

On cuspidal edges on focal surfaces of regular surfaces with parabolic points *

山口大学大学院創成科学研究科 寺本圭佑

Keisuke Teramoto

Graduate School of Sciences and Technology for Innovation,
Yamaguchi University †

2026年3月27日

1 はじめに

3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 内の正則曲面に対して, その平行曲面や焦曲面は一般に特異点を持つ. カस्प辺は平行曲面や焦曲面に現れる代表的な特異点である. カस्प辺に対して, 極限法曲率, 特異曲率という不変量が導入されている ([6]). 極限法曲率は Gauss 曲率の有界性に関係しており, 特異曲率は, カस्प辺の凹凸に関する量である (図 1).

一方, 平行曲面の特異点 (の像) は, 焦曲面上に位置することが知られている ([2, 9]). したがって, 平行曲面の特異性と焦曲面の特異性の間に何らかの関係があることが示唆される. 本稿では, 焦曲面に現れるカस्प辺の極限法曲率と特異曲率に着目する. 特に, ある条件下で, 平行曲面に現れる特異点型と焦曲面のカस्प辺における特異曲率の符号の関係について得られた結果を紹介する.



図 1 特異曲率が正のカस्प辺 (左) と負のカस्प辺 (右).

* This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K13914. This work was also supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

† E-mail: kteramoto@yamaguchi-u.ac.jp

2 正則曲面

ここでは、正則曲面についていくつか復習する。詳細は、[10] を参照せよ。

U を \mathbb{R}^2 の開集合とし、 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 級のはめ込みとする。このとき、 f あるいは f の像を正則曲面と呼ぶ。 (u, v) を U の局所座標系とする。このとき、

$$\nu(u, v) = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}(u, v)$$

で定義されるベクトルを f の単位法ベクトルという。ただし、 $f_u = \partial f / \partial u$, $f_v = \partial f / \partial v$, \times は \mathbb{R}^3 のベクトル積、 $|\cdot|$ は \mathbb{R}^3 のノルムを意味する。

さて、正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ とその単位法ベクトル ν を用いて、以下の関数を定義する:

$$\begin{aligned} E &= \langle f_u, f_u \rangle, & F &= \langle f_u, f_v \rangle, & G &= \langle f_v, f_v \rangle, \\ L &= \langle f_{uu}, \nu \rangle, & M &= \langle f_{uv}, \nu \rangle, & N &= \langle f_{vv}, \nu \rangle. \end{aligned}$$

関数 E, F, G を f の第一基本量、 L, M, N を第二基本量という。これらを用いて、 f の Gauss 曲率 K と平均曲率 H は、

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

で与えられる。さらに、主曲率 κ_i ($i = 1, 2$) は、

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

で与えられる。

正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ は臍点を持たない、つまり、 U 上で $\kappa_1 \neq \kappa_2$ となる場合を考える。このとき、曲率線座標 (u, v) をとることができる。正則曲面が曲率線座標でパラメータ表示されているとき、 $F = M = 0$ が U 上で成り立つ。また、

$$\nu_u = -\kappa_1 f_u, \quad \nu_v = -\kappa_2 f_v \tag{2.1}$$

が成り立つ。

3 波面とその特異点

ここでは、特異点を許容する曲面である波面について述べる。 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 級写像とする。ただし、 U は \mathbb{R}^2 の開集合とする。このとき、 f が波面であるとは、 C^∞ 級写像 $\nu: U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ が存在して、

- 任意の $q \in U$, $v \in T_q \mathbb{R}^2$ に対して、 $\langle df_q(v), \nu(q) \rangle = 0$,
- 組 $(f, \nu): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ がはめ込みとなる

ときをいう ([2,6]). ここで, S^2 は単位球面を意味する. この写像 ν を波面 f の単位法ベクトルという.

