

二階算術上での quasi-Polish space

東北大学 金子 柚月

Yuzuki Kaneko
Tohoku University

本稿は Kaneko/Yokoyama [6, 7] の結果を概観するものである.

1 はじめに

Polish space (ポーランド空間) は記述集合論において中心的に扱われる対象であり, 次のような性質によって特徴づけられる.

- Hilbert cube $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ の Π_2^0 部分空間として特徴づけられる
- 空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ からの連続全射が存在する
- 可算稠密集合の完備化として書ける

二階算術 (Second-order Arithmetic) においても, 空間を距離空間 (A, d) の組として, 点を effective な Cauchy 列としてコードすることが可能であり, 解析学の諸定理の逆数学分析などに活用されてきた [12].

点を Cauchy 列のクラスとみなすこの表現は, 可分な距離空間のみに限定されている. しかし, 距離 (metric) を準距離 (quasi-metric) に置き換えることで, 第二可算 T_0 空間の表現へと一般化することが可能となる. 特に quasi-Polish space は, 次のような対応する性質を持つ.

- $S^{\mathbb{N}}$ の Π_2^0 部分空間として特徴づけられる
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ からの連続全射が存在する
- ある可算集合の $\hat{d}$ 完備化として書ける

ただし $S^{\mathbb{N}}$ は Sierpinski 空間 $S := (\{0, 1\}, \{\{0, 1\}, \{1\}, \emptyset\})$ の可算直積である. $S^{\mathbb{N}}$ は対応する位相をいれた $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と同一視される [2]. すなわち, 「 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間であること」と「quasi-Polish space であること」は同値である.

このように, 準距離を用いることで, 二階算術上で扱うことのできる, より一般的な空間のクラスが得られる.

距離化可能性を仮定しない空間を二階算術で扱う手法としては、他にフィルター空間を用いる方法がある。Mummert [10] では、UF space および MF space という 2 種のフィルター空間について、距離化定理などの逆数学分析が行われている。

この UF space については、以前より本田氏らによって quasi-Polish space との同値性が指摘されていた。さらに、Point-free Topology の観点からは、開集合系が countably presented frame であり、かつ Sober な空間とも同値であることが知られている [5]。

これらの表現はそれぞれ二階算術の枠組みに持ち込むことができ、表現の同値性を証明するための必要な公理の強さ（逆数学的な強さ）が研究の対象となっている [6]。quasi-Polish space は、記述集合論的、計算論的 (de Brecht, Kihara, Selivanov [4] など)、あるいは Point-free Topology 的な側面から多角的に研究されているが、用途に応じてこれらの表現を使い分ける（置き換える）際には、 $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ のような強い公理が必要になる場合がある。

本稿では、quasi-Polish space の二階算術への導入手法とその基本的事実について紹介する。第 2 節では、通常の数学における定義と quasi-Polish space の諸性質を概観し、第 3 節で二階算術への導入および表現の読み替えの逆数学的強さを検討する。第 4 節では、表現の同値性から導かれる帰結の一例として、MF space の分類と逆数学的な結果を紹介する。

2 準備

この節では、フィルター空間と quasi-Polish space の基本的性質を確認する。以下からは、すべての空間に第二可算性を仮定する。

Definition 2.1 (第二可算フィルター空間). フィルター空間 (poset space) を定義する。半順序集合 (poset) $P = (P, \leq)$ の部分集合 F が P のフィルター (filter) であるとは、次の条件を満たすことをいう。

- (i) $\forall p, p' \in P ((p \in F \wedge p \leq p') \rightarrow p' \in F)$
- (ii) $\forall p, p' \in P ((p, p' \in F) \rightarrow \exists r \in F (p, p' \geq r))$

フィルター全体の集合 $\mathbb{F}(P)$ は、開基 $\{N_p | p \in P\}$ (ただし $N_p = \{F \in \mathbb{F}(P) : p \in F\}$) によって位相空間とみなされる。

- フィルター F が unbounded とは $\neg \exists r \in P (\forall p \in F (r < p))$ であること。
- フィルター F が maximal とは真に F を含むフィルターが存在しないこと、すなわち $\forall r \in P ((r \notin F) \rightarrow \exists p \in F (r \perp p))$ を満たすこと。
- フィルター F が non principal とは $\forall p \in F \exists p' \in F (p < p')$ であること。

それぞれのフィルターの集合を $\text{UF}(P)$, $\text{MF}(P)$, $\text{NP}(P)$ と表記し、 $\mathbb{F}(P)$ の部分空間として位相を導入する。

まず、位相を保ったまま $\text{UF}(P)$ がより扱いやすいように、半順序集合 P を取り直すことを考える。

Proposition 2.1. 1. 任意の可算半順序集合 P に対し, $\text{UF}(P) \cong \text{UF}(P') = \text{NP}(P')$ を満たす可算半順序集合 P' が存在する.

2. 任意の可算半順序集合 P に対し, $\mathbb{F}(P) \cong \text{UF}(P') = \text{NP}(P')$ を満たす可算半順序集合 P' が存在する.

以下, $\mathbb{F}(P)$ や $\text{UF}(P)$ については, すべて $\text{UF}(P) = \text{NP}(P)$ なる空間として扱う.

