Evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean 3-space

室蘭工業大学　中津山 希
Nozomi Nakatsuyama
Muroran Institute of Technology

1　はじめに

非退化な空間曲線と特異点を持つ空間曲線の縮閉線は, [1, 3] をはじめ, 多くの論文にて研究されている. [3] では特異点を持つ曲線として, [2] にて定義された枠付き曲線の理論を用いて縮閉線を定義した.

本稿では, 非退化な空間曲線と枠付き曲線の縮閉線と伸開線をベルトラン型曲線, ベルトラン枠付き曲線の理論を用いて定義する. そして, 縮閉線と伸開線がこれらの曲線の逆に対応する条件を与え, 逆に対応しないほかの場合についても検討する.

2　準備

全体を通してすべての写像と多様体は滑らか (C^∞ 級) であるとする. I を区間とし, $\mathbb{R}^3$ を 3 次元ユークリッド空間, ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を内積とし, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ をノルム, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底とし,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

を外積とする. S^2 を $\mathbb{R}^3$ の単位球面すなわち $S^2 = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 | |\boldsymbol{a}| = 1\}$ とし, 3 次元の滑らかな多様体 $\{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in S^2 \times S^2 | \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0\}$ を Δ とする.

2.1　正則曲線

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を正則空間曲線, つまり任意の点 $t \in I$ に対して $\dot{\gamma}(t) = (d\gamma/dt)(t) \neq 0$ とする. 任意の点 $t \in I$ において, $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ であるとき, γ は非退化であるという. $\boldsymbol{t}$ を単位接ベクトル, $\boldsymbol{n}$ を単位法ベクトル, $\boldsymbol{b}$ を単位従法線ベクトルとし以下のように与える.

$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|},\ \boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{t}(t),\ \boldsymbol{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}.$$

このとき, $\{\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{b}(t)\}$ を γ の動標構という. γ の動標構に対して,

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{t}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{n}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 \\ -|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 & |\dot{\gamma}(t)|\tau(t) \\ 0 & -|\dot{\gamma}(t)|\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}(t) \\ \boldsymbol{n}(t) \\ \boldsymbol{b}(t) \end{pmatrix}$$

が成り立ち,

$$\kappa(t)=\frac{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3},\ \tau(t)=\frac{\det(\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t),\dddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|^2},$$

となる. ここで得られた κ を γ の曲率, τ を γ の捩率という. $\boldsymbol{n}(t),\boldsymbol{b}(t)$ および $\tau(t)$ を定義するためには, γ が正則であるだけでなく非退化であることも仮定する点に注意する.

定義 2.1 ([1])**.** $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ を $\tau\neq 0$ となるような非退化な空間曲線としたとき, $Ev(\gamma): I\to\mathbb{R}^3$,

$$Ev(\gamma)(t)=\gamma(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t)-\frac{\dot\kappa(t)}{|\dot\gamma(t)|\kappa^2(t)\tau(t)}\boldsymbol{b}(t)$$

を γ の縮閉線という.

このとき, 縮閉線 $Ev(\gamma)$ の動標構 $\{\boldsymbol{t}^E,\boldsymbol{n}^E,\boldsymbol{b}^E\}$ は $\{\boldsymbol{b},-\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\}$ である.

2.2 $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン型曲線

$\gamma,\overline{\gamma}: I\to\mathbb{R}^3$ を異なる非退化な曲線とする.

定義 2.2 ([5])**.** 任意の点 $t\in I$ において, $\overline{\gamma}(t)=\gamma(t)+\lambda(t)\boldsymbol{v}(t)$ となるような滑らかな関数 $\lambda: I\to\mathbb{R},\lambda\not\equiv 0$ が存在し, $\boldsymbol{v}(t)=\pm\overline{\boldsymbol{w}}(t)$ ($\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ のいずれか) であるとき, $\gamma,\overline{\gamma}: I\to\mathbb{R}^3$ を $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン型曲線対という. また, $\gamma,\overline{\gamma}: I\to\mathbb{R}^3$ が $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン型曲線対であるような $\overline{\gamma}$ が存在するとき, $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ を $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン型曲線という.

本論文では, $\lambda\not\equiv 0$ は $\{t\in I|\lambda(t)\neq 0\}$ が I の稠密部分集合であることを意味しており, λ は I のいかなる非自明な部分区間において恒等的に 0 ではない. したがって, I のいかなる非自明な部分区間においても, γ と $\overline{\gamma}$ は異なる空間曲線である. なお, λ が定数である場合, $\lambda\not\equiv 0$ は λ が 0 ではない定数であることを意味する.

$(\boldsymbol{t},\overline{\boldsymbol{n}})$-ベルトラン型曲線および $(\boldsymbol{n},\overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線の存在条件の証明は [5] を参照する.

$\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ を弧長パラメータ s をもつ非退化な曲線, すなわち任意の点 s において $|\gamma'(s)|=1$ である曲線とし, κ を γ の曲率, τ を捩率とする.

定理 2.3 ([5])**.** (1) 任意の点 $s\in I$ において, $\tau(s)=0$ かつ $-s+c\neq 0$ となるような定数 $c\in\mathbb{R}$ が存在するとき, $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{t},\overline{\boldsymbol{n}})$-ベルトラン型曲線である.

(2) 任意の点 $s\in I$ において, $\tau(s)=0$ かつ $\kappa'(s)\neq 0$ であるとき, $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n},\overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線である.

平面縮閉線, 平面伸開線はそれぞれ $(\boldsymbol{t},\overline{\boldsymbol{n}})$-ベルトラン型曲線および $(\boldsymbol{n},\overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線として現れる.

2.3 枠付き曲線

定義 2.4 ([2])**.** 任意の点 $t\in I$ において, $\dot\gamma(t)\cdot\nu_1(t)=0$ かつ $\dot\gamma(t)\cdot\nu_2(t)=0$ となる $(\gamma,\nu_1,\nu_2): I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲線という.

$\mu(t)=\nu_1(t)\times\nu_2(t)$ としたとき, $\{\nu_1(t),\nu_2(t),\mu(t)\}$ を γ の動標構という. γ の動標構に対して,

$$\begin{pmatrix}\dot{\nu_1}(t)\\ \dot{\nu_2}(t)\\ \dot{\mu}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \ell(t) & m(t)\\ -\ell(t) & 0 & n(t)\\ -m(t) & -n(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1(t)\\ \nu_2(t)\\ \mu(t)\end{pmatrix},\ \dot{\gamma}(t)=\alpha(t)\mu(t),$$

が成り立ち, $\ell(t)=\dot{\nu_1}(t)\cdot\nu_2(t)$, $m(t)=\dot{\nu_1}(t)\cdot\mu(t), n(t)=\dot{\nu_2}(t)\cdot\mu(t)$, $\alpha(t)=\dot{\gamma}(t)\cdot\mu(t)$ となり, 写像 $(\ell,m,n,\alpha):I\to\mathbb{R}^4$ を枠付き曲線 (γ,ν_1,ν_2) の曲率という. このとき, $\alpha(t_0)=0$ となるような点 $t_0\in I$ は, γ の特異点である.

枠付き曲線 (γ,ν_1,ν_2) の存在性と一意性, および曲率に関する詳細は [2] を参照する.

定義 2.5 ([3])**.** $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を (ℓ,m,n,α) が曲率である枠付き曲線とし, $f(t)=\ell(t)(m^2(t)+n^2(t))+m(t)\dot{n}(t)-\dot{m}(t)n(t)\neq 0$ を滑らかな関数とする. $\mathcal{E}v(\gamma):I\to\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}v(\gamma)(t)=\gamma(t)&+\frac{\alpha(t)\dot{n}(t)-\dot{\alpha}(t)n(t)+\alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\nu_1(t)\\ &-\frac{\alpha(t)\dot{m}(t)-\dot{\alpha}(t)m(t)-\alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\nu_2(t)\end{aligned}$$

を (γ,ν_1,ν_2) の縮閉線という.

