# Fundamental solution to the heat equation with a dynamical boundary condition

東京大学大学院数理科学研究科　片山　翔 *
Sho Katayama
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

## 1　導入

### 1.1　境界条件の導出

一般に, 偏微分方程式はそれ単体では解を定めるために不十分であり, 初期条件と境界条件を加えなければならない. 代表的な境界条件としては,

- Dirichlet 条件 $u = \phi$ on $\partial\Omega$,
- Neumann 条件 $\partial_\nu u = 0$ on $\partial\Omega$,
- Robin 条件 $\partial_\nu u + \beta(u - \phi) = 0$ on $\partial\Omega$,

などが挙げられる. ここでは, 熱方程式 $\partial_t u - \Delta u = 0$ について, 熱流のモデルに基づいて境界条件を再考する.

図 1 のようなモデル系を考える.

**注意 1.1.** $u$ の境界値 $u|_{\partial\Omega}$ と $U$ は区別して考える必要がある. $u|_{\partial\Omega}$ は壁際の温度, $U$ は壁の内側の温度であり, これらは必ずしも一致しない.

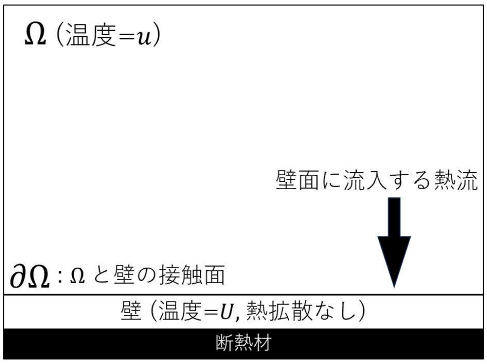


図 1　モデル系

壁面に流入する熱流に着目して, $u$ に関する境界条件を導出しよう.

$x \in \partial\Omega$ のまわりの単位面積の壁面に流入する熱流を $q(x, t)$ とおく. まず, Fourier の法則により,

$$q = -\partial_\nu u \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{1.1}$$

が成り立つ. また, $q$ は壁際の温度 $u|_{\partial\Omega}$ と壁の内側の温度 $U$ の差に比例する. すなわち,

$$q = \beta(u - U) \tag{1.2}$$

である. 比例定数 $\beta(x) \in [0, \infty]$ は $\Omega$ と壁の間の熱接触伝導係数と呼ばれ, $\Omega$ と壁の間の

* Email:katayama-sho572@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

空隙などによって定まる．$\beta(x)=\infty$ の場合は完全熱接触と呼ばれ, $u(x)=U(x)$ と解釈される．

最後に, $U$ の変化は $q$ に比例する．すなわち,

$$q=\lambda\partial_t U \tag{1.3}$$

である．比例定数 $\lambda(x)\in[0,\infty]$ は壁の単位面積当たりの熱容量にあたる．$\lambda(x)=\infty$ の場合は $U(x)$ が時間変化しないと解釈される.[*1]

(1.1), (1.2), (1.3), をまとめると, $u$ に関する「境界条件」

$$\partial_\nu u=-\beta(u-U)=-\lambda\partial_t U \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{1.4}$$

が得られる．なお, この他にも壁の内側での熱拡散や壁での化学反応などの要素があり, これらを考慮した境界条件も考えられる．

「境界条件」(1.4) を考えるには, $\partial\Omega$ 上の補助関数 $U$ に関する常微分方程式 $\lambda\partial_t U-\beta(u-U)=0$ との連立系を考えなければならない．このような問題は bulk–surface system などと呼ばれ, 近年様々な問題設定のもとで研究がなされている．(たとえば [3,15,20] を見よ.)

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="3">壁の熱容量</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th>0</th><th>有限</th><th>∞</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Ω と壁の熱接触</td><td>断熱</td><td colspan="3">Neumann</td></tr>
<tr><td>不完全</td><td rowspan="2">Neumann</td><td></td><td>Robin</td></tr>
<tr><td>完全</td><td>$\lambda\partial_t u+\partial_\nu u=0$</td><td>Dirichlet</td></tr>
</table>

表 1　各種仮定と対応する境界条件

ここでは, とくに補助関数 $U$ を排除できるように理想化を加える．最も簡単な理想化は, 熱接触伝導係数 $\beta$, あるいは壁の熱容量 $\lambda$ を 0 とすることである.[*2] この場合, 境界条件は Neumann 条件 $\partial_\nu u=0$ on $\partial\Omega$ となる．次に, $\lambda=\infty$ の場合を考える．この場合は $U$ が時間変化しない．そこで $U=\phi(x)$ とおくと, Robin 条件 $\partial_\nu u+\beta(u-\phi)=0$ on $\partial\Omega$ となる．さらに, 完全熱接触 $\beta=\infty$ を仮定すると, Dirichlet 条件 $u=\phi$ on $\partial\Omega$ になる．

最後に, 完全熱接触 $\beta=\infty$ を仮定するが, $\lambda$ は有限値であるような場合を考える．この場合, $u=U$ であるから, 境界条件は

$$\lambda\partial_t u+\partial_\nu u=0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{1.5}$$

となる．

**補足 1.1.** これらの境界条件の導出は, 図 1 の系を壁の厚さ $\delta$ を考慮した放物型問題として再現し, $\delta\to 0$ の特異極限を考えることで正当化されている．Dirichlet 条件, Neumann 条件, 条件 (1.5), についてはたとえば [4,13] を見よ．Robin 条件については, 定常問題に関して別の観点からの厳密な導出が [1] にある．

---

[*1] 断熱材がなく壁が環境と接触していると解釈してもよい．

[*2] $\beta=0$ は壁が断熱材になっている場合, $\lambda=0$ は壁がない場合に相当し, 本質的に同じ理想化である．

### 1.2 動的境界条件 (1.5)

(1.5) の最も特徴的な点は, 境界値の時間微分を含む点である. そのような境界条件は一般に動的境界条件 (dynamical boundary condition) と呼ばれる. (1.5) の他にも, 壁の内側での拡散を考慮した拡散型動的境界条件 $\lambda\partial_t u + \partial_\nu u = k\Delta_{\partial\Omega} u$ on $\partial\Omega$ や壁での化学反応を考慮した非線形動的境界条件 $\lambda\partial_t u + \partial_\nu u = f(u)$ on $\partial\Omega$ など, 様々な動的境界条件が考えられる.