Definition 2.2 (Polish and quasi-Polish spaces). 集合 $X \neq \emptyset$ 上の準距離 (quasi-metric) とは, 関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ で次を満たすものをいう.

$$(i) \forall x, y \in X (d(x, y) \geq 0)$$

$$(ii) \forall x, y \in X (d(x, y) = d(y, x) = 0 \rightarrow x = y)$$

$$(iii) \forall x, y, z \in X (d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z))$$

(ii) は T_0 分離公理に対応する. 準距離 d は開球の族 $\mathcal{B} = \{\{y \in X : d(x, y) < r\} : x \in X, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ を開基とする X 上の位相を生成する. 準距離空間 X の点列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が left-Cauchy 列であるとは:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > \forall n > N (d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

を満たすことである. 位相空間 (X, d) が Smyth-完備であるとは, 任意の left-Cauchy 列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が次の意味での収束点 $a \in X$ を持つことをいう:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (d(a, a_n) < \varepsilon \wedge d(a_n, a) < \varepsilon).$$

第二可算完備距離化可能空間を Polish space と呼ぶように, 第二可算 Smyth-完備準距離化可能な空間を quasi-Polish space と呼ぶ.

準距離とは, 対称性のない距離であると思わせるため, $\hat{d}(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$ と定めた $\hat{d}$ は距離になっている. 準距離空間 (X, d) において $(X, \hat{d})$ が完備距離空間であるとき, その空間を bicomplete と呼ぶ.

位相空間 $(X, \hat{d})$ は (X, d) よりも細かい位相を持つ距離空間であり, 準距離空間 (X, d) の性質をある程度保持している. 例えば次が従う.

Lemma 2.2 (de Brecht [2, Prop.13], Künzi [9]). (X, d) が第二可算準距離空間 $\Leftrightarrow (X, \hat{d})$ が可分距離空間

ただし, 定義より Smyth-完備ならば bicomplete は明らかだが, その逆は必ずしも成立しない. さらに距離空間の場合との重要な相違点が存在する.

Remark 2.3. 一般に, 距離空間においては完備化が常に可能であるが, 準距離空間 (X, d) は, 必ずしも Smyth-完備化可能とは限らない.

Example 2.3. 点列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について準距離 d を $n < m$ のとき $d(a_n, a_m) = 2^{-n}$, そうでないとき 1 と定める. $(a_n)_n$ は left-Cauchy 列であるが, 収束点 a を持つと仮定すると, 十分大きな $n > m$ で $d(a_n, a) + d(a, a_m) \leq 2^{-n} + 2^{-1} < 1 = d(a_n, a_m)$ となり, 三角不等式に反する.

最も一般的な quasi-Polish space として次を定義する.

Definition 2.4 (空間 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). $S^{\mathbb{N}}$ と同相な位相を入れた空間 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は, quasi-Polish space かつ, フィルター空間でもある. 次の空間は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と同相である.

1. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ に準距離 $d(F, G) = 2^{-j}$ (ただし, $j = \min\{i : i \in F \wedge i \notin G\}$, 該当する i がなければ 0) を導入した Smyth-完備準距離空間.
2. 有限部分集合の族 $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ に包含関係の逆向きの順序 ($p \geq q \Leftrightarrow p \subseteq q$) に入れた半順序集合からなるフィルター空間 $\mathbb{F}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$.

また, T_0 空間について, Borel 集合を定める. 距離空間とは異なり, T_0 空間では開集合を閉集合の可算和として書けない場合があることに注意する.

Definition 2.5 (Borel 集合 [2, Def.1]). 位相空間 (X, τ) に対し, Borel 集合族を次のように定める:

1. Σ_1^0 を, 開集合族 τ とする.
2. $\Sigma_\alpha^0 = \{\bigcup_{i \in \omega} (B_i \setminus B'_i) : B_i, B'_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta^0\}$
3. $\Pi_\alpha^0 = \{X \setminus A : A \in \Sigma_\alpha^0\}$
4. $\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$

(ただし, $\alpha > 0$ は任意の順序数) .

特に Π_2^0 部分空間は, 閉集合列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 開集合列 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を用いて, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup B_n$ の形で記述される.

これらの定義から, 次が証明される.

Theorem 2.4. 第二可算 UF space $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間.

Proof. ($\Rightarrow$) Unbounded filter の定義は Π_2^0 式のため, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間に埋め込める. ($\Leftarrow$) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ が半順序集合 $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ のフィルター空間であることから, $(n, \sigma) \in \bigcap_{i < n} A_i \cup B_i$ なるように半順序集合を $\mathbb{N} \times \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ の部分集合として取り直せばよい. $\square$

Theorem 2.5 (de Brecht [2, Thm 23]). quasi-Polish space $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間.

Proof. ($\Rightarrow$) 第二可算であることから, quasi-Polish space は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ に埋め込める. Smyth-完備性から Π_2^0 部分空間であることが従う. ($\Leftarrow$) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は quasi-Polish space. Polish space の Π_2^0 部分空間が Polish space であることと同様に, Smyth-完備な距離を構成することで証明する. $\square$

フィルター空間 $\text{NP}(P)$ は $\mathbb{F}(P)$ の閉集合であることから, $\text{NP}(P)$ と $\text{UF}(P)$ の表記の同値性も従う.

さらに, frame についても定義しておく.

Definition 2.6 (frame). 完備束 (complete lattice) τ が frame であるとは, 任意の $u \in \tau$ および族 $(v_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ に対し, 次の分配法則 (distribution law) を満たすことである.

$$u \wedge \bigvee_{i \in I} v_i = \bigvee_{i \in I} (u \wedge v_i)$$

任意の位相空間の開集合系は, 包含関係からなる順序と和と交叉の構造から, frame として見るができる. 特に, T_0 位相空間であれば, 同じ frame を持つ位相空間とは同相になる. 逆に frame が spatial であるとは, その frame の束構造から生成される最小の順序関係 $a \prec b$ (または, formal topology における包含関係) と, ある空間 X における実際の開集合としての包含関係 $\forall x \in X (x \in a \rightarrow x \in b)$ が一致することを指す.

