

様相ミュー計算のタブロー法の完全性と 無限ゲームの決定性について (2)

東京科学大学 情報理工学院 鹿島 亮

Ryo Kashima

Department of Mathematical and Computing Science,
Institute of Science Tokyo

1 はじめに

本稿は文献 [5] の続編であり, [5] で「よくわからない」と書いた内容に対して証明を与え, さらに結果を強めたものである.

様相ミュー計算は様相命題論理 $\mathbf{K}$ に不動点演算子を加えた, 非常に豊かな表現能力を持つ論理体系である (様相ミュー計算については [3, 4] などを参照されたい). 様相ミュー計算は豊かな表現能力に伴って扱いが難しくなっており, 証明体系の完全性や有限モデル性などといった通常の様相命題論理では簡単に示すことができる重要な基本性質を示すことがとても難しい.

そんな示すのが難しい基本性質のひとつであるタブロー法 (Niwinski-Walukiewicz [2] による) の完全性と有限モデル性に対して, 本稿では [2] の証明をパリティオートマトンやパリティゲームを用いて洗練化して示す. なお有限モデル性は Kozen [1] が最初に示し [2] でも論じられているが, 本稿は有限モデル性の別証明にもなっている.

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 節ではパリティオートマトンとパリティゲームに関して必要事項を準備する. 第 3 節ではタブロー法を定義する. 第 4 節ではタブローゲームを定義してそのオメガ正則性を示す. ここは Niwinski-Walukiewicz [2] が明記していない内容をきちんと書いたものである. 最後の第 5 節では, それまでの結果を合わせて用いてタブロー法の有限モデルに対する完全性を示す. 証明の方針は前編 [5] に書いたものと同じであるが, パリティゲームの無記憶決定性のおかげで有限モデルを構成できるのがポイントである.

2 オートマトン, ゲーム

本節の 2.1 節と 2.2 節はよく知られている結果であり, 証明などはたとえば文献 [3, 6] を参照されたい. 2.3 節と似たような議論は文献 [3] に載っている.

2.1 オメガ正則言語とパリティオートマトン

集合 X に対して X^* は X の要素の有限列全体の集合を表し, X^ω は X の要素が先頭 (左端) から始まって可算無限個並んだ列全体の集合を表す. 列は $\langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ というように表記する. X が非空の有限集合のとき, X を「アルファベット」, X^* の部分集合を「 X の言語」, X^ω の部分集合を「 X の無限言語」と呼んだりする. (無限) 言語に対する演算を以下で定める. $A, B \subseteq X^*$, $C \subseteq X^\omega$ のとき, $A \cdot B = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A \text{ かつ } \beta \in B\} \subseteq X^*$, $A \cdot C = \{\alpha\gamma \mid \alpha \in A \text{ かつ } \gamma \in C\} \subseteq X^\omega$, $A^\omega = \{\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \cdots \mid (\forall i)(\alpha_i \text{ は空列でなく } A \text{ の要素})\} \subseteq X^\omega$. 無限列 $\alpha \in X^\omega$ に対して, α 中に無限回登場する X の要素全体の集合を $\infty(\alpha)$ と表記する.

非決定性有限オートマトンとは以下の形式の $M = \langle X, Q, q_{\text{init}}, \delta, F \rangle$ である.

X はアルファベット. Q は状態の有限集合. $q_{\text{init}} \in Q$ は開始状態. $\delta \subseteq Q \times X \times Q$ は遷移関係. $(q, x, q') \in \delta$ のことを $q \xrightarrow{x} q'$ と書く (δ が明らかな場合は δ は省略). $F \subseteq Q$ は受理状態の集合.

M の受理言語を $L(M)$ と書く. すなわち $L(M) = \{\alpha \in X^* \mid \alpha \text{ を } M \text{ に入力すると受理状態に至ることができる}\}$ である. ある非決定性有限オートマトン M が存在して $A = L(M)$ となっているとき, A は正則言語であると言う.

決定性有限パリティオートマトンとは以下の形式の $M = \langle X, Q, q_{\text{init}}, \delta, \pi \rangle$ である.

$X, Q, q_{\text{init}}, \delta : Q \times X \rightarrow Q$ は先ほどと同じ. ただし決定性なので δ は関数になっている. $\pi : Q \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ は優先度関数 (ただし n は適当な自然数).

M が X の要素の無限列 $\alpha = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ を受理するとは次が成り立つことである.

$\min(\infty(\langle \pi(q_{\text{init}}), \pi(q_1), \pi(q_2), \dots \rangle)) = \text{偶数},$
ただし $\langle q_{\text{init}}, q_1, q_2, \dots \rangle$ は M に α を入力して得られる状態遷移列.

M が受理する無限列全体の集合を $L(M)$ と書く.

