

# Apparent contour of simplicial maps of closed surfaces into the plane

山本卓宏 / Takahiro Yamamoto

東京学芸大学自然科学系数学講座 / Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University  
184-8501 小金井市貫井北町 4-1-1 / 4-1-1 Nukuikita-machi, Koganei-shi, Tokyo 184-8501, Japan  
yamush@u-gakugei.ac.jp

## 概要

著者は最近、滑らかさを約束しない写像（特に多様体  $M$  上の連続写像や離散点集合  $M \subset \mathbb{Z}^m$  上の写像）の特異性に興味がある。本稿は、そのような研究課題についての RIMS 共同研究（公開型）「可微分写像の特異点論とその応用」での講演「Apparent contour of simplicial maps of closed surfaces into the plane」の内容をまとめたものである。題目では単体写像という言葉を使っているが、[1] においてはここで扱う写像を区分線形写像（または、PL 写像）と呼んでいる。本稿では講演当時のまま単体写像という言葉を使用する。

本稿の目的は次の2つである：(A) 閉曲面上の単体写像に対して、逆像の振る舞いに注目し正則点、および、特異点を定義する。(B) 閉曲面に対して、単体写像を用いて単体的単純輪郭を定義し、いくつかの閉曲面に対してその単体的単純輪郭を決定する。

キーワード：閉曲面, 単体写像, ジェネリック

## 1 Introduction

可微分写像  $f: M \rightarrow N$  ( $\dim M \geq \dim N$ ) に対して、 $p \in M$  が  $f$  の正則点であるとは、 $p$  における  $f$  の微分写像  $(df)_p$  が全射であるときをいう。そうでないとき、 $p \in M$  を  $f$  の特異点と呼ぶ。 $f$  の特異点全体からなる集合を  $S(f)$  とかく。 $M$  が曲面で、 $N = \mathbb{R}^2$  であるとき、可微分写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  の特異値集合  $f(S(f))$  を  $f$  による  $M$  の輪郭（または、輪郭線, **apparent contour**）と呼び、 $\gamma(f)$  とかく。

閉曲面  $M$  上の可微分写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  に関するある性質がジェネリック (generic) であるとは、その性質を満たす写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  全体からなる  $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$  の部分集合が Whitney  $C^\infty$  位相に関して残留集合  $\emptyset$  を部分集合にもつときをいう。さらに、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  がジェネリックであるとは、 $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  のジェネリックな性質を全て満たすときをいう。一般に、可微分写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  のジェネリックな性質は横断性定理により特徴づけられる。例えば、[3] を参照する。

**命題 1.1.** 可微分写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  がジェネリックであるための必要十分条件は次の2条件を満たすことである。

- (i) 各  $p \in M$  に対して、写像芽  $(f, p)$  は以下のどれかと  $C^\infty$  同値である。

$$(x, y) \rightarrow (x, y), \quad (x, y^2), \quad (x, y^3 + xy).$$

左から順に、 $p$  を正則点、折り目特異点、カスプ特異点と呼ぶ。

- (ii) 各  $q \in f(S(f))$  に対して、 $f^{-1}(q) \cap S(f)$  に含まれる点の個数は1 または 2 でありかつ、2 となるときその特異点はそれぞれ折り目特異点であり  $f(S(f))$  は  $q$  において横断的に交わる。図 1 を参照する。

閉曲面  $M$  上の可微分写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  がジェネリックであれば条件 (i) により  $f$  の特異点集合  $S(f)$  は有限個の円周の非交和に同相であり、カスプ特異点、ノードの個数は有限個である。そこで、 $f$  のカスプ特異点の個数、ノードの個数、 $S(f)$  の連結成分数をそれぞれ  $c(f)$ ,  $n(f)$ ,  $i(f)$  と表す。

**例 1.2** (閉曲面から平面へのジェネリックな写像). (1) 2次元球面  $S^2$  の空間  $\mathbb{R}^3$  への標準的な埋め込み  $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  と  $xy$  平面へ直交射影  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi_{xy}} \mathbb{R}^2$  の合成により  $f_1: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める。 $f_1$  はジェネリックな可微分写像である。特に、 $S(f_1)$  は円周に同相である。

(2)  $\Sigma_1$  から空間  $\mathbb{R}^3$  への標準的な埋め込み  $\Sigma_1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  と  $xy$  平面へ直交射影  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi_{xy}} \mathbb{R}^2$  の合成により  $f_2: \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める。 $f_2$  はジェネリックな可微分写像である。特に、 $S(f_2)$  は2つの円周の非交和に同相である。

(3)  $\Sigma_1$  から空間  $\mathbb{R}^3$  への標準的な埋め込み  $\Sigma_1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  と  $xy$  平面への斜めの方向からの射影  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2$  の合成により  $f_3: \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める。 $f_3$  はジェネリックな可微分写像である。特に、 $f_3$  の特異点は4つのカスプ特異点を持ち、 $S(f_3)$  は2つの円周の非交和に同相である。

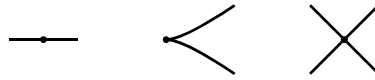


図1 閉曲面上のジェネリックな可微分写像の輪郭の局所形

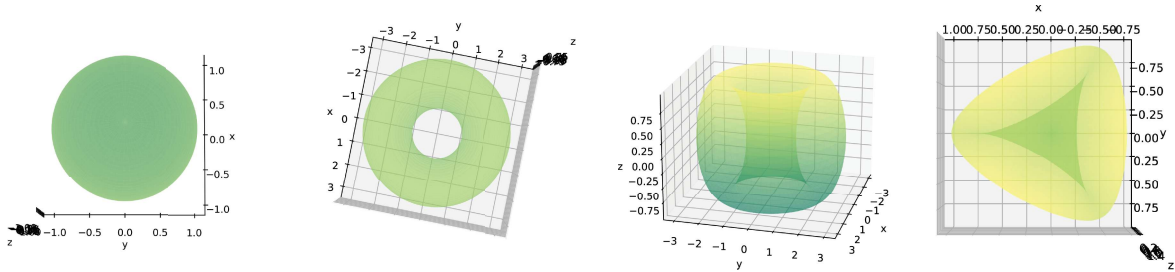


図2 輪郭  $\gamma(f)$  (左からそれぞれ  $\gamma(f_1), \gamma(f_2), \gamma(f_3), \gamma(f_4)$ )

(4)  $\mathbb{R}P^2$  から空間  $\mathbb{R}^3$  へのローマン曲面としての写像  $\mathbb{R}P^2 \xrightarrow{\text{roman}} \mathbb{R}^3$  と  $xy$  平面への直交射影  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi_{xy}} \mathbb{R}^2$  の合成により  $f_4: F_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める.  $f_4$  はジェネリックな可微分写像である. 特に,  $f_4$  は3つのカusp特異点を持ち,  $S(f_4)$  は2つの円周の非交和に同相である.