特に, 次に定義する countably presented frame $\langle G; R \rangle$ が spatial か考えたい.

Definition 2.7 (countably presented frame). G を可算な生成元の集合, $R \subseteq \langle G \rangle \times \langle G \rangle$ を可算な二項関係とする. ここで $\langle G \rangle$ は G から生成される自由 frame であり, その元は $\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{g \in F} g$ (ただし $\mathcal{F}$ は G の有限部分集合の族) の形で表され, $\langle G \rangle$ の順序 $\leq$ は

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{g \in F} g \leq \bigvee_{F' \in \mathcal{F}'} \bigwedge_{g' \in F'} g' \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \exists F' \in \mathcal{F}' (F' \subseteq F)$$

と定まる. countably presented frame $\langle G; R \rangle$ とは, 集合 $\langle G \rangle$ とその可算な二項関係 $R \subseteq \langle G \rangle \times \langle G \rangle$, そして次で定義される順序 $\prec$ の組からなる frame である.

Definition 2.8 (congruence preorder). $\langle G; R \rangle$ の二項関係 $\prec_m$ が congruence preorder であるとは, すべての $a, b, c \in \langle G \rangle$ に対し, 次の条件を満たすことをいう.

1. $a \leq b \Rightarrow a \prec_m b, (a, b) \in R \Rightarrow a \prec_m b$
2. $a \prec_m b, b \prec_m c \Rightarrow a \prec_m c$

特に, 最小の congruence preorder を $\prec$ と書く. countably presented frame $\langle G; R \rangle$ の二つの開集合 a, b に対し $a \prec b$ であるとは, すべての congruence preorder $\prec_m$ において $a \prec_m b$ が成立することである.

congruence preorder $\prec_m$ は frame 準同形 $\phi : \langle G \rangle \rightarrow H$ であって, 「任意の $(u, v) \in R$ に対して $\phi(u) \leq_H \phi(v)$ 」を満たすものと対応している. その中で普遍性を持つよう定義されたのが $\langle G; R \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccc} \langle G \rangle & \xrightarrow{\iota} & \langle G; R \rangle \\ & \searrow \phi & \downarrow \exists! \tilde{\phi} \\ & & H \end{array}$$

$\{0, 1\}$ も $0 < 1$ なる順序から frame なので, congruence preorder のうち, 特に $\xi : G \rightarrow \{0, 1\}$ から生成される準同型を考えることができる. $x \in g \Leftrightarrow \xi(g) = 1$ とすれば, これは $\langle G; R \rangle$ を開集合系とする位相空間における「点」 x に対応している. この frame に対し, frame 準同型 $\xi : \langle G; R \rangle \rightarrow \{0, 1\}$ 全体の集合に $\{O_g : g \in G\}$ (ただし, $O_g = \{\xi : \xi(g) = 1\}$) を準開基とした位相空間を定義する. spatial か確かめたい際は, この空間の開集合系が $\langle G; R \rangle$ と一致するか確認すればよい.

Definition 2.9 (spatial). $\langle G; R \rangle$ が spatial であるとは, すべての開集合 a, b について $a \subseteq b \Leftrightarrow a \prec b$ が成り立つことと等しい. ここで $a \subseteq b$ とは, 任意の点 $\xi : G \rightarrow \{0, 1\}$ に対して ξ が $\xi(a) = 1 \rightarrow \xi(b) = 1$ が成立すること (点空間における包含関係) を指す.

Theorem 2.6 (Heckmann [5, Thm 4.7]). 任意の countably presented frame $\langle G; R \rangle$ は spatial である. すなわち, $\langle G; R \rangle$ を開集合系 (に同相な frame) として持つ位相空間が存在する.

実際, Thm 2.6 において, frame $\langle G; R \rangle$ の点空間は, $\mathcal{P}(G)$ の部分集合として

$$\bigcap_{(u,v) \in R} ((\mathcal{P}(G) \setminus U) \cup V)$$

(ここで U, V は関係式 $(u, v) \in R$ に対応する開集合. すなわち, $u = \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{g \in F} g$ に対し $U = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \bigcap_{g \in F} O_g$) の形で記述できるため, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間と同相になるためである. 以上より, 次の空間のクラスはすべて一致する.

1. quasi-Polish spaces
2. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間
3. 第二可算 UF spaces
4. 第二可算 NP spaces
5. 開集合系が countably presented frame である sober 空間

このクラスについて, 表記の同値性から自然に次が成り立つ.

- Π_2^0 部分空間の形成について閉じている.
- 可算直積について閉じている.
- Strong Choquet である. 特にベールの範疇定理を満たす.
- Baire 空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ からの連続全射が存在する.
- 任意の点 x に対して, ある点 y が存在して $x \in \overline{\{y\}}$ かつ $\bigcap_{y \in B_i} B_i = \{y\}$ を満たす (ただし $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は開基, $\overline{\{y\}}$ は $\{y\}$ の閉包).
- Hausdorff かつ Regular でない空間を含む (例: K-topology).

なお, 第二可算 UF spaces が可算直積について閉じていることは, Mummert/Stephan [11, Question 4.5] で未解決の疑問として挙げられていた.

3 二階算術上の quasi-Polish space の形式化

本節では, 前節で述べた定義を二階算術の枠組みへ導入し, 表記の置き換えに対する逆数学分析の結果を紹介する.