2.4 $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン枠付き曲線

$(\gamma,\nu_1,\nu_2),(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲線とする.

定義 2.6 ([5])**.** 任意の点 $t\in I$ において, $\overline{\gamma}(t)=\gamma(t)+\lambda(t)\boldsymbol{v}(t)$ となるような滑らかな関数 $\lambda:I\to\mathbb{R},\lambda\not\equiv 0$ が存在し, $\boldsymbol{v}(t)=\pm\overline{\boldsymbol{w}}(t)$ ($\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ は ν_1,ν_2,μ のいずれか) であるとき, $(\gamma,\nu_1,\nu_2),(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン枠付き曲線対という. また, $(\gamma,\nu_1,\nu_2),(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン枠付き曲線対であるような $(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2)$ が存在するとき, $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を $(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{w}})$-ベルトラン枠付き曲線という.

$(\nu_1,\overline{\mu})$ と $(\nu_2,\overline{\mu})$, $(\mu,\overline{\nu}_1)$ と $(\mu,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線の存在条件の証明は [5] を参照する.

定理 2.7 ([5])**.** $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を曲率が (ℓ,m,n,α) となる枠付き曲線とする.

(1) 任意の点 $t\in I$ において, $\alpha(t)+\lambda(t)m(t)=0$ となるような滑らかな関数 $\lambda:I\to\mathbb{R},\lambda\not\equiv 0$ が存在するとき, $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\nu_1,\overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線である.

(2) 任意の点 $t\in I$ において, $\ell(t)=0$ かつ $\alpha(t)+\lambda(t)n(t)=0$ となるような滑らかな関数 $\lambda:I\to\mathbb{R},\lambda\not\equiv 0$ が存在するとき, $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\nu_2,\overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線である.

(3) 任意の点 $t\in I$ において, $\ell(t)=0$ かつ $m(t)\cos\theta(t)-n(t)\sin\theta(t)=0$ となるような滑らかな関数 $\theta:I\to\mathbb{R}$ が存在し, $\int\alpha(t)dt\not\equiv 0$ であるとき, $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\mu,\overline{\nu}_1)$-ベルトラン枠付き曲線である.

(4) $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $(\mu,\overline{\nu}_1)$-ベルトラン枠付き曲線であるとき, $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\mu,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線でもある.

円的縮閉線 ([4] 参照) は $(\nu_1,\overline{\mu})$ と $(\nu_2,\overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線, 円的伸開線は $(\mu,\overline{\nu}_1)$ と $(\mu,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線として現れる.

3 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン型曲線

$\gamma, \overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ を異なる非退化な曲線とする.

定義 3.1. 任意の点 $t \in I$ において, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(t) + \lambda(t)\boldsymbol{v}(t) + \eta(t)\boldsymbol{w}(t)$ となるような滑らかな写像 $(\lambda, \eta) : I \to \mathbb{R}^2, (\lambda, \eta) \not\equiv (0, 0)$ が存在し, $\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{w}(t) = \pm\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ ($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ のいずれか) であるとき, $\gamma, \overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ を $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン型曲線対という. また, $\gamma, \overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ が $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン型曲線対であるような $\overline{\gamma}$ が存在するとき, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン型曲線という.

$(\lambda, \eta) \not\equiv (0, 0)$ は, (λ, η) が I のいかなる非自明な部分区間において恒等的に 0 ではないことを意味する. したがって, I のいかなる非自明な部分区間においても, γ と $\overline{\gamma}$ は異なる空間曲線である.

$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}})$-ベルトラン型曲線および $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線の存在条件の証明は [6] を参照する.

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を非退化な曲線とし, 曲率を κ, 捩率を τ とする.

定理 3.2 ([6]). (1) 任意の点 $t \in I$ において, $\tau(t) \neq 0$ とし,

$$h(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)}{\kappa(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa^2(t)} \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)}\right) \neq 0 \tag{1}$$

となる滑らかな関数 $h : I \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定する. 任意の点 $t \in I$ において, 滑らかな写像 $(\lambda, \eta) : I \to \mathbb{R}^2, (\lambda, \eta) \not\equiv (0, 0)$ が $\lambda(t) = 1/\kappa(t)$ かつ $\eta(t) = -\dot{\kappa}(t)/(|\dot{\gamma}(t)|\kappa^2(t)\tau(t))$ となるとき, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}})$-ベルトラン型曲線である.

(2) 点 $t_0 \in I$ において, $\tau(t_0) = 0$ とする. このとき $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}})$-ベルトラン型曲線ではない.

注意 3.3. $h > 0$ (あるいは $h < 0$) であるとき, $\overline{\gamma}$ の動標構は $\{\overline{\boldsymbol{t}}, \overline{\boldsymbol{n}}, \overline{\boldsymbol{b}}\} = \{\boldsymbol{b}, \mp\boldsymbol{n}, \pm\boldsymbol{t}\}$(あるいは $\{\overline{\boldsymbol{t}}, \overline{\boldsymbol{n}}, \overline{\boldsymbol{b}}\} = \{-\boldsymbol{b}, \pm\boldsymbol{n}, \pm\boldsymbol{t}\}$) となる. また, $\overline{\gamma}$ の曲率と捩率は $\overline{\kappa}(t) = |\dot{\gamma}(t)||\tau(t)|/|h(t)|, \overline{\tau}(t) = |\dot{\gamma}(t)|\kappa(t)/h(t)$ となる.

定理 3.4 ([6]). (1) 任意の点 $t \in I$ において, $\tau(t) \neq 0$ とする. 任意の点 $t \in I$ において,

$$\begin{cases} |\dot{\gamma}(t)| + \dot{\lambda}(t) - \eta(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) = 0, \\ \lambda(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) + \dot{\eta}(t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

を満たす滑らかな写像 $(\lambda, \eta) : I \to \mathbb{R}^2, \eta \neq 0$ が存在するとき, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線である.

(2) 点 $t_0 \in I$ において, $\tau(t_0) = 0$ とする. このとき $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線ではない.

注意 3.5. $\tau > 0$ (あるいは $\tau < 0$) であるとき, $\overline{\gamma}$ の動標構は $\{\overline{\boldsymbol{t}}, \overline{\boldsymbol{n}}, \overline{\boldsymbol{b}}\} = \{\pm\boldsymbol{b}, \mp\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\}$(あるいは $\{\overline{\boldsymbol{t}}, \overline{\boldsymbol{n}}, \overline{\boldsymbol{b}}\} = \{\pm\boldsymbol{b}, \pm\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{t}\}$) となる. また, $\overline{\gamma}$ の曲率と捩率は $\overline{\kappa}(t) = 1/|\eta(t)|, \overline{\tau}(t) = \kappa(t)/(\eta(t)\tau(t))$ となる.

4 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン枠付き曲線

$(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\overline{\gamma}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲線とする.

定義 4.1 ([6]). 任意の点 $t \in I$ において, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(t) + \lambda(t)\boldsymbol{v}(t) + \eta(t)\boldsymbol{w}(t)$ となるような滑らかな写像 $(\lambda, \eta) : I \to \mathbb{R}^2, (\lambda, \eta) \not\equiv (0,0)$ が存在し, $\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{w}(t) = \pm\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ ($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は ν_1, ν_2, μ のいずれか) であるとき, $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\overline{\gamma}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン枠付き曲線対という. また, $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\overline{\gamma}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン枠付き曲線対であるような $(\overline{\gamma}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2)$ が存在するとき, $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン枠付き曲線という.

