線織面の締括線の距離二乗関数を用いた特徴づけ

Characterization for striction curve on ruled surface using distance squared function

神戸大学大学院理学研究科数学専攻　　李 俊臻 *1
Junzhen Li
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University

神戸大学大学院理学研究科数学専攻　　佐治 健太郎 *2
Kentaro Saji
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University

Abstract

A ruled surface is a one-parameter family of lines in Euclidean space. For a ruled surface, there exists a curve that traverses each line most efficiently, called a striction curve. This paper characterizes striction curves by formulating the property of most efficient traversal, using the distance squared function. This paper supplements the survey of the part of the striction curve in [6] by adding an analysis of the case of circular surfaces.

1　線織面

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 内の曲線 $\gamma : (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ を考える．また, ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 内の直線全体を $P(n)$ とかく．写像 $L : (\boldsymbol{R}, 0) \to P(n)$ に対して $L(t)$ の基底 $X(t)$ をとる．写像

$$f(t, s) = \gamma(t) + sX(t)$$

を**線織面**といい, γ を**底曲線**, X を**方向曲線**という．各 t に対して $\{f(t,s) \,|\, s \in \boldsymbol{R}\}$ を**母線**という．線織面 f は L が定値写像のとき**柱面**という．線織面 f は $f : (\boldsymbol{R}^2, \{0\} \times \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^3$ なる写像芽と考えておく．また, X を $|X| = 1$ となるようにとることができる．このとき, X は非特異, つまり $X'(0) \neq 0$ と仮定する．ただし, $X'(0) = 0$ の場合でも $X'(t) = \alpha(t)\tilde{X}(t)$, $\tilde{X}(0) \neq 0$ となる $\tilde{X}$ をとることができれば同様の議論が可能であるが本稿では簡単のため $X'(0) \neq 0$ を仮定する．この仮定の下, パラメーターの取り替えにより $|X'| = 1$ と仮定できる．以降では考えている t 全てで $|X| = |X'| = 1$ と仮定する．

定義 1.1 線織面 $f = \gamma(t) + sX(t)$ 上の曲線 $\sigma(t) = \gamma(t) + s(t)X(t)$ が**締括線** (**striction curve**) であるとは任意の t で

$$\sigma' \cdot X' = 0$$

が成り立つときをいう．

*1 〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1
*2 〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1　E-mail: saji@math.kobe-u.ac.jp

柱面 $f(t,s)=\gamma(t)+sX(t)$ に対しては任意の関数 $s(t)$ に対して $\sigma(t)=\gamma(t)+s(t)X(t)$ は締括線である．締括線は線織線の無限小に近い母線の両方に直交する直線の軌跡 ([1, p242], [7, p191]) と説明されたり無限小に近い母線の間の最短距離を与える点の軌跡 ([2, p347]) と説明されたりする．この意味で, 締括線は母線たちを効率よく通っていく曲線であると説明できる．本稿では, 距離二乗関数を用いることにより, このことを説明する．

定義 1.2 線織面 f が**非柱面的**であるとは考えている定義域上で常に $X'\neq 0$ であるときをいう．

線織面 $f=\gamma(t)+sX(t)$ が非柱面的のとき, 締括線 σ は一意的に存在し,

$$\sigma(t)=\gamma(t)-\frac{\gamma'(t)\cdot X'(t)}{X'(t)\cdot X'(t)}X(t)$$

で与えられる．この式をみると, $X'\neq 0$ を仮定しなくても $X'(t)=\alpha(t)\tilde{X}(t)$ $(\tilde{X}(0)\neq 0)$ のようにとれて, $\gamma'(t)\cdot\tilde{X}(t)$ が $\alpha(t)h(t)$ のような形をしていれば締括線は定義できる．この方向の研究は [3] を参照されたい．

2 距離二乗関数と締括線

線織面 $f(t,s)=\gamma(t)+sX(t):(\boldsymbol{R}^2,\{0\}\times\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}^3$ $(|X|=1)$ に対して $\varepsilon>0$ をとる．このとき, テイラーの定理から

$$\gamma(\varepsilon)=\gamma(0)+\varepsilon\gamma'(0)+\varepsilon^2a(\varepsilon),$$
$$X(\varepsilon)=X(0)+\varepsilon X'(0)+\varepsilon^2b(\varepsilon)$$

となるベクトル値関数 a,b が存在する．ここで関数 $d:(\boldsymbol{R}^3,\{0\}\times\boldsymbol{R}^2)\to\boldsymbol{R}$ を $s_1,s_2\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$d(\varepsilon,s_1,s_2)=\frac{1}{2}|f(0,s_1)-f(\varepsilon,s_2)|^2$$