二階算術では, 標準的な体系として $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ が想定されている. 本稿では, 以下の二階算術の公理系を使用する:

- $\text{RCA}_0 :=$ 一階算術の基本公理 + Σ_1^0 帰納法 + Δ_1^0 内包公理
- $\text{ACA}_0 := \text{RCA}_0$ + 算術的内包公理
- $\Sigma_1^1\text{-DC}_0 := \text{ACA}_0$ + Σ_1^1 従属選択公理
- $\Pi_1^1\text{-CA}_0 := \text{RCA}_0$ + Π_1^1 内包公理

これらは下に向かって順に強い公理系となっている.

前節の結果を二階算術の枠組みで扱うために, いくつかの定義を再構成する.

Definition 3.1 (フィルター, RCA_0). 半順序集合 $(P, \leq)$ ($P \subseteq \mathbb{N}, \leq \subseteq P \times P$) に対して, P の減少列 $((p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ または自然数 M に対し $(p_n)_{n < M}$) をフィルターと呼ぶ.

減少列 $(p_n)_n$ に対してその上方閉包を $\text{upcl}((p_n)_n) = \{p \in P : \exists n(p_n \leq p)\}$ と定めると $\text{upcl}((p_n)_n)$ はフィルターの公理を満たす. RCA_0 において, 任意のフィルター $F \subseteq P$ に対して $\text{upcl}((p_n)_n) = F$ なる $(p_n)_n$ が構成可能である. したがって, 集合としてのフィルターを扱う代わりに, それを生成する減少列を議論の対象とする.

この表現の切り替えを行う理由は, 以下の補題による.

Lemma 3.1 (Mummert [10, Thm 4.1.2]). RCA_0 上で, 次は同値:

1. ACA_0
2. 任意の半順序集合 P の減少列からフィルターを生成できる (すなわち, 任意の減少列 $(p_n)_n$ に対し $\text{upcl}((p_n)_n)$ が集合として存在する).

上記の補題から, フィルターを集合として扱うと本質的でない ACA_0 が必要になる恐れがある. 本稿では不要な公理の使用を避け, RCA_0 上での分析を可能にするため, 減少列をフィルターとみなす手法を採用する.

X が P のフィルターであるとき, X は $\mathbb{F}(P)$ の元である, あるいは $X \in \mathbb{F}$ と書くことにする. $\text{UF}(P), \text{NP}(P), \text{MF}(P)$ も同様に定める. RCA_0 において Prop 2.1 と同様に, 任意の可算半順序集合 P に対し $\text{UF}(P) = \text{UF}(P') = \text{NP}(P')$ を満たす可算半順序集合 P' を構成することが可能である. したがって, 以下では一般性を失うことなく UF space は $\text{UF}(P) = \text{NP}(P)$ を満たすものと仮定する. このとき, $\text{UF}(P)$ の点は無限減少列として表現される. 一方で後述するように, RCA_0 上では $\text{NP}(P)$ は UF space として書けるとは限らない.

また, RCA_0 上で, 次のように準距離空間を定義する.

Definition 3.2 (RCA_0). 第二可算準距離空間 (X_A, d) とは, 可算集合 A と擬準距離 $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ の組 (A, d) でコードされた空間のことを言う. 擬準距離 d は任意の $a, b, c \in A$ に対し, $d(a, a) = 0$, $d(a, b) \geq 0$, $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ を満たす. $x := (a_n)_n$ が X_A の元であるとは, $\forall a_n \in A$ かつ (effective な) $\hat{d}$ -Cauchy 列 ($\forall n < m \in \mathbb{N} (d(a_n, a_m) < 2^{-n} \wedge d(a_m, a_n) < 2^{-n})$) である ($(A, \hat{d})$ から定まる可分完備距離空間の点である) ということ.¹

このとき, (X_A, d) の二点 $x := (a_n)_n$, $y := (b_n)_n$ が $x = y$ とは $\forall n \in \mathbb{N} d(a_n, b_n) + d(b_n, a_n) < 2^{-n+2}$ であると定義する.

上の定義による準距離空間は $(A, \hat{d})$ の完備化として定められているため, 可分 bicomplete である. Lem 2.2 より, この定義を用いて任意の第二可算 bicomplete 準距離空間を表現できる.

特に (X_A, d) が第二可算 Smyth-完備準距離空間であるとは, 任意の (effective な) left-Cauchy 列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し (effective な) $\hat{d}$ -Cauchy な部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在することと定義する. Smyth-完備ならば bicomplete なのは通常の数学上で明らかなので, この形式化で全ての quasi-Polish space を表現できる. なぜ left-Cauchy 列を空間の点として採用せずわざわざ距離 $\hat{d}$ の完備化を考えているのかというと, 前節で見たとおり, 距離と異なり準距離においては, 一般の (A, d) を Smyth-完備化することはできないためである.

ただしこの形式化もバリエーションを持ちうる.

Lemma 3.2. RCA_0 上, 次は同値:

1. ACA_0
2. 任意の準距離空間 (A, d) と, $n, m \rightarrow \infty$ に対して $d(a_n, a_m) + d(a_m, a_n) \rightarrow 0$ を満たす effective な left-Cauchy 列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し effective な $\hat{d}$ -Cauchy 部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在する.

したがって, Smyth-完備化できる (A, d) であったとしても, ACA_0 がなければ, Smyth-完備な (X_A, d) になっているとは限らない. よって X_A の点を $n, m \rightarrow \infty$ に対して $d(a_n, a_m) + d(a_m, a_n) \rightarrow 0$ を満たす effective な left-Cauchy 列として Smyth-完備準距離空間を表示する方が妥当である可能性もあるが, ここでは $\hat{d}$ -Cauchy 列が点であると定義する.