定理 1 (オメガ正則言語の特徴付け) アルファベット X の任意の無限言語 $A \subseteq X^\omega$ に関して以下の 2 条件は同値である.

- 自然数 n と正則言語 $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n \subseteq X^*$ が存在して $A = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} (B_i \cdot (C_i^\omega))$.
- アルファベット X の決定性有限パリティオートマトン M が存在して $A = L(M)$.

上記の条件を満たす A のことをオメガ正則言語と呼ぶ.

2.2 無限ゲーム

本稿ではどんなプレイも無限に続くゲームを扱う. プレイヤー I, II による無限ゲームとは次の形式 $G = \langle X, x_{\text{init}}, T, R, W_I \rangle$ である.

X は局面の非空集合. $x_{\text{init}} \in X$ は開始局面. T は各局面が I と II のどちらの手番であるか決める関数, つまり $T : X \rightarrow \{I, II\}$. R は各局面で手番のプレイヤーが選べる次の局面を決める関数 (各 $x \in X$ に対して $R(x)$ は X の非空部分集合, つまり次の局面は必ず存在してプレイには終わらない). $W_I \subseteq X^\omega$ は I の勝利プレイ全体の集合.

プレイ (局面の無限列) の可能な分岐をすべて記述した「完全ゲーム木」, およびその部分木である「I の必勝戦略」「I の無記憶必勝戦略」「II の必勝戦略」「II の無記憶必勝戦略」は本稿の前編 [5] と同じに定義される.

無限ゲーム $G = \langle X, x_{\text{init}}, T, R, W_I \rangle$ に対して自然数 k と関数 $\pi : X \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ (この関数 π を優先度関数と呼ぶ) が存在して次が成り立つとき, G をパリティゲームと呼ぶ.

G の任意のプレイ $P = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ に対して次の 2 条件は同値.

- (1) $P \in W_I$.
- (2) $\min(\infty(\langle \pi(x_0), \pi(x_1), \pi(x_2), \dots \rangle)) = \text{偶数}.$

つまり、プレイ中のすべての局面を優先度関数で評価してその評価値の中に無限回現れる自然数の中の最小値が偶数であることが I の勝利になっている、ということである。

定理 2 (パリティゲームの無記憶決定性) G がパリティゲームならば、 G のプレイヤー I と II のどちらかには無記憶必勝戦略が存在する。

2.3 オメガ正則ゲームのパリティ化

無限ゲーム $G = \langle X, x_{\text{init}}, T, R, W_I \rangle$ に対して、 $\Sigma \subseteq X$ となる有限集合 Σ が存在して W_I がアルファベット Σ 上のオメガ正則言語になっているとき、 G をオメガ正則ゲームと呼ぶ。

このゲームをパリティ化する、ということを定義する。 W_I がオメガ正則なので定理 1 により W_I を受理する決定性有限パリティオートマトンが存在するので、それを $M = \langle \Sigma, Q, q_{\text{init}}, \delta, \pi \rangle$ とする (ただし $\pi: Q \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$)。そして新しいゲーム $G^M = \langle X^M, x_{\text{init}}^M, T^M, R^M, W_I^M \rangle$ を以下で定義する。

- $X^M = X \times Q$.
- $x_{\text{init}}^M = (x_{\text{init}}, \delta(q_{\text{init}}, x_{\text{init}}))$.
- $T^M(x, q) = T(x)$.
- $R^M(x, q) = \{(y, \delta(q, y)) \mid y \in R(x)\}$.
- $W_I^M = \{ \langle (x_0, q_0), (x_1, q_1), \dots \rangle \mid \langle x_0, x_1, \dots \rangle \text{ が } G \text{ のプレイであって, } \langle x_0, x_1, \dots \rangle \in W_I \}$.

M が決定性なので $\delta(q_{\text{init}}, x_{\text{init}})$ や $\delta(q, y)$ が一意に定まることに注意する。

例として $G = \langle X, x_{\text{init}}, T, R, W_I \rangle$ を $X = \{x, y\}$, $x_{\text{init}} = x$, $R(x) = \{x, y\}$, $R(y) = \{x\}$, $W_I = \text{「}y \text{ が無限回現れるプレイ」}$ としたゲーム G を考える (T は議論に不要なので適当に定めて良い)。図 1 の左上が G の完全ゲーム木であり、右上の M は W_I を受理する決定性パリティオートマトンになっている。ただし状態に添えた数字 0, 1, 3 が優先度関数 π による値である。すると左下が G^M の完全ゲーム木である (局面に添えた数字 0, 1, 3 は後述の優先度関数 π_{G^M} による値)。

上記の定義から、例に挙げた G に限らず一般の場合について、任意の $x_0, q_0, x_1, q_1, \dots$ に対して次の 2 つが成り立つことに注意する。

