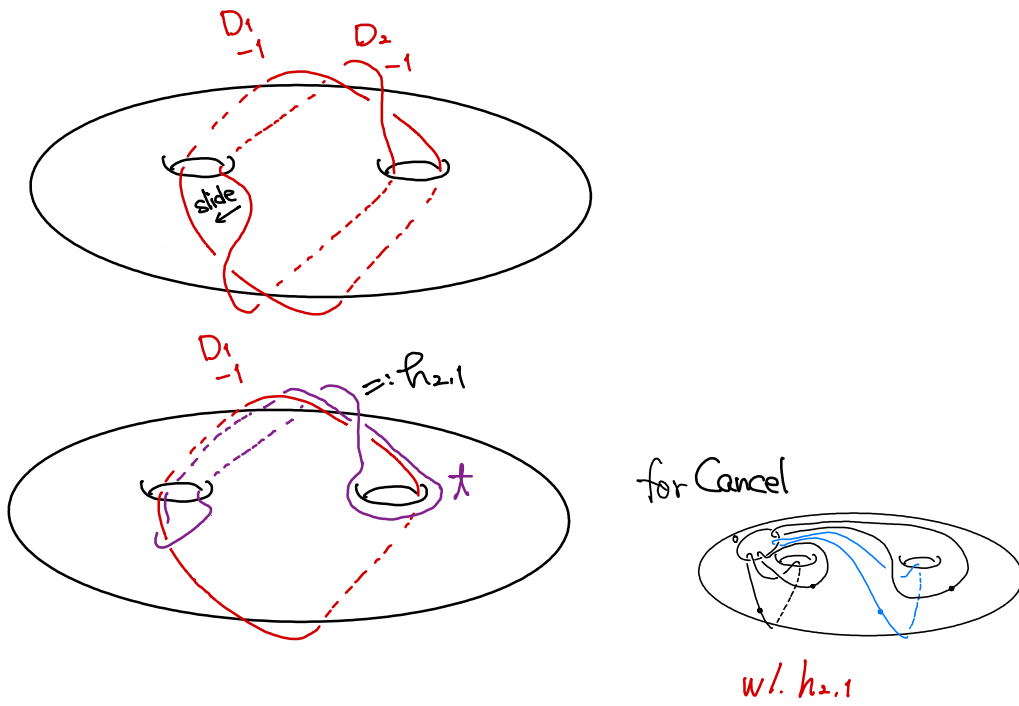


図 2: D_2 を D_1 へハンドルスライド

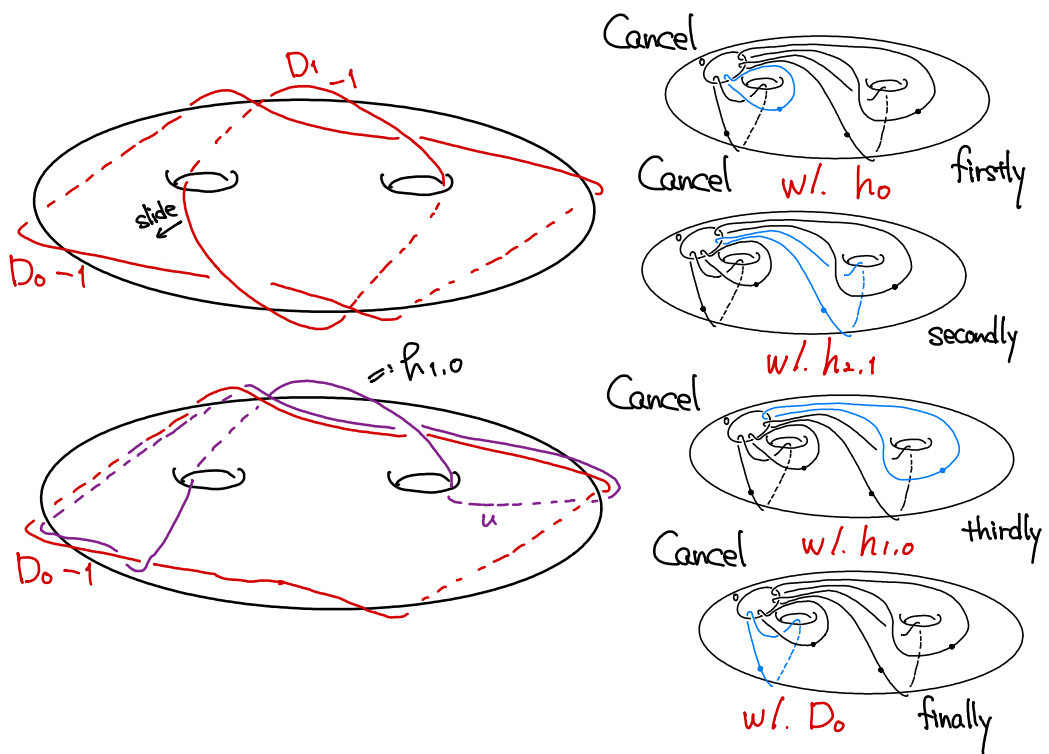


図 3: D_1 を D_0 へハンドルスライド