図2に  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) の輪郭を挙げる.

Thom の定理, Pignoni の定理が示すように, 可微分写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  がジェネリックであれば,  $\gamma(f)$  の形状は  $M$  のトポロジーを反映する.

**定理 1.3** (Thom [14]). 閉曲面  $M$  から平面へのジェネリックな写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して,  $M$  のオイラー標数  $\chi(M)$  と  $f$  のカusp特異点の個数は偶奇を等しくする.

**定理 1.4** (Pignoni [12]). 閉曲面  $M$  から平面へのジェネリックな写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して, 次が成立する.

$$\text{genus}(M) = \varepsilon(N + \frac{c(f)}{2} + (1 + I)).$$

与えられた曲面  $M$  に対して,  $M$  の輪郭で”最も簡単”な形状には無駄がないと考えられるため,  $M$  のトポロジーが凝縮されていると期待できる\*1. そこで, 閉曲面  $M$  上のジェネリックな写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して, 以下のような”最も簡単”な輪郭が定義され研究されてきた.

**定義 1.5** (Pignoni [11]). 輪郭  $\gamma(f)$  が  $M$  の本質的輪郭 (essential contour) であるとは, 特異点集合の成分数が1, カusp特異点の個数が1であるジェネリックな写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  のうち  $f$  のノードの数  $n(f)$  が最小であるときをいう.

**定義 1.6** (Pignoni [12]). 輪郭  $\gamma(f)$  が  $M$  の最小輪郭 (minimal contour) であるとは, 特異点集合の成分数が1であるジェネリックな写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  のうち  $f$  のカusp特異点の数とノードの数の和  $c(f) + n(f)$  の値が最小であるときをいう.

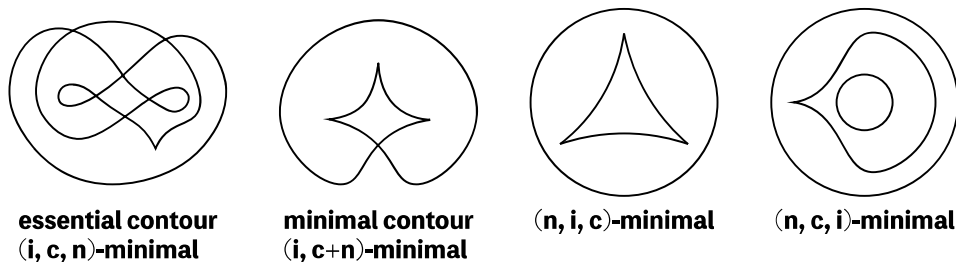
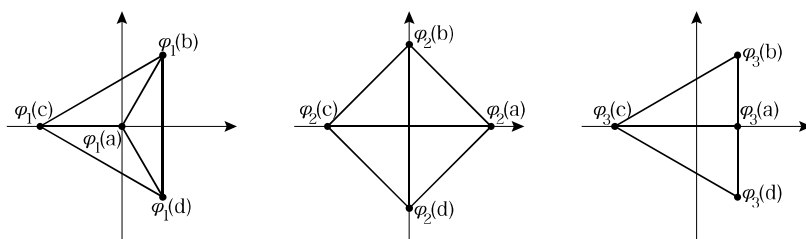
$c, n, i$  及び, これらからいくつか選んだものの和からなる順序対または順序三つ組を  $\Lambda$  とおく.

**定義 1.7** (山本 [17]). 輪郭  $\gamma(f)$  が  $M$  の  $\Lambda$ -最小輪郭 ( $\Lambda$ -minimal contour) であるとは, ジェネリックな可微分写像  $M \rightarrow \mathbb{R}^2$  全体において,  $f$  に関する  $\Lambda$  の値  $\Lambda(f)$  が辞書式順序に関して最小であるときをいう.

**注意 1.8.**  $\Lambda$ -最小輪郭の言葉を使うと, 本質的輪郭は  $(i, c, n)$ -最小輪郭であり, 最小輪郭は  $(i, c + n)$ -最小輪郭である.

**例 1.9.** 射影平面  $\mathbb{R}P^2$  の  $\Lambda$ -最小輪郭に関して図3を参照する.

\*1 もちろん, 定置写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  の特異点集合は  $M$  自身であり, その輪郭は  $\mathbb{R}^2$  内の1元集合である. 考えようによればこの輪郭が”最も簡単”と考えることができる. しかし, このような輪郭からは  $M$  のトポロジーや幾何学といった情報を読み取ることは不可能である. よって, このような写像は研究対象から外し, ジェネリックな写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  の輪郭  $\gamma(f)$  を研究対象として考える.

図3 射影平面  $\mathbb{R}P^2$  の輪郭.図4 単体写像  $\varphi_i: (S^2, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, 3$ )

定義 1.5, 1.6, 1.7 では, ”最も簡単”な輪郭を定義するのにジェネリックな写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  の輪郭のカスプやノードといった特異点や成分数により定義されている. 本稿では, 単体写像  $(M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を用いて  $M$  の”最も簡単”な輪郭を定義し, いくつかの閉曲面に対してその形状を決定する.