さらに, 二つの空間が同相であることを述べるため, 位相について形式化しておく.

Definition 3.3 (可算開基, RCA_0). • 可算半順序集合 $P \subseteq \mathbb{N}$ から生成されるフィルター空間 $\mathbb{F}(P)$ の開基は $N_p = \{(a_n)_n : \exists n (p \geq a_n)\}$ の形をしているため, その開基は P でコードされる.

- 第二可算準距離空間 (X_A, d) に対し, 可算開基を $\{(a, r) : a \in A \wedge r \in \mathbb{Q}_+\}$ とコードし, $x \in X_A$ に対し, $x \in (a, r) \Leftrightarrow d(a, x) < r$ という開球を定めるとする.

¹ここでの $\hat{d}$ は二章の $\hat{d}(a, b) = \max\{d(a, b), d(b, a)\}$ と定義される擬距離であって, Simpson による記法 [12, Def II.5.1] での, 可算集合 A と擬距離 $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ の組 (A, d) を完備化した $(\hat{A}, \hat{d})$ の距離 $\hat{d} : \hat{A} \times \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}$ とは異なる.

このように、第二可算 T_0 空間 X に対し可算開基のコード $W = \langle w_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ が定まっているとき、開集合のコード $U \subseteq \mathbb{N} \times W$ を、 X の元 x に対し $\exists(n, w) \in U (x \in w)$ を $x \in U$ というように定める。

前節と同様に、開集合のコードで示される部分空間、または空集合を Σ_1^0 部分空間と呼ぶ。これにより、Borel 集合は自然に定まる。

Definition 3.4 (有限ランク Borel 集合, RCA_0). 第二可算 T_0 空間 X に対し可算開基のコード $W = \langle w_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ が定まっているとする。 $W' := W \cup \{\emptyset\}$ とおく。

1. 空集合の Borel 集合としてのコードは、 $\{(1, 1, \langle \rangle)\}$ とする。
2. 開集合 $U \subseteq \mathbb{N} \times W$ の Borel 集合としてのコードを、 $(1, 1, \langle w_i : i \in \mathbb{N} \rangle)$ (ただし $\langle w_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ は U の並べ上げ) とする。
3. $1 < k < \omega$ に対して、 $Y := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B_i \setminus B'_i)$ なる Σ_k^0 部分空間 (ただし、 B_i, B'_i は Σ_{k-1}^0 部分空間であり、それぞれ $(1, k-1, \langle v_{i,m} : m \in \mathbb{N} \rangle), (1, k-1, \langle w_{i,n} : n \in \mathbb{N} \rangle)$ とコードされているとする) を、次のようにコードする。

$$(1, k, \langle ((1, v_{i,m}), (0, w_{i,m})) : i, m \in \mathbb{N} \rangle)$$

4. 上の Y の補集合である Π_k^0 部分空間 $X \setminus Y$ を

$$(0, k, \langle ((1, v_{i,m}), (0, w_{i,m})) : i, m \in \mathbb{N} \rangle)$$

とコードする。

特に、 Π_2^0 部分空間 $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \cup B_i$ (ただしそれぞれ、 $B_i = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} v_{i,m}$ なる開集合、 $A_i = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} w_{i,n}$ なる閉集合) は、 $(0, \langle (1, (l_{i,n}, v_{i,n})), (0, (t_{i,n}, w_{i,n})) : i, n \in \mathbb{N} \rangle) \subseteq \{0\} \times (\{1\} \times \mathbb{N} \times W' \times \{0\} \times \mathbb{N} \times W') \times \mathbb{N}$ とコードされる。

$m < k$ のとき、 $k, m \in \omega$ の帰納法から Σ_m^0 集合のコード (同様に Π_m^0 集合) は、 Σ_k^0 集合や Π_k^0 集合のコードとして書き換えることができる。

次に、開基の逆像が再び開集合になるという性質に基づき、連続関数をコード化する。以下、第二可算 T_0 空間を上で定義したフィルター空間や準距離空間のことであるとする。

Definition 3.5 (連続関数, RCA_0). 第二可算 T_0 空間 (X, A) および、 (Y, B) を考える。ここで $A = \langle A_i : i \in \mathbb{N} \rangle, B = \langle B_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ はそれぞれ X, Y の開基とする。このとき、連続関数 $f : X \rightarrow Y$ のコードを次の $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times A \times B$ として定義する:

$$\Phi := \{(n, A_i, B_j) \in \mathbb{N} \times A \times B : A_i \subseteq f^{-1}(B_j)\}$$

また、このコード Φ を用いた関数 f について、 $x \in X, y \in Y$ に対し $f(x) = y$ であるとは、

$$\forall j \in \mathbb{N} ((x \in A_i \wedge \exists n, i \in \mathbb{N} (n, A_i, B_j) \in \Phi) \leftrightarrow (y \in B_j))$$

を満たすこととする。 T_0 空間の場合 $(y \notin B_j) \rightarrow \neg(x \in A_i \wedge \exists n, i \in \mathbb{N} (n, A_i, B_j) \in \Phi)$ は省略できない条件であるため、関数 f の定義域 $\text{dom}(f)$ は開集合の可算交叉とは限らず、一般には Π_2^0 部分空間となる。

Remark 3.3. 可分完備距離空間の場合には, Simpson [12] での連続関数の定義と一致する.

通常の数学的論証を二階算術上で構成することにより, 次の定理が得られる.