と定める．これは直線 $\gamma(0)+s_1X(0)$ と $\gamma(\varepsilon)+s_2X(\varepsilon)$ との各点間の距離を測っている．計算して

$$d(\varepsilon,s_1,s_2)=\frac{1}{2}\Big|(s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big|^2. \tag{2.1}$$

となる．式 (2.1) を s_1 と s_2 で微分して

$$d_{s_1}=X(0)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big), \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}d_{s_2}=&-X(0)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big)\\&-\varepsilon X'(0)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big)\\&-\varepsilon^2b(\varepsilon)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big).\end{aligned} \tag{2.3}$$

を得る．式 (2.2) から, $d_{s_1}=0$ は

$$s_1=s_2+\varepsilon(\gamma'(0)\cdot X(0))+\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\cdot X(0).$$

と同値である．これを (2.3) に代入して

$$d_{s_2}=\varepsilon^2\Big(\gamma'(0)\cdot X'(0)+s_2X'(0)\cdot X'(0)+\varepsilon *\Big),$$

を得る．ここで, $*$ は以降の計算で使わない部分を意味する．ゆえに d_{s_2} から因子 ε^2 を外に出して消去して, $(d_{s_1},d_{s_2})=(0,0)$ は

$$s_1=-\frac{\gamma'(0)\cdot X'(0)}{X'(0)\cdot X'(0)}+\varepsilon*,\quad s_2=-\frac{\gamma'(0)\cdot X'(0)}{X'(0)\cdot X'(0)}+\varepsilon*,$$

と同値であると考えることができる．これをみたす s_1 は締括線上の点を与えている．

3 円織面

第 2 節で述べたことを半径一定の円の 1-パラメーター族に適用する. はじめに少し [4] に沿って円織面の基本的定義を書く. **定径円織面**とは $\boldsymbol{R}^3$ 内の半径一定の円の 1-パラメーター族で, 曲線 $\gamma : (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ と $|X| = |Y| = 1,\ X \cdot Y = 0$ をみたす曲線 $X, Y : (\boldsymbol{R}, 0) \to \boldsymbol{R}^3$ と $r > 0$ に対して

$$f(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos\theta X(t) + \sin\theta Y(t))$$

で定義されるものである [4]. 関数 $\theta(t)$ に対して定まる曲線 $\sigma(t) = \gamma(t) + r(\cos\theta(t)X(t) + \sin\theta(t)Y(t))$ が**締括線**であるとは任意の t に対して

$$\sigma'(t) \cdot (\cos\theta(t)X(t) + \sin\theta(t)Y(t)) = 0$$

が成り立つときをいう. 円織面 $f(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos\theta X(t) + \sin\theta Y(t))$ が 0 で**非管状**であるとは

$$\Big(\gamma'(0) \cdot X(0),\ \gamma'(0) \cdot Y(0)\Big) \neq (0, 0)$$

が成り立つときをいう. 非管状円織面に対して締括線は 2 つ存在し, 各 t でそれらは円の直径対点にある [4, Proposition 3.3]. 円織面が**管面**であるとは常に $(\gamma' \cdot X,\ \gamma' \cdot Y) = (0, 0)$ であるときをいい, 管面に対しては任意の $\theta(t)$ に対して $\sigma(t) = \gamma(t) + r(\cos\theta(t)X(t) + \sin\theta(t)Y(t))$ は締括線となる.

線織面の場合と同様に関数 $d : (\boldsymbol{R}^3, \{0\} \times \boldsymbol{R}^2) \to \boldsymbol{R}$ を $\theta_1, \theta_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$d(\varepsilon, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}|f(0, \theta_1) - f(\varepsilon, \theta_2)|^2$$

と定める. これは円 $\gamma(0) + r(\cos\theta_1 X(0) + \sin\theta_1 Y(0))$ と $\gamma(\varepsilon) + r(\cos\theta_2 X(\varepsilon) + \sin\theta_2 Y(\varepsilon))$ との各点間の距離を測っている. ここで, $Z(t) = X(t) \times Y(t)$ とおくと $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$ は正規直交基底をなす. ゆえに

$$\gamma'(t) = k_1(t)X(t) + k_2(t)Y(t) + k_3(t)Z(t)$$

と

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_3(t) \\ -c_2(t) & -c_3(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

をみたす関数 $k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3$ がとれる [4, Section 3]. 線織面の場合と同様にテイラーの定理から

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon) &= \gamma(0) + \varepsilon\gamma'(0) + \varepsilon^2\Big(g_1(\varepsilon)X(0) + g_2(\varepsilon)Y(0) + g_3(\varepsilon)Z(0)\Big), \\ X(\varepsilon) &= X(0) + \varepsilon X'(0) + \varepsilon^2\Big(x_1(\varepsilon)X(0) + x_2(\varepsilon)Y(0) + x_3(\varepsilon)Z(0)\Big), \\ Y(\varepsilon) &= X(0) + \varepsilon Y'(0) + \varepsilon^2\Big(y_1(\varepsilon)X(0) + y_2(\varepsilon)Y(0) + y_3(\varepsilon)Z(0)\Big) \end{aligned}$$