本稿を通して, 多様体や曲面  $M$ , 写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  はそれぞれ (特に何も言わない場合は)  $C^\infty$  級に滑らかであるとする.  $\Sigma_g$  ( $g \geq 0$ ) で種数  $g$  の向き付け可能な閉曲面をあらわし,  $F_g$  ( $g \geq 1$ ) で種数  $g$  の向き付け不可能な閉曲面をあらわす. 特に,  $\Sigma_0$  は 2次元球面  $S^2$  をあらわし,  $F_1$  は射影平面  $\mathbb{R}P^2$  をあらわすとする.

## 2 Simplicial maps

閉曲面  $M$  と  $M$  の単体分割  $\mathcal{K}$  を考える. このとき,  $\mathcal{K}$  の頂点全体からなる集合  $V(\mathcal{K})$  上の写像  $\varphi: V(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を区分離形拡張することにより多面体  $M = |\mathcal{K}|$  上の連続写像  $\varphi_M: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  が誘導される. こうして得られる連続写像  $\varphi_M$  を  $\varphi$  が誘導する単体写像 (simplicial map) と呼び,  $M$  に単体分割  $\mathcal{K}$  が指定されていることを明示し記号を省略して  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  とかく.

**例 2.1.** 3-単体  $\sigma = |a b c d|$  の真の辺単体全体からなる単体複体を  $\mathcal{K}$  とおくと,  $\mathcal{K}$  は 2次元球面  $S^2$  の単体分割である. 図 4 により単体写像  $\varphi_i: (S^2, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を定義する. 単体写像  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  に関して, 各 2-単体の像は平面  $\mathbb{R}^2$  内の 2-単体であることに注意する. 一方で,  $\varphi_3$  に関しては 2-単体  $|a b d|$  の像は  $\mathbb{R}^2$  内の線分である. しかし,  $\varphi_3$  に関して  $a$  の像の位置を摂動すればこの状況を回避することができる.

単体写像  $\varphi_1$  に関する 1 点の逆像を考える.  $\varphi_1$  の像は  $\varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)$  を頂点とする三角形の内部およびその境界であり, その境界 (1 単体  $|b c|, |c d|, |d b|$  の像) を境に逆像の成分数が増える. 特に, この三角形の外部の点では逆像は空集合であり, 三角形の内部の点では逆像は 2 元集合である.  $\varphi_2$  に関しても同様である. 一方,  $\varphi_3$  に関しては像の境界は 1 単体  $|b c|, |c d|, |d b|$  の像および 2 単体  $|a b d|$  の像である.

以上の考察のもと, 単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して, 逆像の変化に基づき, 正則点及び特異点を定義し, さらに  $\varphi$  にジェネリックという言葉を実義する. ここで, 単体写像に対してはジェネリックという言葉は一般的に使われてきた言葉ではないことに注意する.

まず, 単体写像  $(M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して, 正則点及び特異点を定義しよう.

**定義 2.2** (単体写像の正則点と特異点).  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を閉曲面  $M$  上の単体写像とする.

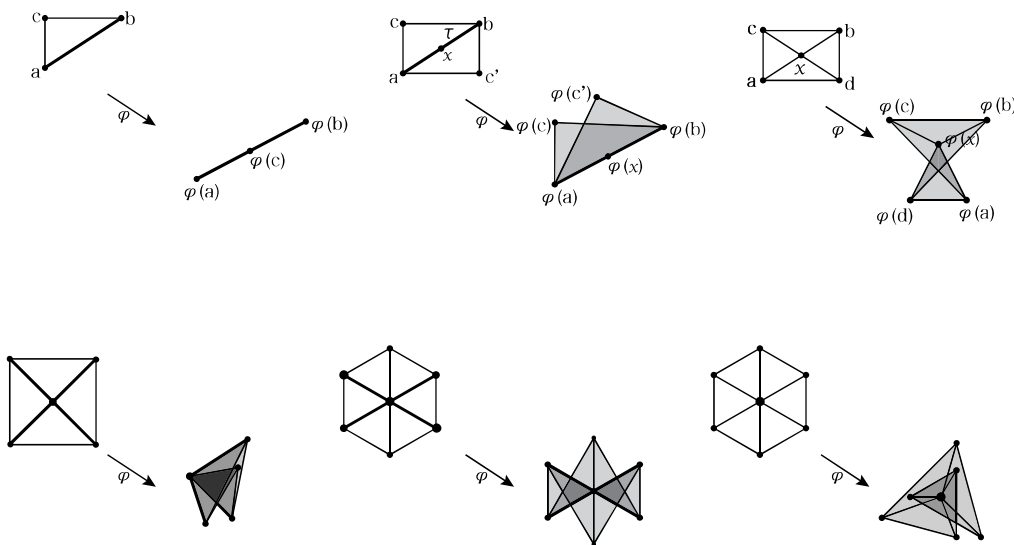


図5 単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  の特異点の例 (全てではない)

- (0) 2-単体  $|a b c| \in \mathcal{K}$  が  $\varphi$  に関して**正則**であるとは、 $\mathbb{R}^2$  上の点  $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)$  が一般の位置にあるときをいう。そうでないとき、2-単体  $|a b c| \in \mathcal{K}$  は  $\varphi$  に関して**特異**であるという。  $\varphi$  に関して正則な 2-単体が与えられたとき、その内部の点を  $\varphi$  の**正則点**と呼び、  $\varphi$  に関して特異な 2-単体の内部の点を  $\varphi$  の**特異点**と呼ぶ。
- (1) 1-単体  $|a b| \in \mathcal{K}$  が  $\varphi$  に関して**正則**であるとは、  $|a b|$  を辺単体とする任意の 2-単体は  $\varphi$  に関して正則であり、かつ、  $|a b|$  を辺単体にもつ 2-単体を  $|a b c|, |a b c'|$  とおくと  $\varphi(c)$  と  $\varphi(c')$  が  $\varphi(a)$  と  $\varphi(b)$  を通る直線に関して互いに逆側にあるときをいう。そうでないとき、  $|a b| \in \mathcal{K}$  は  $\varphi$  に関して**特異**であるという。  $\varphi$  に関して正則な 1-単体が与えられたとき、その内点を  $\varphi$  の**正則点**と呼び、  $\varphi$  に関して特異な 1-単体の内点を  $\varphi$  の**特異点**と呼ぶ。
- (2) 頂点  $x \in V(\mathcal{K})$  が  $\varphi$  に関して**正則点**であるとは、  $x$  を頂点にもつ任意の 2-単体  $|x a b|$ 、 1-単体  $|x a|$  は  $\varphi$  に関して正則であり、かつ、  $\varphi$  の星状近傍  $\text{Star}_{\mathcal{K}}(x)$  への制限写像がその像への単射であるときである。そうでないとき、  $x \in V(\mathcal{K})$  を  $\varphi$  の**特異点**と呼ぶ。