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする. このとき, 点 $q \in U$ が f の特異点であるとは, $\text{rank } df_q < 2$ となるときをいう. $S(f)$ で f の特異点集合を表すことにする. いま, 関数 $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v)$$

と定めると, $S(f) = \lambda^{-1}(0)$ となることがわかる. この関数 λ を符号付き面積密度関数という. 特異点 $p \in S(f)$ が非退化特異点であるとは, $d\lambda(p) \neq 0$ となるときをいう. 点 p が非退化特異点であるとき, 陰関数定理から, ある正則曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ が存在して, $\lambda(\gamma(t)) = 0$ となるものが存在する. この曲線 γ を特異曲線という. さらに, $p \in S(f)$ において, $\text{rank } df_p = 1$ であるとする. このとき, p の近くで定義された零でないベクトル場 η が存在し, $df_p(\eta_p) = 0$ となる. このベクトル場を退化ベクトル場という. 点 p が非退化特異点ならば, $\text{rank } df_p = 1$ となるので, 退化ベクトル場が取れる.

定義 3.1. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 級写像とする.

- (1) f が点 $p \in U$ でカスプ辺であるとは, 写像芽 $f: (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽 $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ に \mathcal{A} -同値となるときをいう.
- (2) f が点 p でツバメの尾であるとは, 写像芽 $f: (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽 $(u, v) \mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ に \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- (3) f が点 p でカスプ状唇であるとは, 写像芽 $f: (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽 $(u, v) \mapsto (u, v^3 + u^2v, 3v^4 + 2u^2v^2)$ に \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- (4) f が点 p でカスプ状嘴であるとは, 写像芽 $f: (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽 $(u, v) \mapsto (u, v^3 - u^2v, 3v^4 - 2u^2v^2)$ に \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- (5) f が点 p でカスプ状蝶々であるとは, 写像芽 $f: (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽 $(u, v) \mapsto (u, 4v^5 + uv^2, 5v^4 + 2uv)$ に \mathcal{A} -同値であるときをいう.

これらは, 波面の階数 1 の特異点である. 階数 0 の特異点の代表的なものとして, D_4^\pm 特異点がある. 階数 1 の特異点の判定法として, 次が知られている.

定理 3.2 ([9]). $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面, 点 $p \in U$ を $\text{rank } df_p = 1$ を満たす特異点とする.

- (1) f が点 p でカスプ辺であるための必要十分条件は, $\eta\lambda(p) \neq 0$ となることである.
- (2) f が点 p でツバメの尾であるための必要十分条件は, $d\lambda(p) \neq 0$, $\eta\lambda(p) = 0$ かつ $\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ となることである.
- (3) f が点 p でカスプ状唇であるための必要十分条件は, $d\lambda(p) = 0$ かつ $\det \text{Hess}(\lambda)(p) > 0$ となることである.
- (4) f が点 p でカスプ状嘴であるための必要十分条件は, $d\lambda(p) = 0$, $\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ かつ $\det \text{Hess}(\lambda)(p) < 0$ となることである.
- (5) f が点 p でカスプ状蝶々であるための必要十分条件は, $d\lambda(p) \neq 0$, $\eta\lambda(p) = \eta\eta\lambda(p) = 0$

かつ $\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ となることである.

3.1 特異曲率と極限法曲率

ここでは、カस्प辺において定義される特異曲率と極限法曲率について述べる. 詳細は, [5,6] を参照せよ. 波面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が, 点 $p \in U$ でカस्प辺であるとする. このとき, 点 p を通る特異曲線 $\gamma(t)$ と点 p の周りで定義される退化ベクトル場 η がある. また, 点 p の近くで定義される γ に接するベクトル場 ξ が存在する. ここで, 組 (ξ, η) は点 p の近くで一次独立であることに注意する ([3]). このとき, 特異曲率 κ_s と極限法曲率 κ_ν は,

$$\kappa_s(p) = \operatorname{sgn}(\det(\gamma', \eta)(0)\eta\lambda(p)) \frac{\det(\xi f, \xi \xi f, \nu)}{|\xi f|^3}(p), \quad \kappa_\nu(p) = \frac{\langle \xi \xi f, \nu \rangle}{|\xi f|^2}(p)$$

で定義される ([5,6,9]). ここで, 極限法曲率は, 波面の階数 1 の特異点にも拡張して定義できることに注意する ([5]).

4 平行曲面

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を臍点を持たない正則曲面とし, ν を f の単位法ベクトルとする. また, (u, v) を曲率線座標とする. 固定された $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, 写像 $f^t: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f^t(u, v) := f(u, v) + t\nu(u, v)$$

で定め, f の平行曲面と呼ぶ. このとき, (2.1) を用いると,

$$f_u^t = (1 - t\kappa_1)f_u, \quad f_v^t = (1 - t\kappa_2)f_v \quad (4.1)$$

となることがわかる. したがって, f^t の単位法ベクトルとして ν をとることができる. 特に, f^t は波面になる.