$(\nu_1, \nu_2, \overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線と $(\mu, \nu_1, \overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線の存在条件の証明は [6] を参照する. $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を曲率が (ℓ, m, n, α) となる枠付き曲線とする.

定理 4.2 ([6]). 任意の点 $t \in I$ において,

$$\begin{cases} \alpha(t) + \lambda(t)m(t) + \eta(t)n(t) = 0, \\ (\dot{\lambda}(t) - \eta(t)\ell(t))\sin\theta(t) + (\lambda(t)\ell(t) + \dot{\eta}(t))\cos\theta(t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

を満たす滑らかな写像 $(\lambda, \eta) : I \to \mathbb{R}^2, (\lambda, \eta) \not\equiv (0,0)$, 滑らかな関数 $\theta : I \to \mathbb{R}$ が存在するとき, $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は $(\nu_1, \nu_2, \overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線である.

注意 4.3. $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が $(\nu_1, \nu_2, \overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線であるとき, $(\overline{\gamma}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ の曲率は

$$\begin{aligned} &\overline{\ell}(t) = m(t)\sin\theta(t) + n(t)\cos\theta(t),\ \overline{m}(t) = \dot{\theta}(t) - \ell(t), \\ &\overline{n}(t) = n(t)\sin\theta(t) - m(t)\cos\theta(t),\ \overline{\alpha}(t) = (\dot{\lambda}(t) - \eta(t)\ell(t))\cos\theta(t) - (\lambda(t)\ell(t) + \dot{\eta}(t))\sin\theta(t), \end{aligned}$$

となる.

定理 4.4 ([6]). 任意の点 $t \in I$ において,

$$-\lambda(t)m(t) + \dot{\eta}(t) = 0,\ \alpha(t) + \dot{\lambda}(t) + \eta(t)m(t) = 0, \tag{4}$$

を満たす滑らかな写像 $(\lambda, \eta) : I \to \mathbb{R}^2, (\lambda, \eta) \not\equiv (0,0)$ が存在するとき, $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は $(\mu, \nu_1, \overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線である.

注意 4.5. $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が $(\mu, \nu_1, \overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線であるとき, $(\overline{\gamma}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ の曲率は

$$\begin{aligned} \overline{\ell}(t) &= -\dot{\theta}(t) - m(t),\ \overline{m}(t) = -(\ell(t)\sin\theta(t) + n(t)\cos\theta(t)), \\ \overline{n}(t) &= \ell(t)\cos\theta(t) - n(t)\sin\theta(t),\ \overline{\alpha}(t) = -\lambda(t)n(t) + \eta(t)\ell(t), \end{aligned}$$

となる.

5　非退化な空間曲線の縮閉線と伸開線

$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン型曲線を用いて, 非退化な空間曲線の伸開線を直接的に定義する. $\gamma, \overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ を非退化な曲線とし, 曲率を $\kappa, \overline{\kappa}$, 捩率を $\tau, \overline{\tau}$ とする.

定義 5.1. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を $\tau \neq 0$ となるような非退化な空間曲線としたとき, 任意の点 $t \in I$ で

$$\begin{cases} |\dot{\gamma}(t)| + \dot{\lambda}^I(t) - \eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) = 0, \\ \lambda^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) + \dot{\eta}^I(t) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

を満たす滑らかな写像 $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2, \eta^I \neq 0$ が存在するとき, $Inv(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$,

$$Inv(\gamma)(t) = \gamma(t) + \lambda^I(t)\boldsymbol{t}(t) + \eta^I(t)\boldsymbol{n}(t)$$

を $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の伸開線という.

注意 5.2. 伸開線 $Inv(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線に対応している.

非退化な空間曲線の縮閉線と伸開線が逆に対応する条件を考える.

定理 5.3. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を非退化な曲線とし, 曲率を κ, 捩率を $\tau \neq 0$ とする.

(1) 条件 (5) を満たす滑らかな写像 $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2, \eta^I \neq 0$ が存在すると仮定する. このとき伸開線の縮閉線 $Ev(Inv(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, $Ev(Inv(\gamma)) = \gamma$ である.

(2) 条件 (1) を満たし, $\lambda^E = 1/\kappa$, $\eta^E = -\dot{\kappa}/(|\dot{\gamma}|\kappa^2\tau)$ となる滑らかな写像 $(\lambda^E, \eta^E) : I \to \mathbb{R}^2$ が存在すると仮定する.

(i) $\tau > 0$ かつ $h > 0$ とする. $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda^I = -\eta^E$, $\eta^I = \lambda^E$ とすると, 縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, $Inv(Ev(\gamma)) = \gamma$ である.

(ii) $\tau > 0$ かつ $h < 0$ とする. $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda^I = \eta^E$, $\eta^I = -\lambda^E$ とすると, 縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, $Inv(Ev(\gamma)) = \gamma$ である.

(iii) $\tau < 0$ かつ $h > 0$ とする. $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda^I = -\eta^E$, $\eta^I = -\lambda^E$ とすると, 縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, $Inv(Ev(\gamma)) = \gamma$ である.

(iv) $\tau < 0$ かつ $h < 0$ とする. $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda^I = \eta^E$, $\eta^I = \lambda^E$ とすると, 縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, $Inv(Ev(\gamma)) = \gamma$ である.

証明. (1) 定義 5.1 より, 伸開線 $Inv(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ は $Inv(\gamma)(t) = \gamma(t) + \lambda^I(t)\boldsymbol{t}(t) + \eta^I(t)\boldsymbol{n}(t)$ と与えられる. このとき $(\lambda^I, \eta^I) : I \to \mathbb{R}^2$ は条件 (5) を満たし, $\eta^I \neq 0$ である滑らかな写像である. 注意 3.5 より, $Inv(\gamma)$ の曲率と捩率は $\kappa^I(t) = 1/|\eta^I(t)|$, $\tau^I(t) = \kappa(t)/(\eta^I(t)\tau(t))$ となる. 定理 3.2 (1) より, 伸開線の縮閉線 $Ev(Inv(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は

$$Ev(Inv(\gamma))(t) = Inv(\gamma)(t) + \lambda^E(t)\boldsymbol{n}^I(t) + \eta^E(t)\boldsymbol{b}^I(t)$$

と与えられる. このとき $\tau \neq 0$ かつ $\eta^I \neq 0$ より, 4 つの場合に分かれる.