$\varphi$  の特異点全体からなる集合を  $S(\varphi)$  とかく。

図5に閉曲面上の単体写像  $(M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  の特異点の例を挙げる。

**注意 2.3.** 著者は最近、滑らかさを約束しない写像 (特に多様体  $M, N$  の間の連続写像  $f: M \rightarrow N$  や離散点集合  $M \subset \mathbb{Z}^m$  上の写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) の特異性に興味がある。そのような興味の中で、多様体間の連続写像  $\psi: M \rightarrow N$  に対して次のような正則点及び特異点を定義した。点  $p \in M$  が  $\psi$  の**ファイバー正則点**であるとは、写像芽  $\psi: (M, x) \rightarrow (N, f(x))$  の代表元  $\psi: U \rightarrow V$  で自明なファイバー束と同相となるものが存在するときをいう。  $p \in M$  が  $\psi$  のファイバー正則点でないとき**ファイバー特異点**であるという。定義 2.2 で定義した単体写像の特異点は全てファイバー特異点である。

**定義 2.4** (折り目特異点とカスプ特異点). 閉曲面上の単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を考える。

- (1) 1-単体  $|a b| \in \mathcal{K}$  が  $\varphi$  の**折り目 1-単体 (fold edge)** であるとは、  $|a b|$  を辺単体とする任意の 2 単体が  $\varphi$  に関して正則でありかつ、  $|a b|$  を辺単体にもつ 2-単体を  $|a b c|, |a b c'|$  とおくと  $\varphi(c)$  と  $\varphi(c')$  が  $\varphi(a)$  と  $\varphi(b)$  を通る  $\mathbb{R}^2$  上の直線に関して同じ側にあるときをいう。図 6 左を参照する。折り目 1-単体の内部の点を**折り目特異点**と呼ぶ。
- (2) 頂点  $x \in V(\mathcal{K})$  が  $\varphi$  の**折り目特異点 (fold singularity)** であるとは、  $x$  に隣接する折り目 1-単体は 2 つでありかつ、必要であれば  $x$  の周りにあるいくつかの正則 1-単体及びそれに隣接する  $x$  でない方の頂点を無視する (または、正則 1-単体を追加する) ととき、  $\varphi$  が  $x$  の周りで図 6 中央に示す単体写像  $\tilde{\varphi}: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  と射影  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

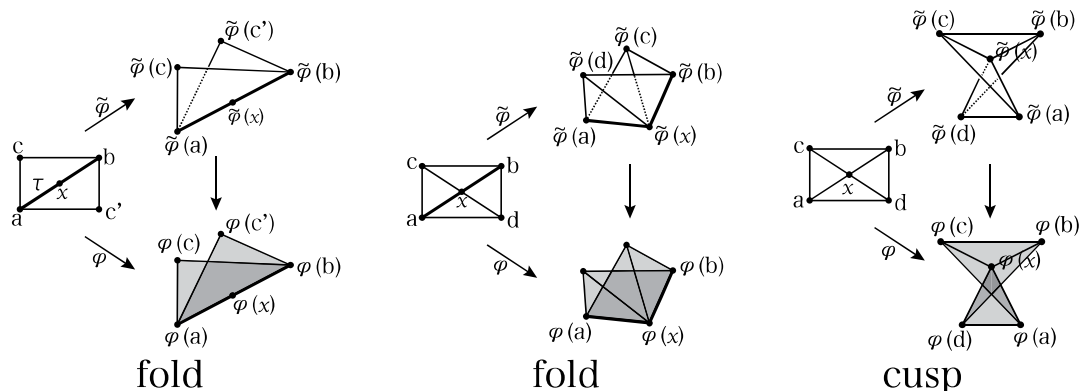


図6 左：折り目1-単体，中央：折り目特異点，右：カusp特異点

の合成写像に分解できるときをいう。

- (3) 頂点  $x \in V(\mathcal{K})$  が  $\varphi$  のカusp特異点 (cusp singularity) であるとは、 $x$  に隣接する折り目1-単体は2つでありかつ、必要であれば  $x$  の周りにおけるいくつかの正則1-単体及びそれに隣接する  $x$  でない方の頂点を無視する（または、正則1-単体を追加する）とき、 $\varphi$  が  $x$  の周りで図6右に示す単体写像  $\tilde{\varphi}: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  と射影  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の合成写像に分解できるときをいう。

**定義 2.5** (ジェネリックな単体写像). 閉曲面上の単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  がジェネリックであるとは次の条件を満たすときをいう。

- (1)  $\varphi$  の特異点は折り目特異点かカusp特異点のいずれかである。
- (2) 各  $y \in \varphi(S(\varphi))$  に対して、 $y$  の  $\varphi|_{S(\varphi)}$  による逆像  $(\varphi|_{S(\varphi)})^{-1}(y)$  の含まれる点の個数は1また2でありかつ、2となるときその特異点はそれぞれ折り目特異点であり  $\varphi(S(\varphi))$  は  $y$  において横断的に交わる。