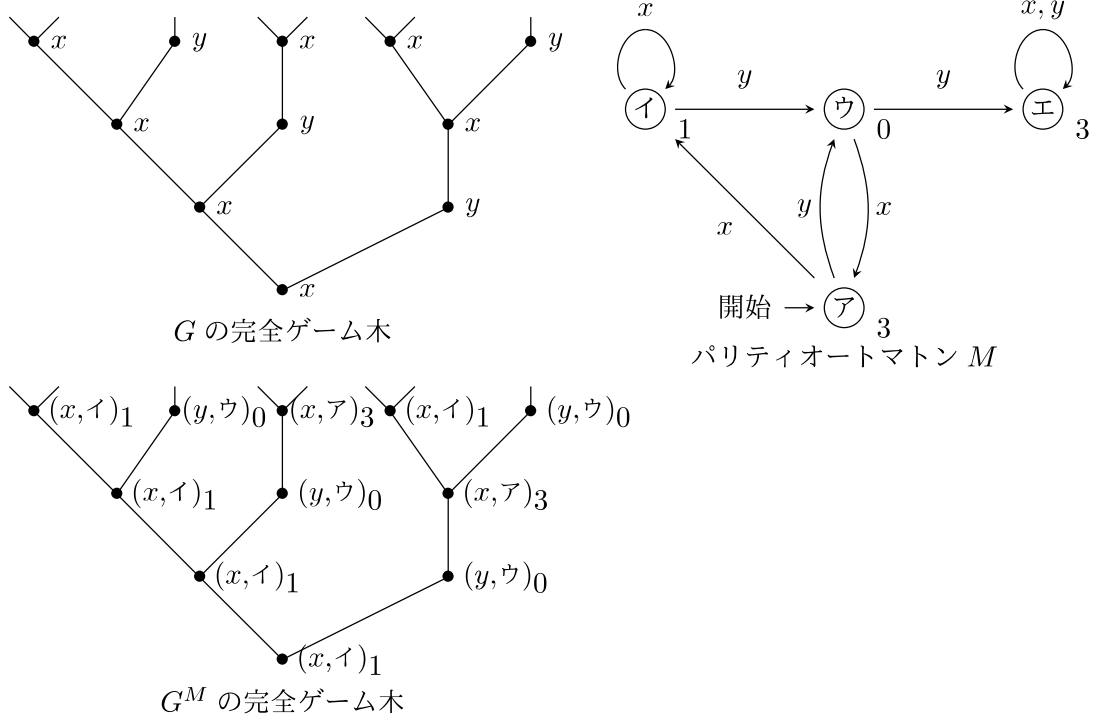
- もしも $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$ が G のプレイであり $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$ を入力した M の状態遷移が $q_{\text{init}} \xrightarrow{x_0} q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$ であるならば、 $\langle (x_0, q_0), (x_1, q_1), \dots \rangle$ は G^M のプレイである。
- もしも $\langle (x_0, q_0), (x_1, q_1), \dots \rangle$ が G^M のプレイであるならば、 $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$ は G のプレイであって、これを M に入力した状態遷移列は $\langle q_{\text{init}}, q_0, q_1, \dots \rangle$ である。

さて、 G^M の完全ゲーム木は G の完全ゲーム木と同じ形 (G の完全ゲーム木の各ノードに Q の要素を書き加えたもの) になる。各局面での手番や次の局面、そして I の勝利プレイ集合もふたつの完全ゲーム木で一致するので、必勝戦略も一致する。すなわち G における I (あるいは II) の必勝戦略は、ノードに Q の要素を書き加えれば G^M における I (あるいは II) の必勝戦略になるし、 G^M における I (あるいは II) の必勝戦略からノードの Q の要素を消せば G における I (あるいは II) の必勝戦略になる。

さらに G^M において優先度関数 $\pi_{G^M}: X^M \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ を

$$\pi_{G^M}(x, q) = \pi(q)$$

と定義してパリティゲームにすれば、この優先度関数で定義される勝利条件は W_I^M で定義される勝利条件に一致する。なぜなら、 G^M の任意のプレイ $\langle (x_0, q_0), (x_1, q_1), \dots \rangle$ に対して、 $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$ は G のプレイであって、以下の同値性が成り立つからである。

図1 G と M と G^M の例.

$$\begin{aligned}
 \min(\infty(\langle \pi_{G^M}(x_0, q_0), \pi_{G^M}(x_1, q_1), \dots \rangle)) = \text{偶数} &\iff \min(\infty(\langle \pi(q_0), \pi(q_1), \dots \rangle)) = \text{偶数} \\
 &\iff \min(\infty(\langle \pi(q_{\text{init}}), \pi(q_0), \pi(q_1), \dots \rangle)) = \text{偶数} \\
 &\iff \langle x_0, x_1, \dots \rangle \in X_I.
 \end{aligned}$$

そこでこの G^M を「 G をパリティ化したゲーム」と呼ぶ.