4.1 平行曲面の特異点

ここでは, 臍点を持たない曲面の平行曲面に現れる特異点について考える. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を臍点を持たない正則曲面で, 曲率線座標 (u, v) でパラメータ表示されているものとする. このとき, 平行曲面 f^t は, (4.1) から,

$$f_u^t \times f_v^t = (1 - t\kappa_1)(1 - t\kappa_2)f_u \times f_v = (1 - t\kappa_1)(1 - t\kappa_2)|f_u||f_v|\nu$$

を満たすので, f^t の特異点集合 $S(f^t) = \{q \in U \mid \operatorname{rank} df^t < 2\}$ は,

$$S(f^t) = \bigcup_{i=1}^2 \{q \in U \mid t = 1/\kappa_i(q)\}.$$

したがって, $t = 1/\kappa_i(p)$ ($i = 1$ または 2) としたとき, 特異点集合は, $\kappa_i^{-1}(1/t)$, つまり, 主曲率一定曲線であることがわかる ([1]).

さて, $\kappa_1(p) \neq 0$ であるとし, $t = 1/\kappa_1(p)$ の場合を考える. このとき, f^t の特異点集合は, $S(f^t) = \kappa_1^{-1}(\kappa_1(p))$ である ([1]). さらに, 特異点の特徴づけとして次のことが知られている.

命題 4.1 ([1]). 臍点を持たない正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が曲率線座標 (u, v) でパラメータ表示されているとする. このとき, $t = 1/\kappa_1(p)$ ($p \in U$) である平行曲面 f^t について, 次が成り立つ.

- (1) f^t が点 p でカस्प辺であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_u(p) \neq 0$ となることである.
- (2) f^t が点 p でツバメの尾であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_u(p) = 0$, $(\kappa_1)_v(p) \neq 0$ かつ $(\kappa_1)_{uu}(p) \neq 0$ となることである.
- (3) f^t が点 p でカस्प状唇であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_u(p) = (\kappa_1)_v(p) = 0$ かつ $\det \text{Hess}(\kappa_1)(p) > 0$ となることである.
- (4) f^t が点 p でカस्प状嘴であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_u(p) = (\kappa_1)_v(p) = 0$, $(\kappa_1)_{uu}(p) \neq 0$ かつ $\det \text{Hess}(\kappa_1)(p) < 0$ となることである.
- (5) f^t が点 p でカस्प状蝶々であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_u(p) = (\kappa_1)_{uu}(p) = 0$, $(\kappa_1)_v(p) \neq 0$ かつ $(\kappa_1)_{uuu}(p) \neq 0$ となることである.

ここで, $\text{Hess}(\kappa_1)(p)$ は, κ_1 の点 p における Hesse 行列を意味する.

これは, f^t の符号付き面積密度関数 λ^t が,

$$\lambda^t = (1 - t\kappa_1)(1 - t\kappa_2) \det(f_u, f_v, \nu)$$

であることと, $\eta^t = \partial_u$ が f^t の退化ベクトル場を与えることから, 定理 3.2 を用いて示すことができる.

4.2 平行曲面の曲率

ここでは, 平行曲面の曲率について, ある種の有界性を満たす場合を見る. これまでと同様, 正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ には臍点がなく, 曲率線座標 (u, v) でパラメータ表示されているとする. このとき, 平行曲面 f^t の第一基本量及び第二基本量は,

$$\begin{aligned} E^t &= (1 - t\kappa_1)^2 E, & F^t &= 0, & G^t &= (1 - t\kappa_2)^2 G, \\ L^t &= (1 - t\kappa_1)L, & M^t &= 0, & N^t &= (1 - t\kappa_2)N \end{aligned}$$

となる. したがって, f^t の Gauss 曲率 K^t は,

$$K^t = \frac{K}{1 - 2tH + t^2K} = \frac{\kappa_1\kappa_2}{(1 - t\kappa_1)(1 - t\kappa_2)}$$

とわかる. したがって, f^t の特異点において K^t は非有界になり得ることがわかる. 平行曲面の特異点における K^t の挙動を調べるために, 次の有界性を導入しておく.