**注意 2.6.** ジェネリックな単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して特異点集合  $S(\varphi)$  はいくつかの円周の非交和に同相である。

**例 2.7.** 例2.1で構成した単体写像  $\varphi_i: (S^2, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) について、 $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  はジェネリックであるが、 $\varphi_3$  はジェネリックではない。特に、 $S(\varphi_1) = |bc| \cup |cd| \cup |da| \cup |ab| \cup |c| \cup |d|$ ,  $S(\varphi_2) = |ab| \cup |bc| \cup |cd| \cup |da| \cup |a| \cup |b| \cup |c| \cup |d|$ ,  $S(\varphi_3) = |ab| \cup |cd| \cup |a| \cup |b| \cup |c| \cup |d| \cup |da| \cup |db| \cup |a| \cup |b| \cup |c| \cup |d|$  であり、 $\varphi_1, \varphi_2$  に関して特異点は全て折り目特異点である。さらに、 $\varphi_1, \varphi_2$  は共に例1.2(1)で構成した  $f_1$  に  $C^0$  同値である。ここで、写像  $f, g: M \rightarrow N$  が  $C^0$  同値であるとは、同相写像  $\varphi: M \rightarrow M$ ,  $\Psi: N \rightarrow N$  で  $\Psi \circ f = g \circ \varphi$  を満たすものが存在するときをいう。

**例 2.8.** (1)  $\mathcal{K}$  を図7の上段左に示す  $\Sigma_1$  の単体分割とし、単体写像  $\varphi: (\Sigma_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を図7の上段右により定める。このとき、 $\varphi$  はジェネリックな単体写像であり、 $S(\varphi)$  は2つの連結成分からなる。 $\varphi$  はカusp特異点をもたない。さらに、 $\varphi$  は例1.2(2)で構成した  $f_2$  に  $C^0$  同値である。

(2)  $\mathcal{K}$  を図7の中段左に示す  $\Sigma_1$  の単体分割とし、単体写像  $\varphi: (\Sigma_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を図7の中段右により定める。このとき、 $\varphi$  はジェネリックな単体写像であり、 $S(\varphi)$  は2つの連結成分からなる。 $\varphi$  は  $3, 4, 5, 6 \in V(\mathcal{K})$  をカusp特異点にもつ。さらに、 $\varphi$  は例1.2(3)で構成した  $f_3$  に  $C^0$  同値である。

(3)  $\mathcal{K}$  を図7の下段左に示す  $F_1$  の単体分割とし、単体写像  $\varphi: (F_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を図7の下段右により定める。このとき、 $\varphi$  はジェネリックな単体写像であり、 $S(\varphi)$  は2つの連結成分からなる。 $\varphi$  は  $1, 2, 5 \in V(\mathcal{K})$  をカusp特異点にもつ。さらに、 $\varphi$  は例1.2(4)で構成した  $f_4$  に  $C^0$  同値である。

さて、ジェネリックな単体写像について次が成立する。

**命題 2.9.** 閉曲面  $M$  上の単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を考える。このとき、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ジェネリックな単体写像  $\varphi': (M, \mathcal{K}') \rightarrow \mathbb{R}^2$  で、各  $x \in M$  に対して  $\|\varphi(x) - \varphi'(x)\| < \varepsilon$  を満たすものが存在する。ここで、 $x, y \in \mathbb{R}^2$

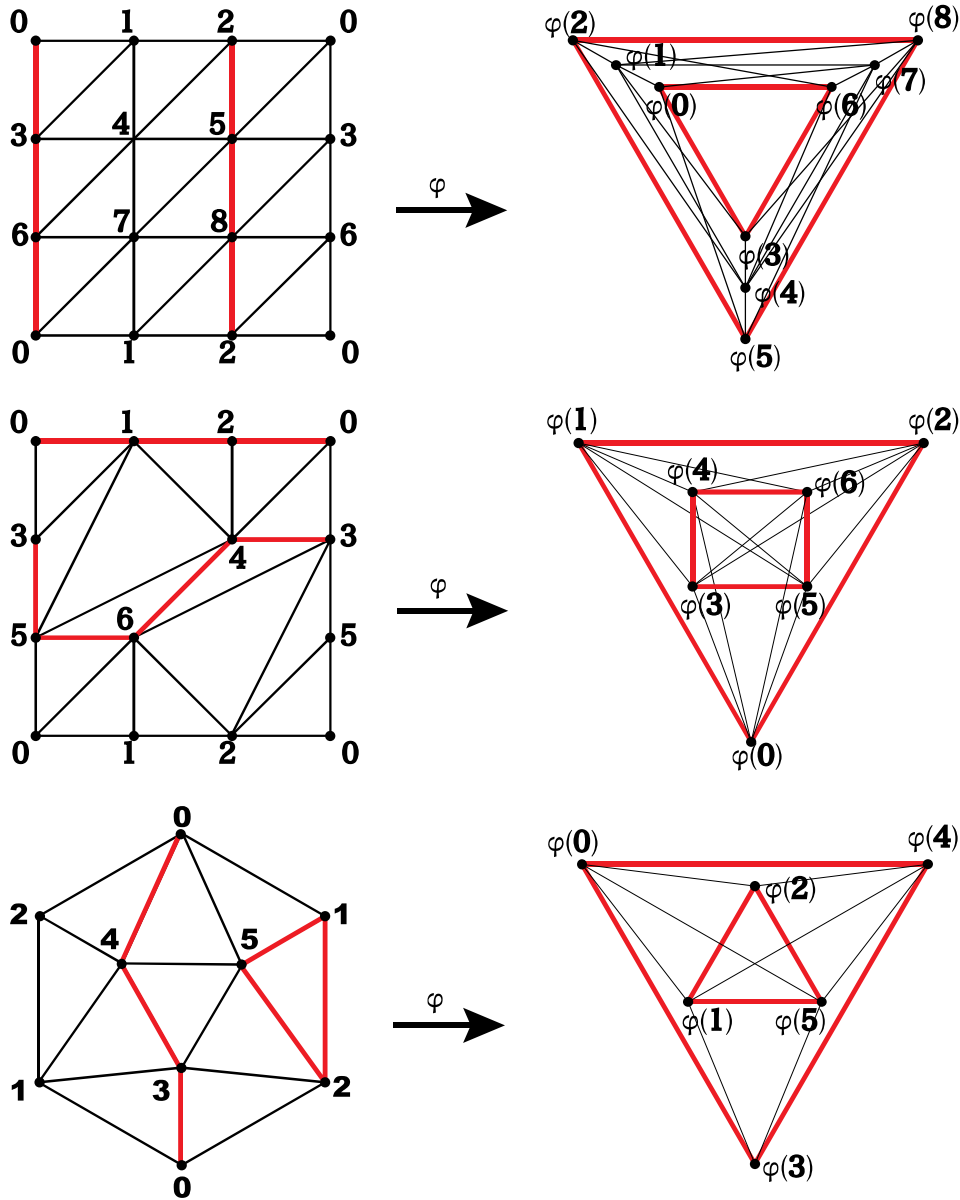


図7 ジェネリックな単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  (上段:  $M = \Sigma_1$ , 中段:  $M = \Sigma_1$ , 下段:  $M = F_1$ )

に対して  $\|x - y\|$  とは  $x, y$  の間の Euclid 距離をあらわす.