以上の議論から次が言える.

定理 3 オメガ正則ゲーム G をパリティ化したゲーム G^M は G と完全ゲーム木が同型であり, G^M はパリティゲームなので定理 2 により無記憶決定性を持つ. したがってオメガ正則ゲーム G は決定性を持つ. (注意: G のひとつの局面が G^M では複数に分裂するので, G^M が無記憶決定性を持つからといっても G が無記憶決定性を持つとは限らない).

3 タブロー法

本節では様相ミュー計算のタブロー法を定義して完全性の文面を提示する. ほとんどの定義は本稿の前編 [5] と同じでありここでは必要部分だけを簡潔に記述するので, 詳細は [5] を参照いただきたい.

論理式はリテラル (命題変数 $p, q, \dots$ とその否定 $\bar{p}, \bar{q}, \dots$) と束縛変数 $(x, y, \dots)$ から, $\wedge, \vee, \Box, \Diamond, \mu, \nu$ で構成される否定標準形である. そして guarded および「命題変数の使い回しがない」という条件を課す. μ (および ν) で束縛される変数を μ 変数 (および ν 変数) と呼ぶ. 論理式を α, φ などで表し,

束縛記号 μ と ν を総称するために η を使う．論理式 ξ 中での x の束縛範囲を $\xi \downarrow_x$ と書く．論理式 ξ 中での束縛変数の位置関係を $>_\xi$ で書く．論理式の有限集合を Γ, Δ などで表し，これをシークエントと呼ぶ． $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ のことを単に Γ, φ, ψ と書く（注意： Γ 中に φ や ψ が入っていても構わない）． $\Diamond \Gamma$ は $\{\Diamond \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ のことである．

ξ （論理式ひとつのシークエント）を根として，以下の規則を用いて下式から上式へと進んでいくシークエントの有限または無限 2 分木を， ξ のタブローと呼ぶ．

$$\frac{\Gamma, \alpha \quad \Gamma, \beta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta} (\wedge) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta}{\Gamma, \alpha \vee \beta} (\vee) \quad \frac{\Delta, \alpha}{\Gamma, \Diamond \Delta, \Box \alpha} (\text{様相}) \quad \frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, \eta x. \alpha} (\eta) \quad \frac{\Gamma, \xi \downarrow_x}{\Gamma, x} (\text{展開})$$

展開規則で指定された変数 x を展開変数と呼ぶ．上記の各規則について，下式中の論理式に対する上式中の後継者を以下で定める．

- ($\wedge$ 規則) Γ 中の論理式 γ の後継者は左右上式中の同じ論理式 γ である． $\alpha \wedge \beta$ の後継者は左上式中の α と右上式中の β である．
- ($\vee$ 規則) Γ 中の論理式 γ の後継者は同じ論理式 γ である． $\alpha \vee \beta$ の後継者は α と β である．
- (様相規則) $\Gamma \setminus (\Diamond \Delta, \Box \alpha)$ 中の論理式には後継者が無い． $\Diamond \Delta$ 中の $\Diamond \delta$ の後継者は δ であり， $\Box \alpha$ の後継者は α である．
- (η 規則) Γ 中の論理式 γ の後継者は同じ論理式 γ である． $\eta x. \alpha$ の後継者は α である．
- (展開規則) Γ 中の論理式 γ の後継者は同じ論理式 γ である． x の後継者は $\xi \downarrow_x$ である．

なお，たとえば $\vee$ 規則で $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ という状況も許される．このような場合は $\alpha \vee \beta$ の後継者は $\alpha, \beta, \alpha \vee \beta$ の 3 つになる（他の規則でも同様）．

タブローにおけるパス $\mathcal{P} = \langle \Gamma_0, \Gamma_1, \dots \rangle$ に対して，その中の論理式スレッドとは $\mathcal{T} = \langle \varphi_0, \varphi_1, \dots \rangle$ であって，任意の i について $\varphi_i \in \Gamma_i$ かつ φ_{i+1} は φ_i の後継者となっているものである．タブロー中のどんな論理式の出現にも，根の論理式からそこへ至る論理式スレッドが存在する．なおスレッドは合流もするので，ひとつの論理式に至るスレッドは一般に複数ある（例： $\vee$ 規則で $\alpha \in \Gamma$ の場合，子の α へ至るスレッドは二つ以上ある）．

ξ のタブローにおける論理式スレッド $\mathcal{T}$ が ν スレッドであるとは，以下の条件を満たすことである：

$\mathcal{T}$ は無限回の展開を経る無限列であって，その中の「無限回出現する展開変数」の中での $>_\xi$ に関する最大変数（最外束縛変数）が ν 変数である．