定義 4.2 ([4, 5]). C^∞ 級関数芽 $h_1, h_2: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対して, 関数芽 $g = h_1/h_2: (\mathbb{R}^2 \setminus h_2^{-1}(0), 0) \rightarrow \mathbb{R}$ が原点において有理的有界であるとは, ある自然数 n が存在して, $h_1, h_2 \in \mathcal{M}_2^n \setminus \mathcal{M}_2^{n+1}$ となることである.

さて, $t = 1/\kappa_1(p)$ の場合を考える. このとき, f^t の Gauss 曲率 K^t について, 次のことが言える.

- 命題 4.3** ([8]). (1) f^t が点 p でカスプ辺, ツバメの尾, カスプ状蝶々のいずれかであるとする. このとき, K^t が点 p で有理的有界であるための必要十分条件は, $\kappa_2(p) = 0$ となることである. さらに, K^t が点 p の近くで有界であるための必要十分条件は, $\kappa_2^{-1}(0) \supset S(f^t)$ が成り立つことである.
- (2) f^t が点 p でカスプ状唇またはカスプ状嘴であるとする. このとき, K^t が点 p で有理的有界であるための必要十分条件は, $\kappa_2(p) = (\kappa_2)_u(p) = (\kappa_2)_v(p) = 0$ かつ

$$((\kappa_2)_{uu}(p), (\kappa_2)_{uv}(p), (\kappa_2)_{vv}(p)) \neq (0, 0, 0)$$

となることである. さらに, K^t が点 p の近くで有界であるための必要十分条件は, $\kappa_2^{-1}(0) \supset S(f^t)$ が成り立つことである.

この命題から, 平行曲面 f^t ($t = 1/\kappa_1(p)$) が点 p で上述の特異点を持つとき, K^t が点 p で有理的有界 (あるいは点 p の近くで有界) ならば, $\kappa_2(p) = 0$ であることがわかる.

さて, 波面の余階数 1 の特異点に対して, 極限法曲率 κ_ν が定義できる. 平行曲面に対して, 極限法曲率は次のように与えられる.

- 命題 4.4** ([8]). 正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が臍点を持たないとする. また, 点 $p \in U$ において, $\kappa_1(p) \neq 0$ であるとする. このとき, f の平行曲面 f^t ($t = 1/\kappa_1(p)$) は, $\text{rank } df_p^t = 1$ を満たし, 極限法曲率 κ_ν^t は, 点 p において

$$\kappa_\nu^t(p) = \frac{\kappa_1(p)\kappa_2(p)}{\kappa_1(p) - \kappa_2(p)}$$

と書ける.

このことから, $\kappa_2(p) = 0$, つまり, p が f の放物点であるなら, f^t の極限法曲率は零になる. また, 有理的有界性と極限法曲率には次の関係があることがわかる.

- 系 4.5** ([5, 8]). 正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が臍点を持たないとし, 点 $p \in U$ において, $\kappa_1(p) \neq 0$ であるとする. このとき, 平行曲面 f^t ($t = 1/\kappa_1(p)$) に対して, 次が成り立つ.

- (1) f^t が点 p でカスプ辺, ツバメの尾あるいはカスプ状蝶々であるとする. このとき, K^t が点 p で有理的有界であることと, $\kappa_\nu^t(p) = 0$ となることは同値である.
- (2) f^t が点 p でカスプ状唇あるいはカスプ状嘴であるとする. このとき, K^t が点 p で有理的有界であるならば, $\kappa_\nu^t(p) = 0$ である.

5 焦曲面

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を臍点を持たない正則曲面で, 曲率線座標 (u, v) でパラメータ表示されているとする. さらに, $\kappa_1^{-1}(0) = \emptyset$ であるとする. このとき, 写像 $C_1: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$C_1(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa_1(u, v)}\nu(u, v)$$

で定め, f の κ_1 に関する焦曲面 (または, 縮閉面, コースティック) という. 焦曲面 C_1 の特異点集合 $S(C_1)$ は, $S(C_1) = \{q \in U \mid (\kappa_1)_u(q) = 0\}$ であることが知られている. さらに, 以下の特異点の特徴づけが知られている.