**補足 1.2.** 熱方程式 $\partial_t u - \Delta u = 0$ を用いると, 条件 (1.5) を 2 階の境界条件 $\lambda\Delta u + \partial_\nu u = 0$ on $\partial\Omega$ に書き換えられる. このような条件は Wentzell 条件と呼ばれる. (たとえば [7] を見よ.)

以下では $\lambda > 0$ は定数であるとする. 動的境界条件 (1.5) を課した熱方程式の初期境界値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \lambda\partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \phi^i & \text{in} \quad \Omega, \\ u(\cdot,0) = \phi^b & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{HD}$$

を考えよう.

**注意 1.2.** $\phi^i|_{\partial\Omega}$ と $\phi^b$ は一致していなくてもよい. 完全熱接触により $t > 0$ では壁際の温度と壁の内側の温度に区別がなくなるが, $t = 0$ ではこれらは区別され, それぞれ $\phi^i|_{\partial\Omega}$ と $\phi^b$ にあたる.

モデル系に期待される性質のうちのいくつかは, 問題 (HD) の数学的性質として証明できる. たとえば, 壁の中まで考慮した熱量が保存される. 実際,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u \,\mathrm{d}x + \lambda\int_{\partial\Omega} u \,\mathrm{d}\sigma\right) = \int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma = 0$$

が成り立つ. また, 最大値原理・比較原理も有界領域の場合は古典的境界条件と同様に証明できる. 非有界領域の場合はより難しいが, たとえば [12] で $\Omega$ が半空間の場合が証明されている.

一方で, 問題 (HD) を保つスケール変換は存在しない. 実際, 熱方程式は放物型スケール変換 $u \mapsto u^\sigma = u(\sigma x, \sigma^2 t)$ によって保たれるが, 境界条件は $\sigma^{-1}\lambda\partial_t u + \partial_\nu u = 0$ になってしまう. 以降では $\sigma = \lambda$ とした放物型スケール変換を施し, $\lambda = 1$ とする.

### 1.3 本研究の目的

本研究の目的は, $\Omega$ が半空間

$$\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \ldots, x_N) : x_N > 0\}$$

の場合に, 問題 (HD) を解く良い枠組みを与えることにある．とくに, 良い減衰評価を与える枠組みを与えることを目標とする．

この目標は, 半線形熱方程式の可解性に強いモチベーションがある．(→4 節.)

### 1.4 解の表現公式

より簡単な問題として, Cauchy 問題

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \quad u = \phi \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.6}$$

を考えよう．この問題は解の表現公式

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y, \quad \Gamma(z,t) := (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}, \tag{1.7}$$

をもつ．$\Gamma(z,t)$ は熱核, あるいは問題 (1.6) の基本解と呼ばれる．従って, 問題 (1.6) については, この積分を評価するだけ*3で解の詳細な評価ができる．さらに, 大きな $t$ についても積分核が正確に与えられているため, 減衰評価を与えることもできる．

問題 (HD) についても, 解の表現公式

$$u(x,t) = \int_{\Omega} G^i(x,y,t)\phi^i(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} G^b(x,y,t)\phi^b(y)\,\mathrm{d}y$$

を得られることが理想的である．しかし, 線形境界値問題の解の表現公式を具体的に与えることは, (1.6) のようなごく簡素な問題を除けば非常に困難である．問題 (HD) についてもそのような表現公式を与えることはできないと考えられていた．

## 2 問題 (HD) の先行研究

### 2.1 有界領域の場合

$\Omega$ が有界領域の場合, 問題 (HD) の解の構成は古くから研究されている．方法の一つは, 問題 (HD) を $u$ と $u|_{\partial\Omega}$ からなる系と見做し, 作用素 $(v,w) \mapsto (\Delta v, -\partial_\nu v)$ に半群理論を適用する方法である．たとえば Hinterman [16] がこの方法で Besov 空間上に解を構成したほか, [6, 10] など様々な関数空間で解が構成されている．

また, 対応する固有値問題を考え, $L^2$ の枠組みで解を構成する方法もある．たとえば Bandle, von Below, and Reichel [2] では対応する固有値問題の固有値の分布が定性的に与えられ, $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ 上に問題 (HD) の解が構成された．さらに, 定数関数への指数的収束も示されている．また, [5] でも対応する固有値問題が扱われている．

一方で, これらの方法は有界領域でしか成り立たないスペクトル的性質に大きく依存しており, 半空間など非有界領域では適用することができない．

*3 必ずしも簡単ではない．

### 2.2 半空間の場合

半空間の場合は, Fila, Ishige, and Kawakami [9] が新たな解の枠組みを提示し, 解の時間局所的構成を与えた. 彼らのアイデアは, 問題 (HD) を補助関数 $(v,w)$ に関する方程式系

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = -\partial_t w & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ -\Delta w = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \partial_t w + \partial_\nu w = -\partial_\nu v & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ v(\cdot,0) = \phi^i - \Phi & \text{in} \quad \Omega, \\ w(\cdot,0) = \phi^b & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ -\Delta\Phi = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Phi = \phi^b & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

に分解することである. 実際, $(v,w)$ が問題 (2.1) の解であるとき, $u = v + w$ が問題 (HD) の解となる. 問題 (2.1) は, $v$ については Dirichlet 条件つき熱方程式, $w$ については動的境界条件つき Laplace 方程式である. Dirichlet 条件つき熱方程式は古典的で, 動的境界条件つき Laplace 方程式は [8] で表現公式が与えられているため, 縮小写像の原理を用いて解くことができる.