**証明の概略** 単体写像  $\varphi$  に Whitney の近似定理 [5] を適用し,  $C^\infty$  級写像  $f_0: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  で任意の  $x \in M$  に対して  $\|\varphi(x) - f_0(x)\| < \varepsilon/3$  を満たすものを得る. このとき, 次元対  $(2, 2)$  は Mather の結構領域 (nice range) [7] に属するので,  $f_0$  に対してジェネリックな  $C^\infty$  級写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  で任意の  $x \in M$  に対して  $\|f_0(x) - f(x)\| < \varepsilon/3$  を満たすものが存在する.  $f$  に Verona-塩田 [16, 10] の定理を適用して, 単体写像  $\varphi': (M, \mathcal{K}') \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}')$  で任意の  $x \in M$  に対して  $\|f(x) - \varphi'(x)\| < \varepsilon/3$  を満たすものを得る.  $\square$

定理 2.9 より, 任意の単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  はジェネリックな単体写像  $\varphi': (M, \mathcal{K}') \rightarrow \mathbb{R}^2$  により近似できることがわかる. しかし,  $M$  の単体分割  $\mathcal{K}'$  が  $\mathcal{K}$  の細分であるなどは主張していないことに注意する.

次の定理は Pignoni の定理の単体写像版である. Pignoni の定理を単体写像に焼き直すことで示すことができる.

$M \setminus g$	0	1	2	3	4	5	...
$\Sigma_g$	4	7	10	10	11	12	...
$F_g$	✓	6	8	9	9	9	...

表1  $f_{\min}^0(M)$  の値.

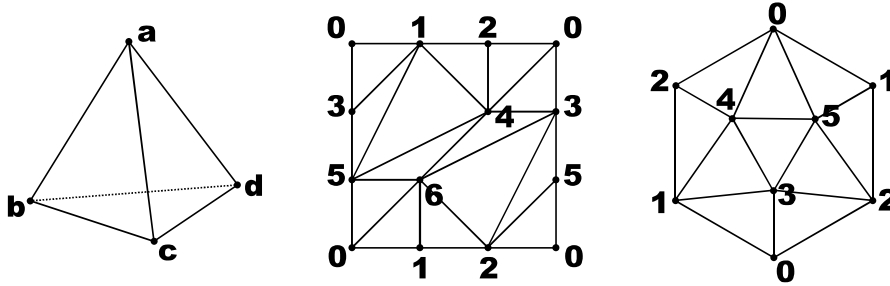


図8  $M$  の最小単体分割 (左:  $M = S^2$ , 中央:  $M = \Sigma_1$ , 右:  $M = F_1$ )

**定理 2.10.** 閉曲面上のジェネリックな単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して次が成立する.

$$\text{genus}(M) = \varepsilon(N + \frac{c(\varphi)}{2} + (1 + I)).$$

**系 2.11.** 閉曲面上のジェネリックな単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して,  $\varphi$  のカusp特異点の個数と  $M$  のオイラー標数は偶奇を等しくする.

### 3 Complexity of maps and complexity of closed surfaces

本節では, 単体写像を用いて連続写像の複雑さを測る量を定義し, さらに, その複雑さを測る量を用いて閉曲面の複雑さを測る量を定義する. 閉曲面  $M$  に対して, 単体写像的に単純な輪郭を定義する.

任意の閉曲面  $M$  は単体分割を持つが, その単体分割の頂点数に関して以下が知られている. [8] を参照する.

**注意 3.1.** (1) [Heawood の不等式 [2]] 閉曲面  $M$  が単体分割  $\mathcal{K}$  をもつとき,  $\mathcal{K}$  の頂点数に関して次の不等式が成立する.

$$\binom{\#V(\mathcal{K}) - 3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$$

ここで,  $\chi(M)$  は  $M$  のオイラー標数をあらわし,  $\binom{\#V(\mathcal{K}) - 3}{2}$  は2項係数をあらわす.

(2) [Jungerman, Ringel [4, 13]] 閉曲面  $M$  に対して,  $M$  の単体分割  $\mathcal{K}$  全体にわたる頂点数  $\#V(\mathcal{K})$  の最小値を  $f_{\min}^0(M)$  とおく. このとき,  $M \neq \Sigma_2, F_2, F_3$  であれば次が成立する.

$$f_{\min}^0(M) = \min\{v \in \mathbb{N} \mid \binom{v - 3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))\}.$$

一方, 除外された閉曲面に関して,  $f_{\min}^0(\Sigma_2) = 10, f_{\min}^0(F_2) = 8, f_{\min}^0(F_3) = 9$  である.

具体的な  $f_{\min}^0(M)$  の値を表1に挙げる.