命題 5.1 ([2]). 上の状況で, 次が成り立つ.

- (1) C_1 が点 $p \in S(C_1)$ でカスプ辺であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_{uu}(p) \neq 0$ となることである.
- (2) C_1 が点 $p \in S(C_1)$ でツバメの尾であるための必要十分条件は, $(\kappa_1)_{uu}(p) = 0, (\kappa_1)_{uv}(p) \neq 0$ かつ $(\kappa_1)_{uuu}(p) \neq 0$ となることである.

命題 4.1 と命題 5.1 から, 平行曲面の特異点と焦曲面の関係として次のことが言える.

系 5.2 ([8]). 正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ について, $\kappa_1 \neq 0$ が U 上で成り立つとする. また, 点 $p \in U$ に対して, $t = 1/\kappa_1(p)$ とする.

- (1) 平行曲面 f^t が点 p でカスプ辺ならば, 焦曲面 C_1 は点 p で正則.
- (2) f^t が点 p でツバメの尾, カスプ状唇, カスプ状嘴のどれかであるならば, C_1 は点 p でカスプ辺である.

5.1 焦曲面に現れるカスプ辺

ここでは, 焦曲面に現れるカスプ辺の極限法曲率と特異曲率について得られた結果を述べる.

曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が曲率線座標 (u, v) でパラメータ表示されているとする. 主曲率 κ_1 が $\kappa_1^{-1}(0) = \emptyset$ であると仮定する. このとき, 焦曲面 C_1 が U 上で定義できる. さらに, 点 $p \in U$ において, $(\kappa_1)_u = 0, (\kappa_1)_{uu} \neq 0$ であると仮定すると, 命題 5.1 より, C_1 は点 p でカスプ辺を持つ. このとき, $\xi^{C_1} = -(\kappa_1)_{uv}\partial_u + (\kappa_1)_{uu}\partial_v$ が $S(C_1)$ に接するベクトル場, $\eta^{C_1} = \partial_u$ が C_1 の退化ベクトル場としてとれる. これらを用いると, 次を得る.

命題 5.3 ([8]). 上の状況で, C_1 の点 p における極限法曲率 $\kappa_\nu^{C_1}$ と特異曲率 $\kappa_s^{C_1}$ は,

$$\kappa_\nu^{C_1} = -\frac{\kappa_1^3(\kappa_2)_u G}{\sqrt{E}((\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_1^2 G + (\kappa_1)_v^2)},$$

$$\kappa_s^{C_1} = -\operatorname{sgn}((\kappa_1)_{uu} \kappa_1 (\kappa_1 - \kappa_2)) \frac{\kappa_1^3 \sqrt{G} X_1}{((\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_1^2 G + (\kappa_1)_v^2)^{3/2}}$$

である。ただし, X_1 は,

$$X_1 = (\kappa_1 - \kappa_2) \left((\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_1\kappa_2 G - \frac{\det \text{Hess}(\kappa_1)}{(\kappa_1)_{uu}} \right) + (\kappa_1)_v (2(\kappa_1)_v + \Gamma_{22}^2(\kappa_1 - \kappa_2) - (\kappa_2)_v)$$

である。

さて, 平行曲面がカusp状唇あるいはカusp状嘴を持つ場合, 焦曲面のカusp辺における特異曲率は次のようになる。

定理 5.4 ([8]). 正則曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が臍点を持たないとし, 主曲率 κ_1 が U 上で非零とする。また, 平行曲面 f^t ($t = 1/\kappa_1(p)$) が, 点 $p \in U$ でカusp状唇 (resp. カusp状嘴) を持つとする。このとき, $\kappa_\nu^t(p) = 0$ であるならば, $\kappa_s^{C_1}(p) > 0$ (resp. $\kappa_s^{C_1}(p) < 0$) となる。

C_2 についても同様の結果が成り立つ。ここで, 仮定 $\kappa_\nu^t(p) = 0$ は必要であることを注意しておく。

例 5.5. 曲面 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2}u^2 + u^4 + u^3v \right)$$

とする。このとき, $\kappa_1(0) = 1, \kappa_2(0) = 0$ を満たす。平行曲面 $f^1 = f + \nu$ は, 原点でカusp状唇を持つ。また, $\kappa_\nu^1(0) = 0$ であるとわかる。さらに, 焦曲面 C_1 は, 原点でカusp辺であり, その特異曲率は, $\kappa_s^{C_1}(0) = -12/7 < 0$ となる (図 2)。