タブローにおけるパス $\mathcal{P} = \langle \Gamma_0, \Gamma_1, \dots \rangle$ が閉じているとは，ある i とある命題変数 p が存在して $\{p, \bar{p}\} \subseteq \Gamma_i$ となっているか， $\mathcal{P}$ の中に ν スレッドが存在することである．すべてのパスが閉じているタブローのことを閉タブローと呼ぶ．

次が本稿の主結果である（クリプキモデルの定義は前編 [5] 参照）．

定理 4 (様相ミュー計算のタブロー法の基本性質) 以下の 3 条件は同値である．(1) ξ の閉タブローが存在する．(2) ξ は任意のクリプキモデルの任意の状態で真である．(3) ξ は任意の有限クリプキモデルの任意の状態で真である．

本稿では最終的に「(3) $\Rightarrow$ (1)」(有限モデルに対する完全性) を証明する．「(1) $\Rightarrow$ (2)」(健全性) は文献 [2, 5] で示されており「(2) $\Rightarrow$ (3)」は自明なので，これで有限モデル性（「(3) $\Rightarrow$ (2)」）を含めたすべての同値性が示されたことになる．なお文献 [2] も有限モデル性を論じているが，そこで直接的に示し

ているのは「(2) $\Rightarrow$ (1)」であって「(3) $\Rightarrow$ (1)」ではない．本稿はその [2] の証明をパリティゲームを用いて洗練させて「(3) $\Rightarrow$ (1)」に強めたものである．

4 タブローゲーム

本稿の前編 [5] と同様にタブローゲームという無限ゲームを導入する（定義はほとんど [5] と同じだが少しだけ異なっている）．そしてこれがオメガ正則であることを示す．

4.1 タブローゲームの定義

論理式 ξ を任意に固定して ξ の部分式だけから成る集合全体を Seq_ξ と書く．さらに技術的な理由により論理式に印 $\hat{}$ を付けた $\hat{\varphi}$ という形の論理式を扱う． ξ の部分式の集合であって，その中の 0 個または 1 個の論理式に印が付いたものを ξ に関する拡張シーケントと呼び，その全体の集合を $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}}$ と書く．なお以下では単に φ や Γ などと書いたら，これらは印無しの従来の論理式や論理式集合である．

ξ の部分式を次の 2 種類に分ける：

第 1 型： $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \eta x. \alpha, x$ （束縛変数）という形．

第 2 型： $\Box \alpha, \Diamond \alpha$, リテラル，という形．

ξ の第 1 型の部分式全体に適当な線形順序を入れておく． Γ が第 1 型の論理式を 1 個以上含み，その中で上記で決めた順序で最大のものが φ で， $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\varphi\}$ であるとき， Γ のことを $(\Gamma'; \varphi)$ と表記する．つまりこれは， Γ 中の第 1 型論理式の中の最大のものを指定してそれをピックアップした表記である．

以下で定義する無限ゲームを「 ξ のタブローゲーム」と呼ぶ．

- 【プレイヤー】閉パス製造者と閉パス阻止者（それぞれ「製造者」「阻止者」と表記することがある）．
- 【局面】 $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}}$ の要素，および Close , Stop という特別な 2 種の局面．なお Λ がリテラルの集合のとき

$$\Lambda, \Diamond \Gamma, \Box \alpha_1, \Box \alpha_2, \dots, \Box \alpha_k$$

というシーケントのことを様相局面とよぶ．この様相局面に対して，ある命題変数 p とその否定 $\bar{p}$ が Λ 中に存在する場合はこの局面は閉じていると言う．閉じていない様相局面で $\Box$ 論理式の個数 k が 0 の場合，この局面を製造不可局面と呼ぶ．

- 【規則】

局面	手番	選択肢
$(\Gamma; \alpha \wedge \beta)$	阻止者	$(\Gamma \setminus \{\alpha\}, \hat{\alpha})$ と $(\Gamma \setminus \{\beta\}, \hat{\beta})$ の 2 個
$(\Gamma; \alpha \vee \beta)$	-	(Γ, α, β)
$(\Gamma; \eta x. \alpha)$	-	(Γ, α)
$(\Gamma; x)$	-	$(\Gamma, \xi \downarrow_x)$
$(\Lambda, \Diamond \Gamma, \Box \alpha_1, \dots, \Box \alpha_k)$ ただし Λ はリテラルの 集合，つまり様相局面	製造者	閉じている場合は Close . 製造不可局面の場合は Stop . どちらも無い場合は $(\Gamma \setminus \{\alpha_1\}, \hat{\alpha}_1), \dots, (\Gamma \setminus \{\alpha_k\}, \hat{\alpha}_k)$ の k 個.
Close	-	Close . (形式上すべてのプレイを無限プレイにするための定義)
Stop	-	Stop . (形式上すべてのプレイを無限プレイにするための定義)
$(\Gamma, \hat{\varphi})$	-	(Γ, φ) . (これを「印外し規則」と呼ぶ)

- 【勝利条件】

プレイ $\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \rangle$ が閉パス製造者の勝利（ただし $\Gamma_i \in \text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{\text{Close}, \text{Stop}\}$ ） $\iff$ ある Γ_i 以

降はすべてが Close, または $\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \rangle$ 中に ν スレッドが存在する. ただしスレッドについては以下の注意を参照.