$\tau > 0$ かつ $\eta^I > 0$ とする. このとき, 伸開線 $Inv(\gamma)$ の動標構と曲率は $\{\boldsymbol{t}^I, \boldsymbol{n}^I, \boldsymbol{b}^I\} = \{\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\}$, $\kappa^I(t) = 1/\eta^I(t)$ となり, $|\dot{Inv}(\gamma)(t)| = \eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)$ となる. 伸開線の縮閉線 $Ev(Inv(\gamma))$ は

$$Ev(Inv(\gamma))(t) = \gamma(t) + (\lambda^I(t) + \eta^E(t))\boldsymbol{t}(t) + (\eta^I(t) - \lambda^E(t))\boldsymbol{n}(t)$$

となる. 伸開線 $Inv(\gamma)$ に対する条件 (1) は

$$\begin{aligned}
h^I(t) &= \frac{|\dot{Inv}(\gamma)(t)|\tau^I(t)}{\kappa^I(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\kappa}^I(t)}{\kappa^{I2}(t)}\frac{1}{|\dot{Inv}(\gamma)(t)|\tau^I(t)}\right) \\
&= \eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)\frac{\kappa(t)}{\eta^I(t)\tau(t)}\eta^I(t) - \frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{\eta}^I(t)}{(\eta^I(t))^2}(\eta^I(t))^2\frac{1}{\eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)}\frac{\eta^I(t)\tau(t)}{\kappa(t)}\right) \\
&= \eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) - \frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{\eta}^I(t)}{|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t)}\right) \\
&= \eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) - \dot{\lambda}^I(t) \\
&= |\dot{\gamma}(t)| \neq 0
\end{aligned}$$

となる．よって, 伸開線の縮閉線 $Ev(Inv(\gamma))$ は存在し,

$$\lambda^E(t)=\frac{1}{\kappa^I(t)}=\eta^I(t),\ \eta^E(t)=\frac{\dot{\lambda}^E(t)}{|\dot{Inv}(\gamma)(t)|\tau^I(t)}=-\frac{\lambda^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t)}{|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t)}=-\lambda^I(t),$$

となる．したがって $Ev(Inv(\gamma))$ は

$$Ev(Inv(\gamma))(t)=\gamma(t)+(\lambda^I(t)+\eta^E(t))\boldsymbol{t}(t)+(\eta^I(t)-\lambda^E(t))\boldsymbol{n}(t)=\gamma(t)$$

となる．

$\tau>0$ かつ $\eta^I<0$ ($\tau<0$ かつ $\eta^I>0$ あるいは $\tau<0$ かつ $\eta^I<0$) とする．このとき伸開線 $Inv(\gamma)$ の動標構, 曲率は $\{\boldsymbol{t}^I,\boldsymbol{n}^I,\boldsymbol{b}^I\}=\{-\boldsymbol{b},\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\}$ ($\{-\boldsymbol{b},-\boldsymbol{n},-\boldsymbol{t}\}$ あるいは $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{n},-\boldsymbol{t}\}$), $\kappa^I(t)=-1/\eta^I(t)$ ($1/\eta^I(t)$ あるいは $-1/\eta^I(t)$) となり, $|\dot{Inv}(\gamma)(t)|=-\eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)$ ($-\eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)$ あるいは $\eta^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)$) となる．$\tau>0$ かつ $\eta^I>0$ の場合と同じように計算すると, $Ev(Inv(\gamma))(t)=\gamma(t)$ となる．

(2) 定理 3.2 (1) より, 縮閉線 $Ev(\gamma):I\to\mathbb{R}^3$ は $Ev(\gamma)(t)=\gamma(t)+\lambda^E(t)\boldsymbol{n}(t)+\eta^E(t)\boldsymbol{b}(t)$ と与えられる．このとき $(\lambda^E,\eta^E):I\to\mathbb{R}^2$ は $\lambda^E(t)=1/\kappa(t)$ と $\eta^E(t)=-\dot{\kappa}(t)/(|\dot{\gamma}(t)|\kappa^2(t)\tau(t))$ で与えられ, 条件 (1) を満たす．注意 3.3 より, $Ev(\gamma)$ の曲率と捩率は $\kappa^E(t)=|\dot{\gamma}(t)||\tau(t)|/|h(t)|$, $\tau^E(t)=|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t)/h(t)$ となる．定義 5.1 より, 縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma)):I\to\mathbb{R}^3$ は

$$Inv(Ev(\gamma))(t)=Ev(\gamma)(t)+\lambda^I(t)\boldsymbol{t}^E(t)+\eta^I(t)\boldsymbol{n}^I(t)$$

と与えられ, 縮閉線 $Ev(\gamma)$ に対する条件 (5) は

$$\begin{cases}|\dot{Ev}(\gamma)(t)|+\dot{\lambda}^I(t)-\eta^I(t)|\dot{Ev}(\gamma)(t)|\kappa^E(t)=0,\\ \lambda^I(t)|\dot{Ev}(\gamma)(t)|\kappa^E(t)+\dot{\eta}^I(t)=0,\end{cases}\tag{6}$$

となる．

(i) $\tau>0$ かつ $h>0$ とする．このとき, 縮閉線 $Ev(\gamma)$ の動標構, 曲率は $\{\boldsymbol{t}^E,\boldsymbol{n}^E,\boldsymbol{b}^E\}=\{\boldsymbol{b},-\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\}$, $\kappa^E(t)=|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)/h(t)$ となり, $|\dot{Ev}(\gamma)(t)|=h(t)$ となる．縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma))$ は

$$Inv(Ev(\gamma))(t)=\gamma(t)+(\lambda^E(t)-\eta^I(t))\boldsymbol{n}(t)+(\eta^E(t)+\lambda^I(t))\boldsymbol{b}(t)$$

となり, 条件 (6) は

$$\begin{cases}|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)(\lambda^E(t)-\eta^E(t))+\dot{\eta}^E(t)+\dot{\lambda}^I(t)=0,\\ \lambda^I(t)|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)+\dot{\eta}^I(t)=0,\end{cases}$$

となる．$(\lambda^I,\eta^I):I\to\mathbb{R}^2$ を $\lambda^I=-\eta^E$, $\eta^I=\lambda^E$ とすると, 条件 (6) を満たす．したがって縮閉線の伸開線 $Inv(Ev(\gamma))$ は存在し,

$$Inv(Ev(\gamma))(t)=\gamma(t)+(\lambda^E(t)-\eta^I(t))\boldsymbol{n}(t)+(\eta^E(t)+\lambda^I(t))\boldsymbol{b}(t)=\gamma(t)$$

となる．

(ii), (iii), (iv) $\tau>0$ かつ $h<0$ ($\tau<0$ かつ $h>0$ あるいは $\tau<0$ かつ $h<0$) とする．このとき縮閉線 $Ev(\gamma)$ の動標構, 曲率は $\{\boldsymbol{t}^E,\boldsymbol{n}^E,\boldsymbol{b}^E\}=\{-\boldsymbol{b},\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\}$ ($\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{n},-\boldsymbol{t}\}$ あるいは $\{-\boldsymbol{b},-\boldsymbol{n},-\boldsymbol{t}\}$), $\kappa^E(t)=|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)/h(t)$ ($-|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)/h(t)$ あるいは $|\dot{\gamma}(t)|\tau(t)/h(t)$) となり, $|\dot{Ev}(\gamma)(t)|=h(t)$ ($h(t)$ あるいは $-h(t)$) となる．(i) の場合と同じように計算すると, $Inv(Ev(\gamma))(t)=\gamma(t)$ となる． □

非退化な空間曲線の伸開線同士の関係を考える．

補題 5.4. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を非退化な曲線とし, 曲率を κ, 捩率を $\tau \neq 0$ とする. 条件 (5) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^I, \eta_1^I) : I \to \mathbb{R}^2, \eta_1^I \neq 0$ と $(\lambda_2^I, \eta_2^I) : I \to \mathbb{R}^2, \eta_2^I \neq 0$ をそれぞれ持つ 2 つの伸開線 $Inv_1(\gamma)$ と $Inv_2(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ が存在し, $(\lambda_1^I - \lambda_2^I, \eta_1^I - \eta_2^I) \not\equiv (0,0)$ であるとする. このとき 2 つの伸開線 $Inv_1(\gamma)$ と $Inv_2(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である.