一方で, この方法は時間局所的な構成に留まり, 長時間での評価を与えない. より大きな問題は, $\phi^i$ と $\phi^b$ が正値であっても $v$ と $w$ は正値にならないという点である. $u = v + w$ は比較原理から正値になるので, この和は打消しを含むことになる. 従って, $v$ と $w$ を正確に評価できたとしても, $u = v + w$ の正確な評価を与えたことにならない. たとえば, 熱量保存から $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^1(\partial\Omega)} \le \|\phi^i\|_{L^1(\Omega)} + \|\phi^b\|_{L^1(\partial\Omega)}$ が直ちに従うが, $(v,w)$ について同様の評価を与えることはできない. また, 後述の半線形熱方程式の解の存在/非存在を調べる上でも大きな障害となっていた.

## 3 問題 (HD) の基本解

この研究の第一の結果は, 従来の見方に反し, 問題 (HD) が具体的に表示された基本解をもつというものである. さらに, 基本解に上下からの評価を与え, 問題 (HD) の解挙動を明らかにする.

### 3.1 基本解の表示

基本解の表示のため, 記号を準備する. $\Gamma(z,t)$ を (1.7) で与えた熱核とする. また, $x = (x_1, \dots, x_N)$ について, $x^*$ を $x$ を平面 $\partial\Omega$ に関して鏡映した点 $(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N)$ とする. さらに, 関数 $G_D : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$G_D(x,y,t) := \Gamma(x-y,t) - \Gamma(x-y^*,t)$$

により定める. $G_D$ は $\Omega$ 上の Dirichlet 熱核と呼ばれ, $\Omega$ 上の熱方程式の Dirichlet 問題の基本解になっている.

**定理 3.1** ([17, Theorem 1.1])**.** $G : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$G := G_D + H, \quad H(x, y, t) := -2 \int_0^t \partial_{x_N} \Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.1}$$

によって定める. $\phi^i \in BC(\Omega)$ と $\phi^b \in BC(\partial\Omega)$ について, 関数 $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ を

$$u(x, t) = \int_\Omega G(x, y, t)\phi^i(y)\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} G(x, y, t)\phi^b(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \tag{3.2}$$

と定めると, $u$ は

$$\begin{gathered} \partial_t u - \Delta u = 0 \quad in \quad \Omega \times (0, \infty), \quad \partial_t u + \partial_\nu u = 0 \quad on \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \\ \lim_{t \to +0} u(x, t) = \phi^i(x) \quad for \quad x \in \Omega, \quad \lim_{t \to +0} u(x, t) = \phi^b(x) \quad for \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered}$$

をみたす.

*Proof.* $u$ が熱方程式をみたすことは明らか. 動的境界条件は

$$(\partial_t H - \partial_{x_N} H)(x, y, t) = -2 \int_0^t \partial_\tau \partial_{x_N} \Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = 2\partial_{x_N} \Gamma(x - y^*, t),$$

および

$$(\partial_t G_D - \partial_{x_N} G_D)(x, y, t) = -\partial_{x_N} G_D(x, y, t) = -2\partial_{x_N} \Gamma(x - y^*, t)$$

から従う.

$u$ が初期条件をみたすことを証明する. まず,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} H(x, y, t)\, \mathrm{d}\sigma(y) &= -2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \partial_{y_N} \Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau)\, \mathrm{d}\sigma(y)\, \mathrm{d}\tau \\ &= 2 \int_0^t \int_\Omega \Delta_y \Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\tau \\ &= 2 \int_0^t \int_\Omega \partial_t \Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\tau \\ &= 2 \int_0^t \int_\Omega (\partial_{x_N} - \partial_\tau) \Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\tau \\ &= -\int_\Omega H(x, y, t)\, \mathrm{d}y + 2 \int_\Omega \Gamma(x - y^*, t)\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{3.3}$$

により, $x \in \Omega$ について

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega H(x, y, t)\phi^i(y)\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} H(x, y, t)\phi^b(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \right| \\ &\le \left( \|\phi^i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\phi^b\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right) \left( \int_\Omega H(x, y, t)\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} H(x, y, t)\, \mathrm{d}\sigma(y) \right) \end{aligned}$$

$$\to 0 \quad \text{as} \quad t \to +0$$

となる．従って，

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = \lim_{t\to+0} \int_\Omega G_D(x,y,t)\phi^i(y)\,\mathrm{d}y = \phi^i(x)$$