- 【開始局面】 ξ

注意

- タブローゲームの進行は, 論理式に付いた印および印外しの規則を無視すればタブロー法の進行と同じ形をしている. プレイの中のスレッドはタブロー法のスレッドと同じ定義にする (印はスレッドには影響しないものとする).
- タブロー法ではひとつのシークエントに適用可能な規則は一般に複数あるが, タブローゲームでは 1 型論理式の順序などを用いて排他的に場合分けしており, 適用できる規則は一意に定まる. そして規則が $\vee, \eta$, 展開, および印外しの場合は適用結果のシークエントとスレッドも一意に決まる.
- $\wedge$ 規則と様相規則では適用結果に印付き論理式が発生する. この印の役割は以下の通りである. もしも印がないと $\wedge$ 規則で $\alpha, \beta \in \Gamma$ かつ $\alpha \neq \beta$ の場合や様相規則で $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$, かつ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ の場合, たとえば下記の左側 2 つのような状況が起こる.

$$\frac{\alpha, \beta \quad \alpha, \beta}{\alpha, \beta; \alpha \wedge \beta} \quad \frac{\alpha_1, \alpha_2}{\Diamond \alpha_1, \Diamond \alpha_2, \Box \alpha_1, \Box \alpha_2} \quad \frac{\widehat{\alpha}, \beta \quad \alpha, \widehat{\beta}}{\alpha, \beta; \alpha \wedge \beta} \quad \frac{\widehat{\alpha}_1, \alpha_2}{\Diamond \alpha_1, \Diamond \alpha_2, \Box \alpha_1, \Box \alpha_2} \quad \frac{\alpha_1, \widehat{\alpha}_2}{\Diamond \alpha_1, \Diamond \alpha_2, \Box \alpha_1, \Box \alpha_2}$$

すると規則適用結果のシークエントが同じでもスレッドの付き方が異なる, という状況が発生する. ($\wedge$ 規則の適用結果の (α, β) では $\alpha \wedge \beta$ とのスレッドの繋がりが右と左で異なる. 様相規則で $\Box \alpha_1$ と $\Box \alpha_2$ のどちらに規則を適用したかでスレッドの様子が異なってくる.) これは後述の目的の障害になるので, 上記の右側 3 つのように, 分解された論理式のスレッドがどこに繋がっているかを印によって明記している.

- 上述の仕組みにより「プレイ $\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \rangle$ に ν スレッドが存在するか否か」が $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ の並びだけから一意に定まる. これが印を使う目的である.
- 印付き論理式を含んだシークエントに適用可能な規則は印外し規則だけなので, 発生した印はその直後に消える.

以上の定義から次が言える.

定理 5 ξ のタブローゲームの閉パス製造者の必勝戦略から, 論理式の印をすべて消し, 印外し規則を消し, Close の無限列も消したものは, ξ の閉タブローになっている.

【注意】文献 [2, 3] には共に本稿のタブローゲームとほとんど同じものが載っている. しかしそこでは「一つのシークエント列には一通りのスレッドの付き方しかない」という性質が保証されていない (ように見える) ので, その部分は不備であると思われる. さらにそのゲームのオメガ正則性を述べているが証明は省略されている. 本稿ではその証明を以下の小節で与える.

4.2 タブローゲームがオメガ正則であること

以下では ξ のタブローゲームがオメガ正則であることを示す. つまり閉パス製造者の勝利プレイ全体の集合が $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{\text{Close}, \text{Stop}\}$ 上のオメガ正則言語であることを示す.