Theorem 3.4. 次は RCA_0 上で証明可能:

1. 可分 Smyth-完備準距離空間は, ある半順序集合 P について $\text{UF}(P)$ と同相になる.
2. $\text{UF}(P)$ は, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ のある Π_2^0 部分空間と同相になる.
3. $\text{NP}(P)$ は, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ のある Π_2^0 部分空間と同相になる.
4. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間はある NP space と同相になる.

一方で, これらの表現の同値性はしばしば強い集合存在公理を要求する.

Theorem 3.5. RCA_0 上で, 次は同値:

1. $\Pi_1^1\text{-CA}_0$
 2. 任意の UF space はある Smyth-完備準距離空間と同相である.
 3. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の任意の Π_2^0 部分空間は, ある半順序集合 P について $\text{UF}(P)$ と同相である.
 4. $\text{NP}(P)$ は, ある半順序集合 P' について $\text{UF}(P')$ と同相である.
 5. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の任意の Π_2^0 部分空間は, ある Smyth-完備準距離空間と同相である.
- $5 \Rightarrow 1$ は Polish space における Brown [1] の結果を拡張したものである.

Theorem 3.6 (Brown [1, Thm 2.10], RCA_0). $\Pi_1^1\text{-CA}_0 \Leftrightarrow$ 可分完備距離空間の閉集合は, ある完備距離空間と同相である.

$\Pi_1^1\text{-CA}_0$ は, 完備距離を構成する際ではなく, 適切な可算稠密集合を抽出する際に本質的となる.

$2 \Rightarrow 1$ も同様の方針を使う. RCA_0 上で, 特定の一点を除いたときに「可分完備距離空間の閉集合」と同相になるような UF space を構成できる. 完備距離空間の閉部分集合が, 再び完備距離空間として適切にコード化できるためには $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ が必要であるという事実 (Brown [1, Thm 2.10]) に帰着される.

4 は, NP space を UF space に書き換えることができるという主張だが, 逆は RCA_0 で示すことができる.

Remark 3.7 (RCA_0). 任意の可算半順序集合 P に対し, $\text{UF}(P) \cong \text{UF}(P') = \text{NP}(P')$ を満たす可算半順序集合 P' が存在する.

$\Pi_1^1\text{-CA}_0$ が必要となる NP space と UF space の主な表記の差は, 開基が空かどうかの判定の複雑さである. 任意の $p \in P$ に対し, $\text{UF}(P)$ においては $p \in F$ を満たす $F \in \text{UF}(P)$ が常に存在する. 一方, $\text{NP}(P)$ において $p \in P$ を満たす $p \in F$ を満たす F が存在するか否かは, Π_1^1 式 $\exists f(f : \mathbb{N} \rightarrow P \text{ は無限降下列} \wedge f(0) = p)$ によって判定される.

Example 3.6. 木 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を, 順序 $\sigma \geq \tau \leftrightarrow \sigma = \tau[lh(\sigma)]$ (σ が τ の始切片) によって半順序集合とみなす.

- T 上の無限路 (path) f に対し $\text{upcl}(f)$ は $\text{NP}(T)$ かつ $\text{UF}(T)$ の元である.
- 終端ノード (end node) τ に対し $\text{upcl}(\tau)$ は $\text{UF}(T)$ の元であるが $\text{NP}(T)$ の元ではない.

実際, $\text{NP}(T)$ において開基 $N_\sigma = \{F \in \text{NP}(T) : \sigma \in F\}$ が空でないかどうかの判定には, 無限路の存在判定が必要となる.

上記の例を精密化すると $4 \Rightarrow 1$ が示せる. $4 \Leftrightarrow 3$ より, $3 \Rightarrow 1$ も従う.

最後に frame については, 位相空間ではなく開集合系として定義されているため, その点空間と同相なこと, すなわち spatial であることを同時に示すことにする.

Definition 3.7 (countably presented frame, RCA_0). 可算集合 $G \subseteq \mathbb{N}$ に対し, 自由 frame $\langle G \rangle$ の元 $\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{g \in F} g$ を, 集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(G)$ によってコードする. $\langle G \rangle$ の順序 $\leq$ は,

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{g \in F} g \leq \bigvee_{F' \in \mathcal{F}'} \bigwedge_{g' \in F'} g' \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \exists F' \in \mathcal{F}' (F' \subseteq F)$$

と定まる. countably presented frame $\langle G; R \rangle$ とは, 生成元の集合 $G \subseteq \mathbb{N}$ と $\langle G \rangle$ の元の組の可算列 $R = \langle (u_i, v_i) : i \in \mathbb{N} \rangle$ の組である. このとき, $\langle G; R \rangle$ の各元は, $\langle G \rangle$ の元である.

次にこの $\langle G; R \rangle$ に対し, 可算な方法で congruence preorder を定義する.

Definition 3.8 (congruence preorder, RCA_0). $G \subseteq \mathbb{N}$, $R = \langle (u_i, v_i) : i \in \mathbb{N} \rangle$ とする. 二つ組 $(Q, \prec_Q)$ は次の条件を満たすとき, $\langle G; R \rangle$ の congruence preorder を定める.

1. Q は $\langle G \rangle$ の元の可算集合 $\{w_i : i \in \mathbb{N}\}$ であり, $\mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \subseteq Q$, $\text{field}(R) \subseteq Q$ を満たす.
2. $\prec_Q \subseteq Q \times Q$ は Q 上の二項関係の集合である.
3. $R \subseteq \prec_Q$.
4. 任意の $q \in Q$ に対し, $q \prec_Q q$.

また, $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(G)$ が次の条件を満たすことを $\varphi(Q, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$ と略記する.