が成り立つ．

また，$x \in \overline{\Omega}$, $t > 0$, $r > 0$, について，

$$\int_\Omega H(x,y,t)\,\mathrm{d}y = \int_0^t (4\pi(t-\tau))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x_N+\tau)^2}{4(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau \le Ct^{\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega\setminus B(x,r)} H(x,y,t)\,\mathrm{d}\sigma(y) &= C\int_0^t \int_{\partial\Omega\setminus B(x,r)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2}-1}(x_N+\tau)e^{-\frac{|x-y+\tau e_{x_N}|^2}{4(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\tau \\ &\le C(x_N+t)\int_0^t \int_\Omega (t-\tau)^{-\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-\tau)}-\frac{r^2}{8(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\tau \\ &\le C(x_N+t)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{8(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で，(3.3) から，$x \in \partial\Omega$ について

$$\int_\Omega H(x,y,t)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} H(x,y,t)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 1, \quad t > 0.$$

従って，

$$\begin{aligned}\left|u(x,t) - \phi^b(x)\right| &\le \int_\Omega H(x,y,t)|\phi^i(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega\setminus B(x,r)} H(x,y,t)|\phi^b(y)|\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\quad + \sup_{\partial\Omega\cap B(x,r)} |\phi^b(y) - \phi^b(x)| \\ &\to \sup_{\partial\Omega\cap B(x,r)} |\phi^b(y) - \phi^b(x)| \quad \text{as} \quad t \to +0,\ r > 0.\end{aligned}$$

$r \to +0$ として $\lim_{t\to+0} u(x,t) = \phi^b(x)$, $x \in \partial\Omega$, を得る．定理 3.1 の証明は完了した． □

**補足 3.1.** 等式 (3.3) から直ちに

$$\int_\Omega G(x,y,t)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} G(x,y,t)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 1, \quad x \in \overline{\Omega},\ t > 0,$$

が成り立つ．これは熱量保存に対応する等式である．

**補足 3.2.** 不等式 (3.4) は，$\phi^i|_{\partial\Omega}$ と $\phi^b$ のギャップがどのように解消されるかに示唆を与える．たとえば，$\phi^i \equiv 1$, $\phi^b \equiv 0$ のとき，$u(0,t) = O(t^{\frac{1}{2}})$ as $t \to +0$ となることがわかる．

基本解表示 (3.1) は，次の Oblique derivative 問題と呼ばれる初期境界値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_\beta u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \phi & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

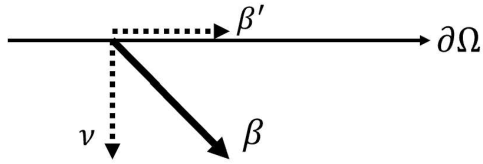


図 2　Oblique derivative 条件の概念図

からの類推によって着想を得ている. $\beta$ は $\beta = \nu + \beta'$, $\beta' \perp \nu$, と表される定数ベクトルである. [19] によれば, 問題 (3.5) の基本解は

$$G_\beta(x,y,t) = G_D(x,y,t) - 2\int_0^\infty \partial_{x_N}\Gamma(x-y^*-\tau\beta,t)\,\mathrm{d}\tau$$

と表される. ([14, Section 6.7] も見よ.)

ここで, 形式的に $\beta' = e_t$ とすることを考える. すると, $\partial_\beta u = \partial_t u + \partial_\nu u$ となり, 境界条件が動的境界条件 (1.5) となる. 従って, 問題 (HD) の基本解は

$$\begin{aligned}&G_\beta(x,y,t)\\ &= G_D(x,y,t) - 2\int_0^\infty \partial_{x_N}\text{“}\Gamma(x-y^*-\tau(e_t-e_{x_N}),t)\text{”}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

であると考えられる. これ自体は意味を成さないが, 適切に解釈し直せば (3.1) を得る.

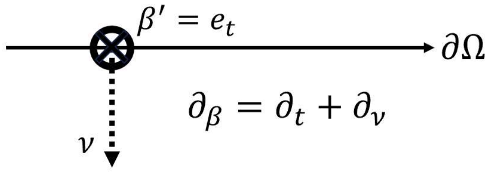


図 3　Oblique derivative 条件から動的境界条件への類推. $\otimes$ は紙面の手前から奥向きを表す.

表現公式 (3.2) を用いる利点は, $G$ が正値関数であることである. これにより, 系 (2.1) が抱えていた問題を克服し, 問題 (HD) の解に正確な評価を与えることができるようになる. また, 半線形熱方程式への応用も期待できる.

**補足 3.3.** 問題 (HD) に期待される性質の一つに半群性, すなわち $u$ を問題 (HD) の解とすると, 初期値 $(\phi^i, \phi^b)$ を $(u(\cdot,s), u(\cdot,s))$ に置き換えた問題 (HD) の解は $u(\cdot,t+s)$ となる, というものがある. これは

$$G(x,y,t+s) = \int_\Omega G(x,z,t)G(z,y,s)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial\Omega} G(x,z,t)G(z,y,s)\,\mathrm{d}\sigma(z),\ x,y \in \overline{\Omega},\ s,t>0,$$

と表現される. これは [12] の比較原理の系の有界な解の一意性を用いれば証明することができるが, 直接計算して証明できるかは分かっていない.

## 3.2　$H(x,y,t)$ の各点評価

表現公式 (3.2) を通して問題 (HD) の解挙動を調べるには, $G(x,y,t)$ を正確に評価しなければならない. 第 2 の主結果は, $G(x,y,t)$ の要素のうち最も非自明である $H(x,y,t)$ について, 上下からの各点評価を与える.

関数 $P:\Omega \to \mathbb{R}$ を Poisson 核

$$P(z) := \frac{2}{|B(0,1)|} z_N |z|^{-N}$$

とする.