閉パス製造者の勝利条件は, (1) あるところ以降はずっと Close であるか, (2) ν スレッドが存在するか, である. これを正確に記述すると, 無限列 $\mathcal{P}$ が ξ のタブローゲームの閉パス製造者の勝利プレイで

あるとは、次の (1)(2) のどちらかの条件が満たされることに等しい。

- (1) 閉じた様相局面 $(p, \bar{p}, A, \Diamond F, \Box \Delta)$ が存在して、 $\mathcal{P}$ が次の形をしている。

$$\underbrace{\langle \xi, \dots, (p, \bar{p}, A, \Diamond F, \Box \Delta), \text{Close}, \text{Close}, \dots \rangle}_{Q_0}$$

ただし Q_0 は ξ から始まり $(p, \bar{p}, A, \Diamond F, \Box \Delta)$ に至るプレイである。

- (2) ν 変数 x と印無しシークエント $(F; x)$ が存在して、 $\mathcal{P}$ が次の形をしている。

$$\underbrace{\langle \xi, \dots, (F; x) \rangle}_{Q_0}, \underbrace{\langle (F, \xi \downarrow_x), \dots, (F; x) \rangle}_{Q_1}, \underbrace{\langle (F, \xi \downarrow_x), \dots, (F; x) \rangle}_{Q_2}, \underbrace{\langle (F, \xi \downarrow_x), \dots, \dots \rangle}_{Q_3}$$

ただし Q_0 は ξ から始まり $(F; x)$ に至るプレイであり、 $Q_1, Q_2, \dots$ の各部分は次の条件 (ア, イ, ウ) を満たす。

- (ア) $(F, \xi \downarrow_x)$ から始まって $(F; x)$ に至るプレイである。
- (イ) 先頭シークエントの中の $\xi \downarrow_x$ から末尾シークエントの中の x までスレッドがつながっている。
- (ウ) そのスレッド上で展開が起こる x 以外のどんな変数 y も $y <_\xi x$ である。

この条件 (2) と「 $\mathcal{P}$ は ξ から始まり ν スレッドが存在するプレイである」が同値であることは、以下のよう確認できる。

(2) を満たせば ν スレッドが存在するプレイであることは自明である。逆は、 ξ から始まるプレイ $\mathcal{P}$ に ν スレッドが存在すると仮定して、そのスレッド上で無限回展開される変数の集合を X とする。すると、そのスレッド上ではあるところから先では X の要素だけが展開される。 X 中には $<_\xi$ に関する最大変数が存在するので、それを x とする。 $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}}$ の要素で $(\Delta; x)$ という形のシークエントは有限個なので、そのどれかはこのスレッド上で無限回展開されているはずでなので、それを $(F; x)$ とする。すると $\mathcal{P}$ のあるところから先は上記の $Q_1, Q_2, \dots$ という形が連続していることが言える。

今、 ξ から始まり Ψ に至るプレイ全体の集合を $\text{Init}(\Psi)$ と書くことにする。また $(F; x)$ に対して上記の条件 (ア, イ, ウ) を満たすシークエント列を「 $(F; x)$ サイクル」と呼び、 $(F; x)$ サイクル全体の集合を $\text{Cycle}(F; x)$ と表記する。さらに $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}}$ の要素のうち閉じた様相局面の形をしたものすべて（実際にプレイに現れるかどうかは問わない）を

$$(p_1, \bar{p}_1, A_1, \Diamond \Sigma_1, \Box \Delta_1), \dots, (p_m, \bar{p}_m, A_m, \Diamond \Sigma_m, \Box \Delta_m)$$

とし、 ν 変数を展開する局面の形をしたものすべて（実際にプレイに現れるかどうかは問わない）を

$$(F_1; x_1), \dots, (F_n; x_n)$$

とする。すると以上の議論から、閉パス製造者の勝利プレイ全体の集合は以下のように記述できる。

$$\bigcup_{i=1, \dots, m} \left(\text{Init}(p_i, \bar{p}_i, A_i, \Diamond \Sigma_i, \Box \Delta_i) \cdot \{\text{Close}\}^\omega \right) \cup \bigcup_{i=1, \dots, n} \left(\text{Init}(F_i; x_i) \cdot \text{Cycle}(F_i; x_i)^\omega \right)$$

そこで後は、各 Ψ に対して $\text{Init}(\Psi)$ が正則言語であることと、各 $(F_i; x_i)$ に対して $\text{Cycle}(F_i; x_i)$ が正則言語であることを示せば、定理 1 によって閉パス製造者の勝利プレイ全体がオメガ正則言語であることが示される。

【 $\text{Init}(\Psi)$ が正則であること】非決定性オートマトンを以下のように作って、その受理言語が $\text{Init}(\Psi)$ になることを示す。

- アルファベット: $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{\text{Close}, \text{Stop}\}$. (ただし以下の遷移関係では記号 $\text{Close}, \text{Stop}$ に対する遷移は不要なので存在しない)
- 状態集合: $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{0\}$
- 開始状態: 0 .
- 受理状態: Ψ . (このひとつの状態だけ)
- 遷移関係:

$$q \xrightarrow{\Gamma} q' \iff (q = 0 \text{ かつ } \Gamma = q' = \xi), \text{ または, ある } \Delta, \Delta' \in \text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \text{ に対して } \Delta \text{ から } \Delta' \text{ へ 1 ステップのプレイで遷移できて, } q = \Delta \text{ かつ } \Gamma = q' = \Delta'.$$

すると任意の空でない有限列 $\mathcal{P} \in (\text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{\text{Close}, \text{Stop}\})^*$ と任意の $\Gamma \in \text{Seq}_\xi^{\text{ext}}$ に対して, 以下の2条件が同値になる (これは $\mathcal{P}$ の長さに関する帰納法で示される).