1. $\forall i (p_i \subseteq p_{i+1})$
2. $\forall c, d \in Q \forall i (p_i \leq c \prec_Q d \rightarrow \exists k (p_k \leq d))$

このとき, $\langle G; R \rangle$ の元 a, b に対し $a \prec_m b$ を, 次のように定義する:

$$\forall (p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) (\varphi(Q, (p_i)_{i \in \mathbb{N}}) \wedge p_0 \leq a) \rightarrow \exists i \exists r, l \in Q (p_i \leq r \prec_Q l \leq b)$$

このように定義した $\prec_m$ は, RCA_0 上で前節の congruence preorder の定義を満たす. 前節に従って, countably presented frame $\langle G; R \rangle$ の二つの開集合 a, b に対し, $a \prec b$ であるとは, すべての congruence preorder $\prec_m$ において $a \prec_m b$ が成立することと定義する. 実際に

は, $Q = \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \cup \text{field}(R)$, $\prec_Q = \{(q, q) : q \in Q\} \cup R$ から定まる congruence preorder $\prec_m$ は $\prec_m = \prec$ である. また, $\varphi(Q, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$ なる $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(G)$ は, $\langle G; R \rangle$ を開集合系とする位相空間における「点」に対応しており, $\{O_g : g \in G\}$ (ただし, $O_g = \{(p_i)_i : \exists i (g \geq p_i)\}$) を準開基として T_0 空間が定義できる. そのため $\langle G; R \rangle$ が spatial であるには, この位相空間の「点」が実際に $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間 X の元に対応していること, そして X の開集合系としての包含関係が任意の congruence preorder の共通部分と一致することを示せばよい.

Proposition 3.8 (RCA_0). すべての countably presented frame は, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ のある Π_2^0 部分空間の開集合系として記述できる.

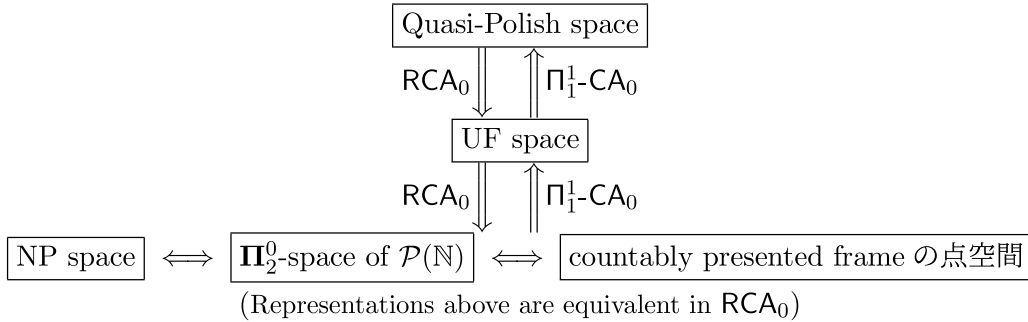
Proof. $f : G \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(g_i) = i$ とすると, $f : \mathcal{P}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(G)) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ へと拡張出来る. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の部分集合 X を

$$X := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus f(u_n)) \cup f(v_n))$$

とする. ある $(Q, \prec_Q)$ から定まる congruence preorder について $a \not\prec_m b$ と仮定する. この $\prec_m$ から $\varphi(Q, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$, $p_0 \leq a$ かつ $\forall i \forall r, l \in Q \neg (p_i \leq r \prec_Q l \leq b)$ なる $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(G)$ が存在する. $\varphi(Q, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$ なる $(p_i)_i$ は X の元 $x = (p'_i)_i$ で $x \in f(a) \setminus f(b)$ なるものを生成するため, $a \not\subseteq b$. 逆も X の元である減少列 $(p'_i)_i$ から上記のような $(p_i)_i$ が作れるため示せる. $\square$

逆に $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分空間の開集合系が countably presented frame として書けることは明らか.

以上の結果をまとめると, 公理系による表記の同値性は以下の図式のようなになる.



4 MF space の分類

ここまで quasi-Polish spaces, すなわちフィルター空間としては UF space について議論してきたが, [11, 10] においては UF space のみならず MF space についても詳細な研究が行われている. MF space は UF space の Π_1^1 部分空間としての側面を持ち, 逆数学的には距離化定理や Baire 空間であることの証明など, UF space よりも強い公理を要するが多い. 本節では, 前節までに確立した「表記の同値性」の応用として, MF space の分類およびその逆数学的分析の結果を紹介する.

4.1 Hurewicz の定理の MF space への適用

Mummert/Stephan [11, Thm 5.2] は, フィルター空間が strong Choquetであることを示した. 一般に strong Choquet ならば Baire 空間であるため, UF space および MF space はいずれも Baire 空間である. 距離化可能な第二可算空間において「strong Choquet であること」と「Polish space であること」は同値であるが, strong Choquet な第二可算 T_0 空間が必ずしも quasi-Polish space であるとは限らない. MF space はその反例を与える.

Definition 4.1. 位相空間 X が completely Baire であるとは, X の任意の閉部分空間が Baire 空間であることをいう.

quasi-Polish space は常に completely Baire であるが, MF space は completely Baire でない (すなわち Baire 空間でない閉部分集合を持つ) 場合がある. この事実は, MF space が必ずしも quasi-Polish とはならないことを示唆している.

では, MF space が quasi-Polish となるのはどのような場合か. その特徴付けとして次の定理が挙げられる.

Theorem 4.1. MF space の任意の Π_1^1 部分集合は, それ自身が quasi-Polish であるか, あるいは $\mathbb{Q}$ と同相な Π_2^0 集合を含む.