証明. $\tau > 0$ とする. このとき, 伸開線 $Inv_1(\gamma), Inv_2(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ の動標構は $\{\boldsymbol{t}_1^I, \boldsymbol{n}_1^I, \boldsymbol{b}_1^I\} = \{\boldsymbol{t}_2^I, \boldsymbol{n}_2^I, \boldsymbol{b}_2^I\} = \{\pm\boldsymbol{b}, \mp\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\}$ となる. 定義 3.1 より, $\lambda(t) = \pm(\eta_1^I(t) - \eta_2^I(t)), \eta(t) = -(\lambda_1^I(t) - \lambda_2^I(t))$ とすると, $(\lambda, \eta) \not\equiv (0,0)$ である. $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ を $\overline{\gamma}(t) = Inv_1(\gamma)(t) + \lambda(t)\boldsymbol{n}_1^I(t) + \eta(t)\boldsymbol{b}_1^I(t)$ ととると,

$$
\begin{aligned}
\overline{\gamma}(t) &= Inv_1(\gamma)(t) + \lambda(t)\boldsymbol{n}_1^I(t) + \eta(t)\boldsymbol{b}_1^I(t) \\
&= \gamma(t) + \lambda_1^I(t)\boldsymbol{t}(t) + \eta_1^I(t)\boldsymbol{n}(t) - (\eta_1^I(t) - \eta_2^I(t))\boldsymbol{n}(t) - (\lambda_1^I(t) - \lambda_2^I(t))\boldsymbol{t}(t) \\
&= \gamma(t) + \lambda_2^I(t)\boldsymbol{t}(t) + \eta_2^I(t)\boldsymbol{n}(t) \\
&= Inv_2(\gamma)(t)
\end{aligned}
$$

となることから, $\overline{\gamma}$ は非退化な曲線である. したがって, 2 つの伸開線 $Inv_1(\gamma)$ と $Inv_2(\gamma)$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である. さらに, $\overline{\boldsymbol{t}}(t) = \boldsymbol{t}_2^I(t) = \boldsymbol{t}_1^I(t) = \boldsymbol{n}_1^I(t) \times \boldsymbol{b}_1^I(t)$ となる.

$\tau < 0$ としたとき, 伸開線 $Inv_1(\gamma), Inv_2(\gamma)$ の動標構は $\{\boldsymbol{t}_1^I, \boldsymbol{n}_1^I, \boldsymbol{b}_1^I\} = \{\boldsymbol{t}_2^I, \boldsymbol{n}_2^I, \boldsymbol{b}_2^I\} = \{\pm\boldsymbol{b}, \pm\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\}$ となり, $\tau > 0$ の場合と同じ結果が得られる. □

非退化な空間曲線の縮閉線と伸開線が逆に対応しない場合を考える. 以下の定理は, 定理 5.3 (2) と補題 5.4 から得られる.

定理 5.5. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を非退化な曲線とし, 曲率を κ, 捩率を $\tau \neq 0$ とする. 条件 (1) を満たし, $\lambda^E = 1/\kappa$, $\eta^E = -\dot{\kappa}/(|\dot{\gamma}|\kappa^2\tau)$ となる滑らかな写像 $(\lambda^E, \eta^E) : I \to \mathbb{R}^2$ が存在すると仮定する.

(i) $\tau > 0$ かつ $h > 0$ とし, 条件 (6) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^I, \eta_1^I) : I \to \mathbb{R}^2$ をもつ縮閉線の伸開線 $Inv_1(Ev(\gamma))$ が存在し, $(\lambda_1^I + \eta^E, \eta_1^I - \lambda^E) \not\equiv (0,0)$ とする. このとき $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ と $Inv_1(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である.

(ii) $\tau > 0$ かつ $h < 0$ とし, 条件 (6) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^I, \eta_1^I) : I \to \mathbb{R}^2$ をもつ縮閉線の伸開線 $Inv_1(Ev(\gamma))$ が存在し, $(\lambda_1^I - \eta^E, \eta_1^I + \lambda^E) \not\equiv (0,0)$ とする. このとき $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ と $Inv_1(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である.

(iii) $\tau < 0$ かつ $h > 0$ とし, 条件 (6) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^I, \eta_1^I) : I \to \mathbb{R}^2$ をもつ縮閉線の伸開線 $Inv_1(Ev(\gamma))$ が存在し, $(\lambda_1^I + \eta^E, \eta_1^I + \lambda^E) \not\equiv (0,0)$ とする. このとき $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ と $Inv_1(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である.

(iv) $\tau < 0$ かつ $h < 0$ とし, 条件 (6) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^I, \eta_1^I) : I \to \mathbb{R}^2$ をもつ縮閉線の伸開線 $Inv_1(Ev(\gamma))$ が存在し, $(\lambda_1^I - \eta^E, \eta_1^I - \lambda^E) \not\equiv (0,0)$ とする. このとき $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ と $Inv_1(Ev(\gamma)) : I \to \mathbb{R}^3$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である.

証明. (i) 定理 5.3 (2) の証明より, 条件 (6) を満たし, $(\lambda_1^I + \eta^E, \eta_1^I - \lambda^E) \not\equiv (0,0)$ となる滑らかな写像 $(\lambda_1^I, \eta_1^I) : I \to \mathbb{R}^2$ が存在し, 縮閉線の伸開線 $Inv_1(Ev(\gamma))(t) = \gamma(t) + (\lambda^E(t) - \eta_1^I(t))\boldsymbol{n}(t) + (\eta^E(t) + \lambda_1^I(t))\boldsymbol{b}(t)$ が存在する. さらに, 条件 (6) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_2^I, \eta_2^I) : I \to \mathbb{R}^2$ が存在し, 縮閉線の伸開線 $Inv_2(Ev(\gamma))(t) = \gamma(t) + (\lambda^E(t) - \eta_2^I(t))\boldsymbol{n}(t) + (\eta^E(t) + \lambda_2^I(t))\boldsymbol{b}(t)$ が存在する. $(\lambda_2^I, \eta_2^I) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda_2^I(t) = -\eta^E(t)$, $\eta^I(t) = \lambda^E(t)$ とした場合も, 条件 (6) を満たし, このとき $Inv_2(Ev(\gamma))(t) = \gamma(t)$ となる. 補題 5.4 より, $Inv_1(Ev(\gamma))$ と $Inv_2(Ev(\gamma)) = \gamma$ は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{t}})$-ベルトラン型曲線対である.

(ii), (iii), (iv) の場合も (i) と同じように証明することができる. □

6 枠付き曲線の縮閉線と伸開線

$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{x}})$-ベルトラン枠付き曲線を用いて, 枠付き曲線の縮閉線と伸開線を直接的に定義する. $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を曲率が (ℓ, m, n, α) となる枠付き曲線とする.

<u>定義</u> **6.1.** (1) 任意の点 $t \in I$ で

$$\begin{cases} \alpha(t) + \lambda^{\mathcal{E}}(t)m(t) + \eta^{\mathcal{E}}(t)n(t) = 0, \\ (\dot{\lambda}^{\mathcal{E}}(t) - \eta^{\mathcal{E}}(t)\ell(t)) \sin\theta^{\mathcal{E}}(t) + (\lambda^{\mathcal{E}}(t)\ell(t) + \dot{\eta}^{\mathcal{E}}(t)) \cos\theta^{\mathcal{E}}(t) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{E}}, \eta^{\mathcal{E}}) : I \to \mathbb{R}^2$ と滑らかな関数 $\theta^{\mathcal{E}} : I \to \mathbb{R}$ が存在するとき, 枠付き曲線 $\mathcal{E}(\gamma, \nu_1, \nu_2) = (\mathcal{E}v(\gamma, \nu_1, \nu_2), \nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma, \nu_1, \nu_2), \nu_2^{\mathcal{E}}(\gamma, \nu_1, \nu_2)) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}v(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t) = \gamma(t) + \lambda^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t) + \eta^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t), \\ &\nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t) = \sin\theta^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t) + \cos\theta^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t), \\ &\nu_2^{\mathcal{E}}(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t) = \mu(t), \end{aligned}$$

のように与える. このとき, $\mathcal{E}v(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3$ を枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) の縮閉線という.