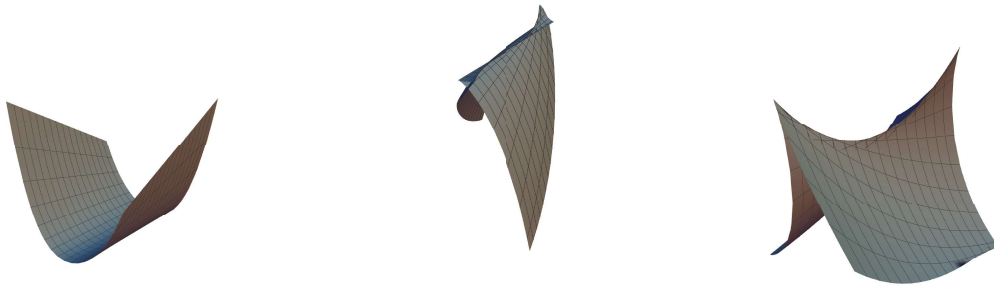


図 2 f の像 (左), f^1 の像 (中央), C_1 の像 (右).

例 5.6. 曲面 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2}u^2 + uv^2 + u^4 \right)$$

とする。このとき, $\kappa_1(0) = 1, \kappa_2(0) = 0$ を満たす。平行曲面 $f^1 = f + \nu$ は, 原点でカusp状唇を持つ。加えて, $\kappa_\nu^1(0) = 0$ である。さらに, 焦曲面 C_1 は, 原点でカusp辺であり, その特異曲率は, $\kappa_s^{C_1}(0) = 8 > 0$ となる (図 3)。



図3 f の像 (左), f^1 の像 (中央), C_1 の像 (右).

例 5.7. 曲面 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2}u^2 - v^2 + u^4 + u^3v \right)$$

とする. このとき, $\kappa_1(0) = 1, \kappa_2(0) = -2$ を満たす. 平行曲面 $f^{-1/2} = f - \nu/2$ は, 原点でカस्प状唇を持つ. さらに, $\kappa_\nu^{-1/2}(0) = 2/3 \neq 0$ である. 一方, 焦曲面 C_2 は, 原点でカस्प辺であり, その特異曲率は, $\kappa_s^{C_2}(0) = -9/4 < 0$ となる (図 4).

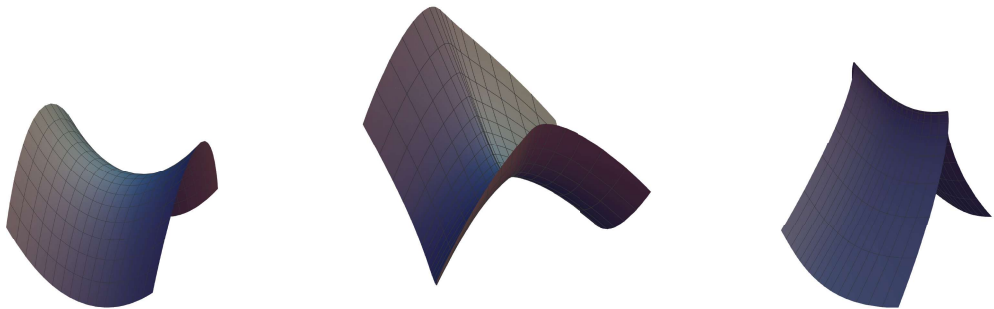


図4 f の像 (左), $f^{-1/2}$ の像 (中央), C_2 の像 (右).

参考文献

- [1] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), 387–408.
- [2] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific, 2016.
- [3] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), 445–462.

- [4] L. F. Martins, K. Saji, S. P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, Rev. Un. Mat. Argentina **67** (2024), 475–502.
- [5] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and topology of manifolds, Springer Proc. Math. Stat. vol 154, Springer, 2016, pp. 247–281.
- [6] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 491–529.
- [7] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [8] K. Teramoto, *Cuspidal edges on focal surfaces of regular surfaces*, preprint (2025).
- [9] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces with Singularities*, World Scientific, 2022.
- [10] M. Umehara and K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, 2017.