**定理 3.2** ([17, Theorem 1.2])**.** $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times(0,\infty)$ を

$$D_1 := \{(x,y,t) : |x-y^*+te_{x_N}|^2 < 12(N+2)t\},$$

$$D_2 := \{(x,y,t) : |x - y^* + te_{x_N}|^2 \geq 12(N+2)t,\ x_N + y_N + t \leq 1\},$$
$$D_3 := \{(x,y,t) : |x - y^* + te_{x_N}|^2 \geq 12(N+2)t,\ x_N + y_N + t > 1\},$$

に分割する．関数 $\overline{H}, \underline{H} : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\overline{H}(x,y,t) := \begin{cases} P(x - y^* + te_{x_N}) & \textit{if} \quad (x,y,t) \in D_1, \\ (x_N + y_N + t)\Gamma(x - y^*, t) & \textit{if} \quad (x,y,t) \in D_2, \\ \Gamma(x - y^*, t) & \textit{if} \quad (x,y,t) \in D_3, \end{cases}$$
$$\underline{H}(x,y,t) := \begin{cases} P(x - y^* + te_{x_N}) & \textit{if} \quad (x,y,t) \in D_1, \\ (x_N + y_N + t)\Gamma\left(x - y^*, \dfrac{t}{2}\right) & \textit{if} \quad (x,y,t) \in D_2, \\ \Gamma\left(x - y^*, \dfrac{t}{2}\right) & \textit{if} \quad (x,y,t) \in D_3, \end{cases}$$

と定めると, 定数 $C = C_N > 0$ が存在し,

$$C^{-1}\underline{H}(x,y,t) \leq H(x,y,t) \leq C\overline{H}(x,y,t) \quad \textit{for} \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times (0,\infty) \tag{3.6}$$

が成り立つ．

評価 (3.6) から, $G(x,y,t)$ の $|x - y^*|$, $t \ll 1$, での挙動は Poisson 核 $P(x - y^* + te_{x_N})$ と近しいことがわかる．この積分核は, 動的境界条件つき Laplace 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot, 0) = \phi^b & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

の基本解である．従って, [9] でも予見されていたように, 問題 (HD) の時刻 0 付近・ $\partial\Omega$ 付近での解挙動は問題 (3.7) に近しいということがわかる．

さらに, $G(x,y,t)$ の $t \gg 1$ での挙動は $\Gamma(x - y, t) + \Gamma(x - y^*, t)$ に近しい．この積分核は Neumann 熱核, すなわち Neumann 条件つき熱方程式の基本解に他ならない．従って, 問題 (HD) の長時間挙動は Neumann 条件つき熱方程式に近しいということがわかる．

評価 (3.6) は, 問題 (HD) の解の様々なタイプの評価に応用できる．例として, 以下の $L^p$-$L^q$ 評価を挙げる．

**系 3.1** ([17, Corollary 1.3])**.** $1 \leq p \leq q \leq \infty$ とする．定数 $C = C_{N,p,q}$ が存在し, $\phi^i \in L^p(\Omega)$, $\phi^b \in L^p(\partial\Omega)$ について, 公式 (3.2) で定まる関数 $u$ は

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C\left(t^{-(N-1)\delta} + t^{-\frac{N}{2}\delta}\right)\left(\|\phi^i\|_{L^p(\Omega)} + \|\phi^b\|_{L^p(\partial\Omega)}\right) \quad \textit{for} \quad t > 0$$

をみたす．ここで, $\delta = p^{-1} - q^{-1}$ である．右辺の定数は定数倍を除いて最適である．また, $p = q$ の場合は $C = 1$ である．すなわち,

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \left(\|\phi^i\|_{L^p(\Omega)} + \|\phi^b\|_{L^p(\partial\Omega)}\right) \quad \textit{for} \quad t > 0$$

が成り立つ．

**定理 3.2 の証明**.

$\underline{(x,y,t)\in D_1}$ の場合　　$z:=x-y^*+te_{x_N}$ とおく．表示から

$$
\begin{aligned}
H(x,y,t)&=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_0^t \frac{x_N+y_N+\tau}{(t-\tau)^{\frac{N}{2}+1}}e^{-\frac{|x-y^*+\tau|^2}{4(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\\
&=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{\frac{z_N}{2}}\int_0^t \frac{z_N-(t-\tau)}{(t-\tau)^{\frac{N}{2}+1}}e^{-\frac{|z|^2}{4(t-\tau)}-\frac{t-\tau}{4}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.8)\\
&=Ce^{\frac{z_N}{2}}|z|^{-N}z_N\int_0^{\frac{t}{|z|^2}}\left(1-z_N^{-1}|z|^2\eta\right)\eta^{-\frac{N+2}{2}}e^{-\frac{1}{4\eta}-\frac{|z|^2\eta}{4}}\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

ここで, $(x,y,t)\in D_1$ から

$$
z_N\le|z|\le\frac{|z|^2}{t}\le 12(N+2),\quad t\le z_N,
$$

となることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
&H(x,y,t)\le Ce^{6(N*2)}P(z)\int_0^\infty \eta^{-\frac{N+2}{2}}e^{-\frac{1}{4\eta}}\,\mathrm{d}\eta\le CP(z),\\
&H(x,y,t)\ge CP(z)\int_0^{\frac{t}{2|z|^2}}\left(1-\frac{t}{2z_N}\right)\eta^{-\frac{N+2}{2}}e^{-\frac{1}{4\eta}-36(N+2)^2\eta}\,\mathrm{d}\eta\ge CP(z),
\end{aligned}
$$

となり, (3.6) が従う.