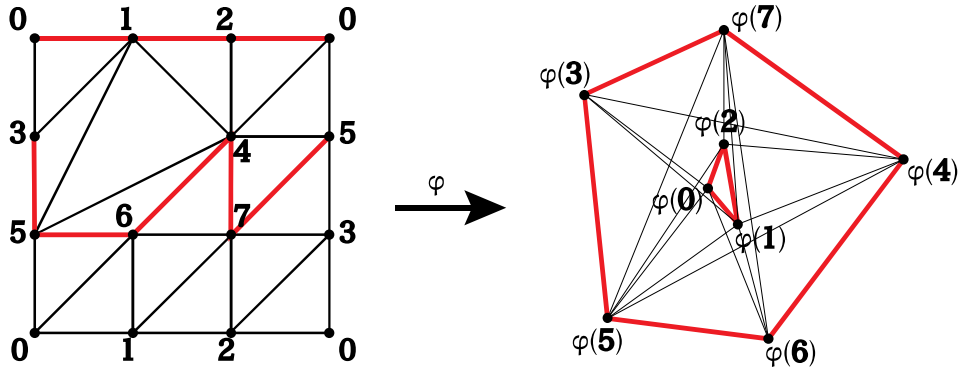


図9 単体写像  $\varphi: (\Sigma_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $\#V(\mathcal{K}) = 8$ )

### 3.1 Complexity of continuous maps

多様体  $M$  上の連続写像  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  を考える. 単体近似定理 [15] により  $\psi$  は単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^k$  で近似できる. そこで,  $\psi$  に対して,  $s_{imc}(\psi) \in \mathbb{Z}$  を  $\psi$  と  $C^0$  同値となる単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^k$  全体にわたる頂点数  $\#V(\mathcal{K})$  の最小値と定める, すなわち

$$s_{imc}(\psi) = \min_{|\mathcal{K}|=M} \{ \#V(\mathcal{K}) \mid \varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ は } \psi \text{ と } C^0 \text{ 同値} \}.$$

値  $s_{imc}(\psi) \in \mathbb{Z}$  は  $\psi$  の単体写像的な複雑さを測る量である. 定義より,  $s_{imc}(\psi) \geq f_{\min}^0(M)$  である.

**例 3.2.** (1) 定値写像  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\psi(x) = y_0$  に対して  $s_{imc}(\psi) = f_{\min}^0(M)$  である.

(2)  $n$  次元球面  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  上の高さ関数  $f: S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して  $s_{imc}(f) = f_{\min}^0(S^n) = n + 2$  である.

**注意 3.3.** 与えられた写像  $M \rightarrow N$  をなるべく頂点数の少ない単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow (N, \mathcal{L})$  により構成するという研究がある. 例えば, [6] において, Hopf fibration  $f: (S^3, \mathcal{K}) \rightarrow (S^2, \mathcal{L})$  で  $V(\mathcal{K}) = 12$ ,  $V(\mathcal{L}) = 4$  を満たすものが構成されている.

**例 3.4.** (1) 例 1.2(1) で構成した  $f_1: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して  $s_{imc}(f_1) = f_{\min}^0(S^2) = 4$  である. 実際,  $f_1$  は例 2.1 で構成した単体写像  $\varphi_1$  (または  $\varphi_2$ ) に  $C^0$  同値であり, この  $S^2$  の単体分割  $\mathcal{K}$  に関して  $\#V(\mathcal{K}) = f_{\min}^0(S^2) = 4$  である.

(2) 例 1.2(3) で構成した  $f_3: F_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して  $s_{imc}(f_3) = 7$  である. 実際,  $f_3$  は例 2.8(2) で構成した単体写像  $\varphi: (\Sigma_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に  $C^0$  同値であり, この  $\Sigma_1$  の単体分割  $\mathcal{K}$  に関して  $\#V(\mathcal{K}) = f_{\min}^0(\Sigma_1) = 7$  である.

(3) 例 1.2(4) で構成した  $f_4: F_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して  $s_{imc}(f_4) = 6$  である. 実際,  $f_4$  は例 2.8(3) で構成した単体写像  $\varphi: (F_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に  $C^0$  同値であり, この  $F_1$  の単体分割  $\mathcal{K}$  に関して  $\#V(\mathcal{K}) = f_{\min}^0(F_1) = 6$  である.

このように, 閉曲面  $M$  上の連続写像  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  が  $\#V(\mathcal{K}) = f_{\min}^0(M)$  である単体写像  $\varphi: (M, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  と  $C^0$  同値であれば  $s_{imc}(\psi)$  の値を決定することは容易である.

**命題 3.5.** 例 1.2(2) で構成した  $f_2: \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して,  $s_{imc}(f_2) = 8$  である.

**証明.**  $\Sigma_1$  の頂点数最小の単体分割  $\mathcal{K}$  は図 8 中央に示すものただ 1 つであり, この  $\mathcal{K}$  に対して 0-単体全体と 1-単体全体が作るグラフは 7 頂点完全グラフ  $K_7$  である. よって, 単体写像  $\varphi: (\Sigma_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  の像は例 1.2 (2) の  $\gamma(f_2)$  (図 1.2 の左から 2 番目) のような空洞を持たない. 一方,  $\Sigma_1$  の頂点数が 8 である図 9 左に示す単体分割  $\mathcal{K}$  に対して図 9 右により単体写像  $\varphi: (\Sigma_1, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定めるとき,  $\varphi$  は  $f_2$  に  $C^0$  同値である.  $\square$

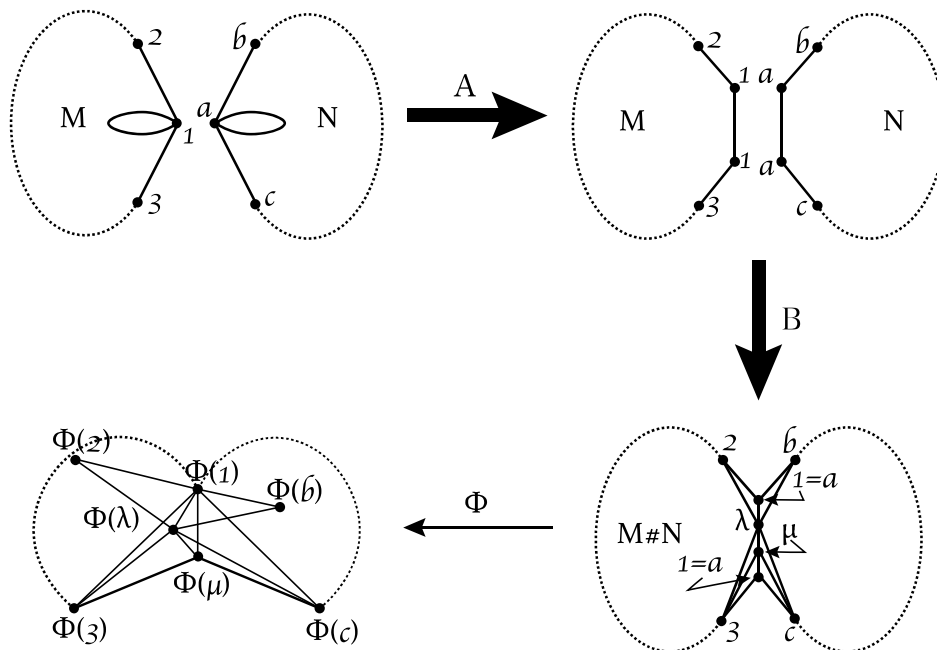


図 10 単体写像の水平和 [9] (A: 開円板を取り除いて切り開く, B: 切り口で貼り合わせる. 頂点  $\lambda$  と  $\mu$  と辺を追加する)