と書ける. ここで, ε^2 の係数は $t = 0$ における正規直交基底 $\{X(0), Y(0), Z(0)\}$ を用いて書いていることに注意しておく. 線織面の場合と同様に $d_{\theta_1},\ d_{\theta_2}$ を計算すると

$$\begin{aligned} d_{\theta_1} =& r^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + r\Big(-k_2(0)\cos\theta_1 + k_1(0)\sin\theta_1 + r\,c_1(0)\sin\theta_1(\cos\theta_2 - \sin\theta_2)\Big)\varepsilon \\ &+ r\Big(-g_2(0)\cos\theta_1 + g_1(0)\sin\theta_1 \\ &\quad + r\cos\theta_2\big(x_1(0)\sin\theta_1 - x_2(0)\cos\theta_1\big) + r\sin\theta_2\big(y_1(0)\sin\theta_1 - y_2(0)\cos\theta_1\big)\Big)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

と

$$
\begin{aligned}
d_{\theta_2} =& r^2\sin(\theta_1-\theta_2)\\
&+r\Big(r\,c_1(0)\cos(2\theta_2)+r\,c_1(0)\sin(2\theta_2)\\
&\quad -\cos\theta_2\,k_2(0)+k_1(0)\sin\theta_2-r\,c_1(0)\cos\theta_1(\cos\theta_2+\sin\theta_2)\Big)\varepsilon\\
&+r\Bigg(r\cos^2\theta_2\,\Big(c_1(0)^2-c_2(0)c_3(0)-x_2(0)-y_1(0)\Big)\\
&\qquad +r\sin^2\theta_2\Big(-c_1(0)^2+c_2(0)c_3(0)+x_2(0)+y_1(0)\Big)\\
&\qquad +r\sin\theta_2\cos\theta_2\Big(c_2(0)^2-c_3(0)^2+2x_1(0)-2y_2(0)\Big)\\
&\quad +\sin\theta_2\Big(c_1(0)k_1(0)+c_2(0)k_3(0)-r\cos\theta_1\,x_1(0)-r\sin\theta_1\,x_2(0)+g_1(0)\Big)\\
&\quad +\cos\theta_2\Big(c_1(0)k_1(0)-c_3(0)k_3(0)+r\cos\theta_1\,y_1(0)+r\sin\theta_1\,y_2(0)-g_2(0)\Big)\Bigg)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

となる．これから ε が 0 に近いときの $d_{\theta_1}=0$ から, θ_1, θ_2 を近いと仮定して $\theta_1=\theta_2$ を得る．また, $d_{\theta_1}-d_{\theta_2}$ に $\theta_1=\theta_2$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{2}\Big(2r\big(c_1(0)^2-c_2(0)c_3(0)\big)\cos 2\theta_1+r\big(c_2(0)^2-c_3(0)^2\big)\sin 2\theta_1\\
&\quad +2\big(c_1(0)k_1(0)+c_2(0)k_3(0)\big)\sin\theta_1+2\big(c_1(0)k_1(0)-c_3(0)k_3(0)\big)\cos\theta_1\Big)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

を得る．式 (3.1) の ε^2 の係数の部分が 0 となる θ_1 が線織面の締括線の, 無限小に近い母線の間の最短距離を与える点の軌跡という性質を取り出して与えられる曲線である．式 (3.1) は半径 r に依存していることに注意しておく．式 (3.1) から, そのような曲線は定径円織面の締括線とは関係のない式となる．定径円織面の締括線は線織面の特異点が締括線の上にあるという性質 ([5, Lemma 2.2]) を取り出して定義されている ([4, (3.4), (3.6)]).

謝　辞

本研究は京都大学数理解析研究所共同利用・共同研究拠点の拠点事業を活用して行われた．また, JSPS 科研費 22KK0034, 25K07001 の助成を受けたものである．

参 考 文 献

[1] L. P. Eisenhart, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Boston, New York, Chicago, London: Ginn and Company, 1909.

[2] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Second edition. CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.

[3] H. Hayashi, *Geometry of ruled surfaces with finite multiplicity*, arXiv:2505.13823.

[4] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces*, Adv. Geom. **7** (2007), no. 2, 295–313.

[5] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Singularities of ruled surfaces in* $\boldsymbol{R}^3$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **130** (2001), no. 1, 1–11.

[6] J. Li and K. Saji, *Geometry of pseudo-non-degenerate two-ruled hypersurfaces*, arXiv:2603.03382v1.

[7] D. J. Struik, *Classical Differential Geometry*, Addison Wesley Publishing Company Inc U.S.A, 1950.