$\underline{(x,y,t)\in D_2\cup D_3}$ の場合　　この場合は $z_N$ や $|z|^2/t$ を制御できないため, 表示 (3.8) を使うことは難しい．そこで, オリジナルの表示 (3.1) に立ち返る．計算の困難点は, 被積分関数の第 2 変数が $\tau$ に依存していることにある．そこで, これを定数にした関数

$$
-2\partial_{x_N}\Gamma(x-y+\tau e_{x_N},t-\tau_*)
$$

で被積分関数を評価することを目標とする.

下からは, 具体表示からとくに

$$
-\partial_{x_N}\Gamma(x,s)\ge -C\partial_{x_N}\Gamma(x,t)\quad\text{for}\quad x\in\Omega,\ 0<t<s<2t, \qquad (3.9)
$$

となることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
H(x,y,t)&\ge -C\int_0^{\frac{t}{2}}\partial_{x_N}\Gamma\left(x-y^*+\tau e_{x_N},\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}\tau\\
&\ge C\left(\Gamma\left(x-y^*,\frac{t}{2}\right)-\Gamma\left(x-y^*+\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right)\\
&=C\left(1-e^{\frac{(x_N+y_N+t/2)t/2}{2t}}\right)\Gamma\left(x-y^*,\frac{t}{2}\right)\\
&\ge C\min\{1,x_N+y_N+t\}\,\Gamma\left(x-y^*,\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

と評価でき, $(x,y,t)\in D_2$, $(x,y,t)\in D_3$, のいずれの場合においても $H\ge\underline{H}$ が成り立つ.

上からの評価は, 積分範囲を制限することができないためより繊細である. まず $-\partial_{x_N}\Gamma(x,t)$ の $t$ に関する増減を調べる.

$$-\partial_t\partial_{x_N}\Gamma(x,t) = \left(N+2-\frac{|x|^2}{2t}\right)\frac{x_N}{4t}\Gamma(x,t)$$

より, $x\in\Omega$ について

$$-\partial_{x_N}\Gamma(x,t) \text{ は} \begin{cases} t < \dfrac{|x|^2}{2(N+2)} \text{で単調減少}, \\ t > \dfrac{|x|^2}{2(N+2)} \text{で単調増加}, \end{cases} \tag{3.10}$$

である. ここで, $(x,y,t)\in D_2\cup D_3$ について,

(i) $|x-y^*|^2 < 2(N+2)t$ かつ $t\geq 4(N+2)$,
(ii) $|x-y^*|^2 \geq 2(N+2)t$,

のいずれかが成り立つことに注意する. 実際,

$$12(N+2)t \leq |x-y^*+te_{x_N}|^2 \leq 2|x-y^*|^2+2t^2$$

より, $|x-y^*|^2 < 2(N+2)t$ であれば $t^2 > 4(N+2)t$ となる.

(i) $|x-y^*|^2 < 2(N+2)t$ かつ $t\geq 4(N+2)$ のとき, $\tau_*\in(0,t/2]$ であって,

$$t-\tau_* = \frac{|x-y^*+\tau_* e_{x_N}|^2}{2(N+2)} \tag{3.11}$$

となるものが一意的に存在する. 実際, $t-\tau$ は $\tau>0$ について単調減少, $|x-y^*+\tau e_{x_N}|^2/2(N+2)$ は $\tau>0$ について単調増加であり,

$$t > \frac{|x-y^*|^2}{2(N+2)},\quad \frac{t}{2} \leq \frac{t^2}{8(N+2)} \leq \frac{|x-y^*+(t/2)e_{x_N}|^2}{2(N+2)t},$$

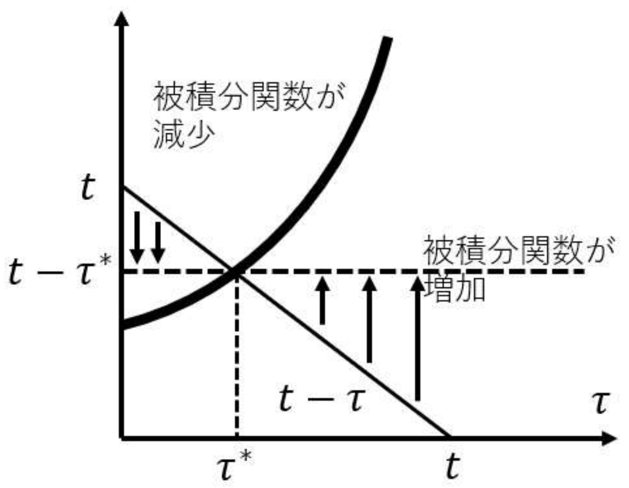


図 4　上からの評価の概念図: (i)

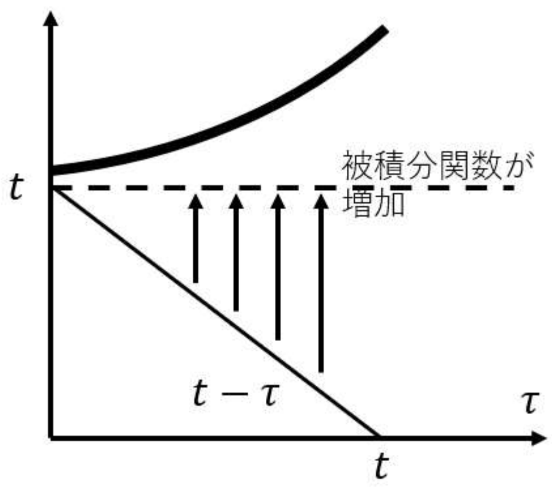


図 5　上からの評価の概念図: (ii)