$\mathbb{Q}$ は Baire 空間ではない. したがってこの定理は, MF space が quasi-Polish であるかどうかは, その空間が completely Baire 性を満たすかどうか依存すると主張している. この結果は, Polish space における Hurewicz の定理と高い類似性を持つ.

Theorem 4.2 (Hurewicz [8, Thm 21.18]). Polish space の任意の Π_1^1 部分集合は, それ自身が Polish であるか, あるいは $\mathbb{Q}$ と同相な閉部分集合を含む.

この定理も同様に, Π_1^1 部分集合の性質が, その部分集合自体が completely Baire 性を満たすかどうかによって決まるということを主張している.

実際, Thm 4.1 を証明するには, Hurewicz の定理を quasi-Polish space へと一般化した次の定理を適用すればよい.

Theorem 4.3 (de Brecht [3, Thm 7.2]). quasi-Polish space の任意の Π_1^1 部分集合は, それ自身が quasi-Polish であるか, あるいは $\mathbb{Q}$, S_1 , S_D , S_0 のいずれかと同相な Π_2^0 集合を含む.

ただし, S_1 , S_D , S_0 はそれぞれ以下の空間を指す.

- S_1 は Fréchet filter を開集合系 (の基) とする $\mathbb{N}$.
- S_0 は $\{q \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : p \subseteq q\}$ を開基とする $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.
- S_D は $\{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ を開集合とする $\mathbb{N}$.

「UF space が quasi-Polish space であること」および「MF space が UF space の Π_1^1 部分空間であること」から, 上記の定理を適用できる. まず, MF space は T_1 性を満たすため, S_D や S_0 と同相な部分空間を持つことはない. さらに S_1 は hyper-connected であるが, MF space における hyper-connected な部分集合は一点集合に限られるため, S_1 と同相な部分集合を持つこともない. したがって, Thm 4.1 が導かれる.

4.2 逆数学分析

これらの議論を再び, 二階算術の枠組みにおいて敷衍していく.

Proposition 4.4 (ACA_0). UF space と MF space はいずれも Baire 空間.

また, $\mathbb{Q}$ を閉部分集合として含む MF space の構成も ACA_0 上で実行可能である. UF space が completely Baire であることは ACA_0 上では証明できないが, $\mathbb{Q}$ と同相な閉集合をもつ MF space を作ることによって, 以下の事実は ACA_0 で示すことができる.

Theorem 4.5 (ACA_0). $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の Π_2^0 部分集合と同相でない MF space が存在する.

さらに, 定理の証明を二階算術上で追うことによって, 次の命題が得られる.

Proposition 4.6 ($\Sigma_2^1\text{-DC}_0$). MF space が completely Baire でないならば, それは $\mathbb{Q}$ と同相な Π_2^0 部分集合を含む.

Proposition 4.7 ($\Pi_2^1\text{-CA}_0$). MF space が completely Baire ならば, それは quasi-Polish space.

これらの逆数学的な強さについては, 次の同値性を持つ.

Theorem 4.8. $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ 上で次は同値.

1. $\Pi_2^1\text{-CA}_0$
2. generalized Hurewicz theorem (すなわち, 任意の quasi-Polish space の Π_1^1 部分集合は, それ自身が quasi-Polish であるか, あるいは $S_0, S_D, S_1, \mathbb{Q}$ のいずれかと同相な Π_2^0 部分集合を含む.)
3. 任意の MF space は, quasi-Polish であるか, あるいは $\mathbb{Q}$ と同相な Π_2^0 部分集合を含む.

この定理の証明の方針は, Mummert [10, Thm 4.3.33] による, 正則な MF space に対してのウリゾーンの距離化定理の逆数学的分析と軌を一にするものである.

謝辞

研究発表の際, Thm 2.6 のご教示をはじめ貴重なご意見をいただいた Matthew de Brecht 先生, 木原貴行先生に感謝いたします. 本稿は横山啓太先生との共著論文に基づき, 同先生からのさらなるご指摘を受けて改善を図ったものです. なお本稿は, 共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Douglas K Brown. Notions of closed subsets of a complete separable metric space in weak subsystems of second-order arithmetic. *Logic and computation (Pittsburgh, PA, 1987)*, 106:39–50, 1990.

- [2] Matthew de Brecht. Quasi-Polish spaces. *Ann. Pure Appl. Logic*, 164(3):356–381, 2013.
- [3] Matthew de Brecht. A generalization of a theorem of hurewicz for quasi-polish spaces. *Logical Methods in Computer Science*, Volume 14, Issue 1, February 2018.
- [4] Matthew De Brecht, Takayuki Kihara, and Victor Selivanov. Ideal presentations and numberings of some classes of effective quasi-Polish spaces. *Computability*, 13(3-4):325–348, 2024.
- [5] Reinhold Heckmann. Spatiality of countably presentable locales (proved with the baire category theorem). *Mathematical Structures in Computer Science*, 25(7):1607–1625, 2015.
- [6] Yuzuki Kaneko and Keita Yokoyama. Quasi-Polish spaces and spaces of filters in second-order arithmetic, 2026.
- [7] Yuzuki Kaneko and Keita Yokoyama. Spaces of maximal filters, Hurewicz theorem, and reverse mathematics, 2026. in preparation.
- [8] A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [9] HPA Künzi. On strongly quasi-metrizable spaces. *Archiv der Mathematik*, 41(1):57–63, 1983.
- [10] Carl Mummert. *On the reverse mathematics of general topology*. The Pennsylvania State University, 2005.
- [11] Carl Mummert and Frank Stephan. Topological aspects of poset spaces. *Michigan Mathematical Journal*, 59(1):3–24, 2010.
- [12] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1999.