### 3.2 Complexity of closed surfaces and simplicial simple contours

閉曲面  $M$  に対して  $simc_2(M) \in \mathbb{Z}$  を  $M$  上のジェネリックな可微分写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  全体にわたる  $simc(f)$  の最小値と定める, すなわち

$$simc_2(M) = \min_{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^2)} \{ simc(f) \mid f: M \rightarrow \mathbb{R}^2 : \text{ジェネリックな } C^\infty \text{ 写像} \}$$

値  $simc_2(M)$  は  $M$  の複雑さを  $M$  上の単体写像を通して測る量である. 定義により  $simc_2(M) \geq f_{\min}^0(M)$  である. さらに, ジェネリックな  $C^\infty$  級写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  の輪郭  $\gamma(f)$  が **単体的単純輪郭** ( $s$ -**単純輪郭**,  $s$ -**simple contour**) であるとは,  $f$  が値  $simc_2(M) = simc(f)$  を満たすときをいう.

**例 3.6.** (1)  $simc_2(S^2) = 4$  であり, 例 1.2(1) で構成した  $S^2$  の輪郭  $\gamma(f_1)$  は  $S^2$  の単体的単純輪郭である.

(2)  $simc_2(\Sigma_1) = 7$  であり, 例 1.2(3) で構成した  $\Sigma_3$  の輪郭  $\gamma(f_3)$  は  $\Sigma_1$  の単体的単純輪郭である.

(3)  $simc_2(F_1) = 6$  であり, 例 1.2(4) で構成した  $F_1$  の輪郭  $\gamma(f_4)$  は  $F_1$  の単体的単純輪郭である.

**例 3.7.** 例 1.2(2) で構成した  $\Sigma_1$  の輪郭  $\gamma(f_2)$  は  $\Sigma_1$  の単体的単純輪郭ではない.

さて, 著者は  $g \geq 2$  であるとき,  $simc_2(\Sigma_g)$ ,  $simc_2(F_g)$  の値はそれぞれ  $f_{\min}^0(\Sigma_g)$ ,  $f_{\min}^0(F_g)$  の値よりも真に大きくなると予想している.  $f_{\min}^0(\Sigma_g)$ ,  $f_{\min}^0(F_g)$  の値の上からの評価を紹介する.

2つの単体写像  $\varphi: (M_1, \mathcal{K}_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi_2: (M_2, \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して, 連結和  $M_1 \# M_2$  上の単体写像  $\Phi: (M_1 \# M_2, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を図 10 により定義する.  $\Phi$  を  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の**水平和** (**horizontal sum**) と呼ぶ. このとき,  $f_3$  自身 (または  $f_4$  自身) を繰り返し水平和することで次を得る.

**命題 3.8** (武藤-山本 [9]).  $g \geq 2$  に対して,  $simc_2(\Sigma_g) \leq 8g - 1$ ,  $simc_2(F_g) \leq 7g - 1$  である.

## 謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. This work was supported by Institute of Mathematics for Industry, Joint Usage/Research Center in Kyushu University. (FY2025 Short-term Visiting Researcher “Study of topological structure of solution sets of multi-objective optimization problems by using mapping on the solution sets” (Reference No.2025a028).)

## 参考文献

- [1] H. Edelsbrunner, J. L. Harer (訳 荒井迅, 竹内博志) : 計算トポロジー入門, 共立出版, 2023.
- [2] P. J. Heawood, *Map-colour theorem*, Proc. London Math. Soc. (2) 51 (1949), 161–175.
- [3] 泉屋周一, 石川剛郎: 応用特異点論, 共立出版, 1998.
- [4] M. Jungerman, G. Ringel, *Minimal triangulations on orientable surfaces*, Acta Math. 145 (1980), no. 1–2, 121–154.
- [5] J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York, 2003; MR1930091
- [6] K. V. Madahar and K. S. Sarkaria: *A minimal triangulation of the Hopf map and its application*, Geom. Dedicata 82 (2000), no. 1–3, 105–114; MR1789059
- [7] J. N. Mather, *Stability of  $C^\infty$  mappings. VI. The nice dimensions*, Uspehi Mat. Nauk 29 (1974), no. 1(175), 129–158; MR0388455
- [8] 村井聡: 単体的複体の代数的組合せ論, 数学, 第 77 卷, 第 4 号, 385–409.
- [9] 武藤優希, 山本卓宏: 閉曲面から平面への単体写像, 東京学芸大学紀要, 自然科学系, 第 77 集, 1–12.
- [10] M. Shiota: *Thom’s conjecture on triangulations of maps*, Topology 39 (2000), no. 2, 383–399; MR1722004
- [11] R. Pignoni: *Minimal arrangements of singularities for apparent contours*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 313 (1991), no. 12, 873–878; MR1138568
- [12] R. Pignoni: *Projections of surfaces with a connected fold curve*, Topology Appl. 49 (1993), 55–74.
- [13] G. Ringel: *Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann*, Math. Ann. 130 (1955), 317–326.
- [14] R. Thom: *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955/56), 43–87; MR0087149
- [15] 田村 一郎: トポロジー. 岩波書店, 1972.
- [16] A. Verona: *Stratified mappings—structure and triangulability*, Lecture Notes in Mathematics, 1102, Springer, Berlin, 1984; MR0771120
- [17] T. Yamamoto: *Apparent contours with minimal number of singularities*, Kyushu J. Math. 64 (2010), no. 1, 1–16; MR2662656