(2) 任意の点 $t \in I$ で

$$\begin{cases} -\lambda^{\mathcal{I}}(t)m(t) + \dot{\eta}^{\mathcal{I}}(t) = 0, \\ \alpha(t) + \dot{\lambda}^{\mathcal{I}}(t) + \eta^{\mathcal{I}}(t)m(t) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{I}}, \eta^{\mathcal{I}}) : I \to \mathbb{R}^2$ が存在し, $\theta^{\mathcal{I}} : I \to \mathbb{R}$ を任意の滑らかな関数としたとき, 枠付き曲線 $\mathcal{I}(\gamma, \nu_1, \nu_2) = (\mathcal{I}nv(\gamma, \nu_1, \nu_2), \nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma, \nu_1, \nu_2), \nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma, \nu_1, \nu_2)) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}nv(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t) = \gamma(t) + \lambda^{\mathcal{I}}(t)\mu(t) + \eta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1(t), \\ &\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t) = \cos\theta^{\mathcal{I}}(t)\mu(t) - \sin\theta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1(t), \\ &\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t) = \sin\theta^{\mathcal{I}}(t)\mu(t) + \cos\theta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1(t), \end{aligned}$$

のように与える. このとき, $\mathcal{I}nv(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3$ を枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) の伸開線という.

<u>注意</u> **6.2.** 枠付き曲線 $\mathcal{E}(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ (あるいは $\mathcal{I}(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$) は $(\nu_1, \nu_2, \overline{\nu}_2)$ (あるいは $(\mu, \nu_1, \overline{\mu})$)-ベルトラン枠付き曲線に対応している.

枠付き曲線の縮閉線と伸開線が逆に対応する条件を考える.

<u>定理</u> **6.3.** $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を曲率が (ℓ, m, n, α) となる枠付き曲線とする.

(1) 条件 (8) を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{I}}, \eta^{\mathcal{I}}) : I \to \mathbb{R}^2$ を持つ枠付き曲線 $\mathcal{I}(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が存在し, 滑らかな関数 $\theta^{\mathcal{I}} : I \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定する. $(\lambda^{\mathcal{E}}, \eta^{\mathcal{E}}) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda^{\mathcal{E}} = \lambda^{\mathcal{I}} \cos\theta^{\mathcal{I}} - \eta^{\mathcal{I}} \sin\theta^{\mathcal{I}}$ と $\eta^{\mathcal{E}} = \lambda^{\mathcal{I}} \sin\theta^{\mathcal{I}} + \eta^{\mathcal{I}} \cos\theta^{\mathcal{I}}$, $\theta^{\mathcal{E}} : I \to \mathbb{R}$ を $\theta^{\mathcal{E}} = -\theta^{\mathcal{I}}$ とすると, 伸開線の縮閉線 $\mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma, \nu_1, \nu_2)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, 枠付き曲線 $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\gamma, \nu_1, \nu_2)) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\gamma, \nu_1, \nu_2)) = (\gamma, \nu_1, \nu_2)$ である.

(2) 条件 (7) を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{E}}, \eta^{\mathcal{E}}) : I \to \mathbb{R}^2$ と滑らかな関数 $\theta^{\mathcal{E}} : I \to \mathbb{R}$ を持つ枠付き曲線 $\mathcal{E}(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が存在すると仮定する. $(\lambda^{\mathcal{I}}, \eta^{\mathcal{I}}) : I \to \mathbb{R}^2$ を $\lambda^{\mathcal{I}} = \lambda^{\mathcal{E}} \cos\theta^{\mathcal{E}} - \eta^{\mathcal{E}} \sin\theta^{\mathcal{E}}$ と $\eta^{\mathcal{I}} = \lambda^{\mathcal{E}} \sin\theta^{\mathcal{E}} + \eta^{\mathcal{E}} \cos\theta^{\mathcal{E}}$ とすると, 縮閉線の伸開線 $\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma, \nu_1, \nu_2)) : I \to \mathbb{R}^3$ は存在し, さらに $\theta^{\mathcal{I}} : I \to \mathbb{R}$ を $\theta^{\mathcal{I}} = -\theta^{\mathcal{E}}$ とすると, 枠付き曲線 $\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma, \nu_1, \nu_2)) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は $\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma, \nu_1, \nu_2)) = (\gamma, \nu_1, \nu_2)$ である.

証明. (1) 定義 6.1 (2) より, 枠付き曲線 $\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2): I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=(\gamma(t)+\lambda^{\mathcal{I}}(t)\mu(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1(t),\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)\mu(t)-\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1(t),\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)\mu(t)+\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1(t))\end{aligned}$$

と与えられる. このとき, $(\lambda^{\mathcal{I}},\eta^{\mathcal{I}}): I\to\mathbb{R}^2$ は条件 (8) を満たす滑らかな写像であり, $\theta^{\mathcal{I}}: I\to\mathbb{R}$ は滑らかな関数である. 定義 6.1 (1) より, 枠付き曲線 $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2)): I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))&=\left(\mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma,\nu_1,\nu_2)),\nu_1^{\mathcal{E}}(\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)),\nu_2^{\mathcal{E}}(\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))\right),\\ \mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)&=\mathcal{I}nv(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\lambda^{\mathcal{E}}(t)\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=\gamma(t)+(\lambda^{\mathcal{I}}(t)+\lambda^{\mathcal{E}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t))\mu(t)\\&\quad+(\eta^{\mathcal{I}}(t)-\lambda^{\mathcal{E}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t))\nu_1(t),\\ \nu_1^{\mathcal{E}}(\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)&=\sin\theta^{\mathcal{E}}(t)\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\cos\theta^{\mathcal{E}}(t)\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=\sin(\theta^{\mathcal{E}}(t)+\theta^{\mathcal{I}}(t))\mu(t)+\cos(\theta^{\mathcal{E}}(t)+\theta^{\mathcal{I}}(t))\nu_1(t),\\ \nu_2^{\mathcal{E}}(\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)&=\mu^{\mathcal{I}}(t),\end{aligned}$$

と与えられ, $\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ に対する条件 (7) は

$$\begin{cases}(\eta^{\mathcal{I}}(t)-\lambda^{\mathcal{E}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t))\ell(t)\\ \quad-(\lambda^{\mathcal{I}}(t)+\lambda^{\mathcal{E}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t))n(t)=0,\\ \left(\dot{\lambda}^{\mathcal{E}}(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)(\dot{\theta}^{\mathcal{I}}(t)+m(t))\right)\sin\theta^{\mathcal{E}}(t)\\ \quad+\left(-\lambda^{\mathcal{E}}(t)(\dot{\theta}^{\mathcal{I}}(t)+m(t))+\dot{\eta}^{\mathcal{E}}(t)\right)\cos\theta^{\mathcal{E}}(t)=0,\end{cases}\tag{9}$$

となる. このとき $(\lambda^{\mathcal{E}},\eta^{\mathcal{E}}): I\to\mathbb{R}^2$ を

$$\lambda^{\mathcal{E}}(t)=\lambda^{\mathcal{I}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)-\eta^{\mathcal{I}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t),\ \eta^{\mathcal{E}}(t)=\lambda^{\mathcal{I}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t),$$

$\theta^{\mathcal{E}}: I\to\mathbb{R}$ を $\theta^{\mathcal{E}}(t)=-\theta^{\mathcal{I}}(t)$ とすると, 条件 (9) を満たす. したがって, 枠付き曲線の伸開線の縮閉線 $\mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma))$ は存在しており, $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2)): I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は

$$\mathcal{E}(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)=(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)$$

となる.