であるから, 中間値の定理から (3.11) の解 $\tau_* \in (0, t/2]$ が一意的に存在する.
$\tau \in (0, \tau_*]$ のとき

$$\frac{|x - y^* + \tau e_{x_N}|}{2(N+2)} \le \frac{|x - y^* + \tau_* e_{x_N}|}{2(N+2)} = t - \tau_* \le t - \tau$$

であり, $\tau \in [\tau_*, t)$ のとき

$$t - \tau \le t - \tau_* = \frac{|x - y^* + \tau_*|}{2(N+2)} \le \frac{|x - y^* + \tau|}{2(N+2)}$$

である. (3.10) から, いずれの場合も

$$-\partial_{x_N}\Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau) \le -\partial_{x_N}\Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau^*)$$

が成り立つ. $\tau^* \le t/2$ および (3.9) とあわせて

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &\le -2\int_0^t \partial_{x_N}\Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau^*)\,\mathrm{d}\tau \\ &\le C\min\{1, x_N + y_N + t\}\,\Gamma(x - y^*, t - \tau^*) \\ &\le C\min\{1, x_N + y_N + t\}\,\Gamma(x - y^*, t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

が成り立つ.
(ii) $|x - y|^* \ge 2(N+2)t$ のとき, $\tau \in (0, t)$ について

$$t - \tau < t \le \frac{|x - y^*|^2}{2(N+2)}$$

であるから, (3.10) より

$$-\partial_{x_N}\Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t - \tau) \le -\partial_{x_N}\Gamma(x - y^* + \tau e_{x_N}, t).$$

(i) と同様に評価 (3.12) が従う.

従って, $(x, y, t) \in D_2 \cup D_3$ について評価 (3.12) が成り立ち, $(x, y, t) \in D_2$, $(x, y, t) \in D_3$, のいずれの場合においても $H \le \overline{H}$ が成り立ち, 定理 3.2 の証明が完了した. □

## 4　半線形熱方程式の時間大域解

定理 3.1, 3.2 の応用例として, 次の動的境界条件つき半線形熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^p, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \partial_t u + \partial_\nu u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi^i \ge 0, & x \in \Omega, \\ u(x,0) = \phi^b \ge 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{SH}$$

の時間大域的正値解の有無を調べる. ここで, $p > 1$ である.

### 4.1 藤田型の結果

問題 (SH) について述べる前に, 半線形熱方程式の時間大域正値解に関する藤田型の結果と呼ばれる結果について述べる. 次の Cauchy 問題

$$\partial_t u - \Delta u = u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \quad u(x,0) = \phi \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{F}$$

について, Fujita [11] は次の非常に重要な結果を与えた:

- $1 < p < p_F := 1 + \frac{2}{N}$ のとき, いかなる初期値 $\phi \geq 0$ についても問題 (F) は時間大域正値解 $u$ をもたない;
- $p > p_F$ のとき, 初期値 $\phi \geq 0$ が恒等的に 0 でなくかつ十分小さければ問題 (F) は時間大域正値解 $u$ をもつ.

この結果の重要な点は, 時間大域解の有無を分ける新たな臨界指数 $p_F$ を与えた点にある. このような臨界指数は藤田臨界指数と呼ばれ, 様々な設定の半線形熱方程式について藤田臨界指数の同定が試みられてきた. たとえば, 半空間上の Neumann 問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^p, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \partial_\nu u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{SHN}$$

は, 折り返しによって問題 (F) に帰着されるため, 藤田臨界指数も問題 (F) と同じく $1 + \frac{2}{N}$ である. 一方で, Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^p, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{SHD}$$

については, 藤田臨界指数は問題 (F), (SHN), とは異なり $1 + \frac{2}{N+1} < p_F$ であることが [18] などによって示されている.

**補足 4.1.** $p$ がちょうど藤田臨界指数の場合, 時間大域的正値解は存在しないことが多い. たとえば, 問題 (F) については [21], 問題 (SHD) については [18], を見よ.

問題 (SH) については, 境界条件 (1.5) は Dirichlet 条件と Neumann 条件の中間的な条件であるので, 藤田臨界指数も $1 + \frac{2}{N+1}$ と $1 + \frac{2}{N}$ の間にあることが期待されるが, 具体的に何であるかは未解決であった. これは主に, 線形問題の長時間挙動が未解明であったことに起因している.

### 4.2 問題 (SH) に関する結果

問題 (SH) について得た主な結果は, その藤田臨界指数の決定である.

**定義 4.1.** $\phi^i$ と $\phi^b$ をそれぞれ $\Omega$ と $\partial\Omega$ 上の非負値可測関数とする．$u \in C(\overline{\Omega}\times(0,T))$ が問題 (SH) の $\Omega\times(0,T)$ における解であるとは, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,T;L^\infty(\Omega))$ でかつ $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$ について

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)\\
&= \int_\Omega G(x,y,t)\phi^i(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} G(x,y,t)\phi^b(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_0^t\int_\Omega G(x,y,t-s)u(y,s)^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

が成り立つことであるとする．

**補足 4.2.** $\phi^i \in BC(\overline{\Omega})$ で $\phi^b = \phi_i|_{\partial\Omega}$ であるとする．$u$ を $\Omega\times(0,T)$ における (SH) の有界な古典解とすると,

$$
\begin{aligned}
&\partial_s \int_\Omega G(x,y,t-s)u(y,s)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_\Omega \left(-\Delta_y G(x,y,t-s)u(y,s) + G(x,y,t-s)(\Delta u + u^p)(y,s)\right)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{\partial\Omega} \big(-\partial_{\nu_y} G(x,y,t-s)u(y,s) + G(x,y,t-s)\partial_\nu u(y,s)\big)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&\qquad + \int_\Omega G(x,y,t-s)u(y,s)^p\,\mathrm{d}y\\
&= -\partial_s \int_{\partial\Omega} G(x,y,t-s)u(y,s)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega G(x,y,t-s)u(y,s)^p\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega G(x,y,t-s)u(y,s)^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\
&= \lim_{s\to t-0}\left(\int_\Omega G(x,y,t-s)u(y,s)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} G(x,y,t-s)u(y,s)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right)\\
&\qquad - \int_\Omega G(x,y,t)\phi^i(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} G(x,y,t)\phi^b(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&= u(x,t) - \int_\Omega G(x,y,t)\phi^i(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} G(x,y,t)\phi^b(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)
\end{aligned}
$$