(2) 定義 6.1 (1) より, 枠付き曲線 $\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2): I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は

$$\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=(\gamma(t)+\lambda^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t),\sin\theta^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\cos\theta^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t),\mu(t))$$

と与えられる. このとき, $(\lambda^{\mathcal{E}},\eta^{\mathcal{E}}): I\to\mathbb{R}^2$ と $\theta^{\mathcal{E}}: I\to\mathbb{R}$ は条件 (7) を満たす滑らかな写像, 滑らかな関数である. 定義 6.1 (2) より, 枠付き曲線 $\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2)): I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2))&=\left(\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma,\nu_1,\nu_2)),\nu_1^{\mathcal{I}}(\nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)),\nu_2^{\mathcal{I}}(\nu_2^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))\right),\\ \mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)&=\mathcal{E}v(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\lambda^{\mathcal{I}}(t)\mu^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=\gamma(t)+(\lambda^{\mathcal{E}}(t)+\lambda^{\mathcal{I}}(t)\cos\theta^{\mathcal{E}}(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)\sin\theta^{\mathcal{E}}(t))\nu_1(t)\\&\quad+(\eta^{\mathcal{E}}(t)-\lambda^{\mathcal{I}}(t)\sin\theta^{\mathcal{E}}(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)\cos\theta^{\mathcal{E}}(t))\nu_2(t),\\ \nu_1^{\mathcal{I}}(\nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)&=\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)\mu^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)-\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=\cos(\theta^{\mathcal{E}}(t)+\theta^{\mathcal{I}}(t))\nu_1(t)-\sin(\theta^{\mathcal{E}}(t)+\theta^{\mathcal{I}}(t))\nu_2(t),\\ \nu_2^{\mathcal{I}}(\nu_2^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)&=\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)\mu^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)\nu_1^{\mathcal{E}}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=\sin(\theta^{\mathcal{E}}(t)+\theta^{\mathcal{I}}(t))\nu_1(t)+\cos(\theta^{\mathcal{E}}(t)+\theta^{\mathcal{I}}(t))\nu_2(t),\end{aligned}$$

と与えられ, $\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ に対する条件 (8) は

$$\begin{cases}-\lambda^{\mathcal{I}}(t)(\dot\theta^{\mathcal{E}}(t)-\ell(t))+\dot\eta^{\mathcal{I}}(t)=0,\\ \dot\lambda^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)(\dot\theta^{\mathcal{E}}(t)-\ell(t))\\ \quad +(\dot\lambda^{\mathcal{E}}(t)-\eta^{\mathcal{E}}(t)\ell(t))\cos\theta^{\mathcal{E}}(t)-(\lambda^{\mathcal{E}}(t)\ell(t)+\dot\eta^{\mathcal{E}}(t))\sin\theta^{\mathcal{E}}(t)=0,\end{cases} \tag{10}$$

となる. このとき $(\lambda^{\mathcal{I}},\eta^{\mathcal{I}}):I\to\mathbb{R}^2$ を

$$\lambda^{\mathcal{I}}(t)=\lambda^{\mathcal{E}}(t)\cos\theta^{\mathcal{E}}(t)-\eta^{\mathcal{E}}(t)\sin\theta^{\mathcal{E}}(t),\ \eta^{\mathcal{I}}(t)=\lambda^{\mathcal{E}}(t)\sin\theta^{\mathcal{E}}(t)+\eta^{\mathcal{E}}(t)\cos\theta^{\mathcal{E}}(t),$$

とすると, 条件 (10) を満たす. したがって, 枠付き曲線の縮閉線の伸開線 $\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma))$ は存在している. さらに, $\theta^{\mathcal{I}}:I\to\mathbb{R}$ を $\theta^{\mathcal{I}}(t)=-\theta^{\mathcal{E}}(t)$ とすると, $\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2)):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は

$$\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)=(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)$$

となる. □

次に, 枠付き曲線の縮閉線同士と伸開線同士の関係を考える.

補題 6.4. $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を曲率が (ℓ,m,n,α) となる枠付き曲線とする.

(1) 条件 (7) を満たす滑らかな関数 $\theta_1^{\mathcal{E}},\theta_2^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$ と滑らかな写像 $(\lambda_1^{\mathcal{E}},\eta_1^{\mathcal{E}}),(\lambda_2^{\mathcal{E}},\eta_2^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ をそれぞれ持つ 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{E}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2),\mathcal{E}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が存在し, $(\lambda_1^{\mathcal{E}}-\lambda_2^{\mathcal{E}},\eta_1^{\mathcal{E}}-\eta_2^{\mathcal{E}})\not\equiv(0,0)$ であるとする. このとき 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{E}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ と $\mathcal{E}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\mu,\nu_1,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線対である.

(2) 条件 (8) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^{\mathcal{I}},\eta_1^{\mathcal{I}})$, $(\lambda_2^{\mathcal{I}},\eta_2^{\mathcal{I}}):I\to\mathbb{R}^2$ をそれぞれ持つ 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{I}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2),\mathcal{I}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が存在し, $(\lambda_1^{\mathcal{I}}-\lambda_2^{\mathcal{I}},\eta_1^{\mathcal{I}}-\eta_2^{\mathcal{I}})\not\equiv(0,0)$ であるとし, $\theta_1^{\mathcal{I}},\theta_2^{\mathcal{I}}:I\to\mathbb{R}$ を任意の滑らかな関数とする. このとき 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{I}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ と $\mathcal{I}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\nu_1,\nu_2,\overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線対である.

証明. (1) 定義 6.1 (1) より, 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{E}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2),\mathcal{E}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は,

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=(\mathcal{E}v_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t),\nu_1^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t),\nu_2^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)),\\ &\mathcal{E}v_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\gamma(t)+\lambda_1^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\eta_1^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t),\\ &\nu_1^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\sin\theta_1^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\cos\theta_1^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t),\\ &\nu_2^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\mu(t),\\ &\mathcal{E}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=(\mathcal{E}v_2(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t),\nu_1^{\mathcal{E}2}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t),\nu_2^{\mathcal{E}2}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)),\\ &\mathcal{E}v_2(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\gamma(t)+\lambda_2^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\eta_2^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t),\\ &\nu_1^{\mathcal{E}2}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\sin\theta_2^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\cos\theta_2^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t),\\ &\nu_2^{\mathcal{E}2}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\mu(t),\end{aligned}$$

となる. このとき $\theta_1^{\mathcal{E}},\theta_2^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$, $(\lambda_1^{\mathcal{E}},\eta_1^{\mathcal{E}}),(\lambda_2^{\mathcal{E}},\eta_2^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ は条件 (7) を満たす滑らかな関数, 滑らかな写像である. $(\lambda,\eta):I\to\mathbb{R}^2$ を 4.1 より,

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=(-\lambda_1^{\mathcal{E}}(t)+\lambda_2^{\mathcal{E}}(t))\cos\theta_1^{\mathcal{E}}(t)-(-\eta_1^{\mathcal{E}}(t)+\eta_2^{\mathcal{E}}(t))\sin\theta_1^{\mathcal{E}}(t),\\ \eta(t)&=(-\lambda_1^{\mathcal{E}}(t)+\lambda_2^{\mathcal{E}}(t))\sin\theta_1^{\mathcal{E}}(t)+(-\eta_1^{\mathcal{E}}(t)+\eta_2^{\mathcal{E}}(t))\cos\theta_1^{\mathcal{E}}(t),\end{aligned}$$