となり, (4.1) が成り立つ．逆に, $u$ が定義 4.1 の解であるとすると, $u \in C^{2;1}(\overline{\Omega}\times(0,T))$ で,

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u &= u^p, \quad x\in\Omega,\ t>0,\\
\partial_t u + \partial_\nu u &= 0, \quad x\in\partial\Omega,\ t>0,
\end{aligned}
$$

が各点で成り立つ.

**定理 4.1** ([17, Theorem 3.1])**.** $\phi_i \in BC(\Omega)$ と $\phi_b \in BC(\partial\Omega)$ を非負値関数とする．以下が成り立つ*:*

(i) $1 < p \le 1 + \frac{2}{N}$ のとき, 問題 (SH) は正値な解をもたない*;*

(ii) $p > 1 + \frac{2}{N}$ のとき, $\delta > 0$ が存在し, $(\phi_i, \phi_b) \neq (0,0)$ かつ

$$\|\phi^i\|_{L^1(\Omega)} + \|\phi^i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\phi^b\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|\phi^b\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < \delta$$

のとき, 問題 (SH) は正値な解をもつ.

定理 4.1 の証明は, 3.2 節で述べたように基本解の挙動が Neumann 熱核のそれと近しいことを用いる. とくに, (i) の証明では藤田方程式の時間大域解に関する普遍不等式

$$\int_{B_r(x)} u(y,t)\,\mathrm{d}y \leq Cr^{N-\frac{2}{p-1}} \quad \text{for} \quad B_r(x) \subset \Omega$$

と $H$ の下からの評価を矛盾させ, (ii) の証明には系 3.1 に基づく逐次近似法を用いる.

## 参考文献


[1] J. M. Arrieta, A. J. Enez–Casas, and A. Rodriguez – -Bernal, *Robin type conditions arising from concentrating potentials*, Proceedings of Equadiff. **11** (2025), 157–164.

[2] C. Bandle, J. von Below, and W. Reichel, *Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **17** (2006), no. 1, 35–67.

[3] P. Colli, T. Fukao, and K. F. Lam, *On a coupled bulk-surface Allen-Cahn system with an affine linear transmission condition and its approximation by a Robin boundary condition*, Nonlinear Anal. **184** (2019), 116–147.

[4] P. Colli and J.-F. Rodrigues, *Diffusion through thin layers with high specific heat*, Asymptotic Anal. **3** (1990), no. 3, 249–263.

[5] J Ercolano and M. Schechter, *Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions, I*, Comm. on Pure and Appl. Math. **18** (1965), no. 1–2, 83–105.

[6] J. Escher, *Nonlinear elliptic systems with dynamic boundary conditions*, Math. Z. **210** (1992), no. 3, 413–439.

[7] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, and S. Romanelli, *The heat equation with generalized Wentzell boundary condition*, J. Evol. Equ. **2** (2002), no. 1, 1–19.

[8] M. Fila, K. Ishige, and T. Kawakami, *Large-time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition*, Adv. Differential Equations **18** (2013), no. 1-2, 69–100.

[9] M. Fila, K. Ishige, and T. Kawakami, *The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition*, Commun. Contemp. Math. **23** (2021), no. 1, Paper No. 2050003, 20.

[10] M. Fila and P. Quittner, *Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition*, Math. Methods Appl. Sci. **20** (1997), no. 15, 1325–1333.

[11] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124 (1966).

[12] Y. Giga and N. Hamamuki, *On a dynamic boundary condition for singular degenerate parabolic equations in a half space*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **25** (2018), no. 6, Paper No. 51, 39.

[13] Y. Giga, M. Łasica, and P. Rybka, *The heat equation with the dynamic boundary condition as a singular limit of problems degenerating at the boundary*, Asymptot. Anal. **135** (2023), no. 3-4, 463–508.

[14] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[15] F. Henneke and B. Q. Tang, *Fast reaction limit of a volume-surface reaction-diffusion system towards a heat equation with dynamical boundary conditions*, Asymptot. Anal. **98** (2016), no. 4, 325–339.

[16] T. Hintermann, *Evolution equations with dynamic boundary conditions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **113** (1989), no. 1-2, 43–60.

[17] K. Ishige, S. Katayama, and T. Kawakami, *Fundamental solution to the heat equation with a dynamical boundary condition*, J. Elliptic and Parabol. Equ. (2025).

[18] O. Kavian, *Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4** (1987), no. 5, 423–452.

[19] J. B. Keller, *Oblique derivative boundary conditions and the image method*, SIAM J. Appl. Math. **41** (1981), no. 2, 294–300.

[20] P. Knopf and C. Liu, *On second-order and fourth-order elliptic systems consisting of bulk and surface PDEs: well-posedness, regularity theory and eigenvalue problems*, Interfaces Free Bound. **23** (2021), no. 4, 507–533.

[21] F. B. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981), no. 1-2, 29–40.