ととると, $(\lambda,\eta)\not\equiv(0,0)$ である. $(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を $(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2)(t)=(\mathcal{E}v_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\lambda(t)\mu^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\eta(t)\nu_1^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t),\sin\theta_2^{\mathcal{E}}\nu_1(t)+\cos\theta_2^{\mathcal{E}}\nu_2(t),\mu(t))$ ととると,

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}(t)&=\mathcal{E}v_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\lambda(t)\mu^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)+\eta(t)\nu_1^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\\&=\gamma(t)+\lambda_2^{\mathcal{E}}(t)\nu_1(t)+\eta_2^{\mathcal{E}}(t)\nu_2(t)\\&=\mathcal{E}v_2(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)\end{aligned}$$

となることから, $(\overline{\gamma},\overline{\nu}_1,\overline{\nu}_2)$ は枠付き曲線であり, $\overline{\nu}_2(t)=\nu_2^{\mathcal{E}1}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)=\nu_2^{\mathcal{E}2}(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)$ となる. したがって, 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{E}_1(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ と $\mathcal{E}_2(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ は $(\mu,\nu_1,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線対である.

(2) (1) の場合と同じように証明することができる. □

枠付き曲線の縮閉線と伸開線が逆に対応しない場合を考える. 以下の定理は, 定理 6.3 と補題 6.4 から得られる. 証明は [6] を参照する.

定理 6.5. $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を曲率が (ℓ,m,n,α) となる枠付き曲線とする.

(1) 条件 (8) を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{I}},\eta^{\mathcal{I}}):I\to\mathbb{R}^2$ を持つ枠付き曲線 $\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ と滑らかな関数 $\theta^{\mathcal{I}}:I\to\mathbb{R}$ が存在し, 条件 (9) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_1^{\mathcal{E}},\eta_1^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ と滑らかな関数 $\theta_1^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$ をもつ枠付き曲線 $\mathcal{E}_1(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2)):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が存在し, $(\lambda^{\mathcal{I}}+\lambda^{\mathcal{E}}\cos\theta^{\mathcal{I}}+\eta^{\mathcal{E}}\sin\theta^{\mathcal{I}},\eta^{\mathcal{I}}-\lambda^{\mathcal{E}}\sin\theta^{\mathcal{I}}+\eta^{\mathcal{E}}\cos\theta^{\mathcal{I}})\not\equiv(0,0)$ かつ $\theta_1^{\mathcal{E}}+\theta^{\mathcal{I}}\not\equiv 0$ とする. このとき $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ と $\mathcal{E}_1(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2)):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\mu,\nu_1,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線対である.

(2) 条件 (7) を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{E}},\eta^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ と滑らかな関数 $\theta^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$ を持つ枠付き曲線 $\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が存在し, 条件 (10) を満たす滑らかな写像 $(\lambda^{\mathcal{I}},\eta^{\mathcal{I}}):I\to\mathbb{R}^2$ をもつ枠付き曲線 $\mathcal{I}_1(\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2)):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ と滑らかな関数 $\theta^{\mathcal{I}}:I\to\mathbb{R}$ が存在し, $(\lambda^{\mathcal{E}}+\lambda^{\mathcal{I}}\cos\theta^{\mathcal{E}}+\eta^{\mathcal{I}}\sin\theta^{\mathcal{E}},\eta^{\mathcal{E}}-\lambda^{\mathcal{I}}\sin\theta^{\mathcal{E}}+\eta^{\mathcal{I}}\cos\theta^{\mathcal{E}})\not\equiv(0,0)$ とする. このとき $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ と $\mathcal{I}(\mathcal{E}(\gamma,\nu_1,\nu_2)):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $(\nu_1,\nu_2,\overline{\mu})$-ベルトラン枠付き曲線対である.

証明. (1) 定理 6.3 (1) より, 条件 (9) を満たし, $(\lambda^{\mathcal{I}}+\lambda_1^{\mathcal{E}}\cos\theta^{\mathcal{I}}+\eta_1^{\mathcal{E}}\sin\theta^{\mathcal{I}},\eta^{\mathcal{I}}-\lambda_1^{\mathcal{E}}\sin\theta^{\mathcal{I}}+\eta_1^{\mathcal{E}}\cos\theta^{\mathcal{I}})\not\equiv(0,0)$ となる滑らかな写像 $(\lambda_1^{\mathcal{E}},\eta_1^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ と $\theta_1^{\mathcal{E}}+\theta^{\mathcal{I}}\not\equiv 0$ となる滑らかな関数 $\theta_1^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$ をもつ枠付き曲線

$$\mathcal{E}_1(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)=\big(\mathcal{E}v_1(\mathcal{I}nv(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t),\nu_1^{\mathcal{E}1}(\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t),\nu_2^{\mathcal{E}1}(\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)\big)$$

と条件 (9) を満たす滑らかな写像 $(\lambda_2^{\mathcal{E}},\eta_2^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ と滑らかな関数 $\theta_2^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$ をもつ枠付き曲線

$$\mathcal{E}_2(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)=\big(\mathcal{E}v_2(\mathcal{I}nv(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t),\nu_1^{\mathcal{E}2}(\nu_1^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t),\nu_2^{\mathcal{E}2}(\nu_2^{\mathcal{I}}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)\big)$$

が存在する. $(\lambda_2^{\mathcal{E}},\eta_2^{\mathcal{E}}):I\to\mathbb{R}^2$ を

$$\lambda_2^{\mathcal{E}}(t)=\lambda^{\mathcal{I}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t)-\eta^{\mathcal{I}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t),\ \eta_2^{\mathcal{E}}(t)=\lambda^{\mathcal{I}}(t)\sin\theta^{\mathcal{I}}(t)+\eta^{\mathcal{I}}(t)\cos\theta^{\mathcal{I}}(t),$$

$\theta_2^{\mathcal{E}}:I\to\mathbb{R}$ を $\theta_2^{\mathcal{E}}(t)=-\theta^{\mathcal{I}}(t)$ とした場合も, 条件 (9) を満たし, $\mathcal{E}_2(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))(t)=(\gamma,\nu_1,\nu_2)(t)$ となる. 補題 6.4 (1) より, 2 つの枠付き曲線 $\mathcal{E}_1(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))$ と $\mathcal{E}_2(\mathcal{I}(\gamma,\nu_1,\nu_2))$ すなわち (γ,ν_1,ν_2) は $(\mu,\nu_1,\overline{\nu}_2)$-ベルトラン枠付き曲線対である.

(2) (1) の場合と同じように証明することができる. □

謝辞

本研究を進めるにあたって, 佐治健太郎先生及び高橋雅朋先生の有益なご助言に対し, 心より感謝申し上げます. 本研究は, 京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援と JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2153 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I.* third edition, Springer-Verlag, Berlin, 1930.

[2] S. Honda, M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space. Advances in Geometry 2016; 16: 265–276. doi: 10.1515/advgeom-2015-0035

[3] S. Honda, M. Takahashi, Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 150, 2020, 497–516.

[4] S. Honda, M. Takahashi, Circular evolutes and involutes of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space. Adv. Stud. Pure Math., **89** 2025, 279-303.

[5] N. Nakatsuyama, M. Takahashi, Bertrand types of regular curves and Bertrand framed curves in the Euclidean 3-space. *To appear in Hokkaido Math. J.* 2024.

[6] N. Nakatsuyama, Evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean 3-space. in preparation, 2025.

Nozomi Nakatsuyama,
Muroran Institute of Technology
Muroran 050-8585
Japan
E-mail address: 25096009b@muroran-it.ac.jp