- $\mathcal{P}$ は ξ から出発して Γ に至るプレイになっている.
- $\mathcal{P}$ をこのオートマトンに入力すると状態 Γ に至ることができる.

したがってこのオートマトンの受理言語は $\text{Init}(\Psi)$ である.

【 $\text{Cycle}(\Gamma_i; x_i)$ が正則であること】 ν 変数 x と $(\Gamma; x) \in \text{Seq}_\xi$ を任意に固定する. そして, 与えられたシーケント有限列が前述の条件 (ア, イ, ウ) を満たしていることを判定するオートマトンを作る. 条件 (ア) だけならばさきほどの $\text{Init}(\Psi)$ と同様な作り方でできる. しかしここでは条件 (イ, ウ) も判定する必要がある. そこで, 次を満たすスレッドのことを good なスレッドと呼ぶことにする.

先頭シーケントの中の $\xi \downarrow_x$ から始まり, そのスレッド上で展開される x 以外のどんな変数 y も $y <_\xi x$ である.

そしてプレイ途中の論理式が good なスレッドに乗っている場合にその論理式の右肩にラベル 1 を付け, 乗っていない場合にラベル 0 を付けるようにする. そのようにラベルを付けた拡張シーケントを状態にしてオートマトンを作る.

以下では $0, 1$ を表す変数として a, b などを用いる. Δ 中のすべての論理式に適当にラベルを付けたものを $\Delta^{\vec{a}}$ などと書く. 同一の論理式に異なるラベルが付いたものが両方現れる $(\varphi^0, \varphi^1, \dots)$ という形はラベル付きシーケントとは呼ばない. Δ^0 と書いたらこれは Δ 中のすべての論理式に 0 を付けたものである.

以下で定義する非決定性オートマトンでは, 任意の空でない有限列 $\mathcal{P} \in (\text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{\text{Close}, \text{Stop}\})^*$ と任意のラベル付き拡張シーケント $\Delta^{\vec{a}}$ に対して, 以下の2条件が同値になるように作る.

- (†) $\mathcal{P}$ は $(\Gamma, \xi \downarrow_x)$ から出発して Δ に至るプレイであり, もし $\varphi^1 \in \Delta^{\vec{a}}$ (あるいは $\hat{\varphi}^1 \in \Delta^{\vec{a}}$) ならば φ (あるいは $\hat{\varphi}$) に至る good なスレッドが $\mathcal{P}$ 中にあり, もし $\varphi^0 \in \Delta^{\vec{a}}$ (あるいは $\hat{\varphi}^0 \in \Delta^{\vec{a}}$) ならば φ (あるいは $\hat{\varphi}$) に至る good なスレッドは $\mathcal{P}$ 中がない (注意: $\mathcal{P}$ が決まればその中のスレッドが一意に決まる性質に依っている).
- (‡) $\mathcal{P}$ をこのオートマトンに入力すると状態 $\Delta^{\vec{a}}$ に至ることができる.

以下が非決定性オートマトンの定義である.

- アルファベット: $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}} \cup \{\text{Close}, \text{Stop}\}$. (先ほどと同様に $\text{Close}, \text{Stop}$ は何もしない)
- 状態集合: $\text{Seq}_\xi^{\text{ext}}$ の要素にラベルを付けたもの全体.
- 開始状態: $(\Gamma^0; x^1)$. ($(\Gamma; x)$ がゲームの局面なので $x \notin \Gamma$ であることに注意)

- 受理状態: $(\Gamma^{\vec{a}}; x^1)$. (Γ 中の論理式への 0,1 の割り当ては任意なのでこれは $2^{|\Gamma|}$ 個の状態)
- 遷移関係: 以下の形のすべての和集合. ただし以下で「+」は $\{0,1\}$ 上のブール演算, つまり $0+0=0$ であり, $0+1=1+0=1+1=1$ である. また印 $\hat{\cdot}$ は明記されていない場合は付いていない.

$\alpha, \beta, \alpha \wedge \beta \notin \Delta$, なる任意の $\alpha, \beta, \Delta \in \text{Seq}_{\xi}$ に対して :

$$\begin{aligned} (\Delta^{\vec{a}}; \alpha \wedge \beta^b) &\xrightarrow{(\Delta, \hat{\alpha})} (\Delta^{\vec{a}}, \hat{\alpha}^b). & (\Delta^{\vec{a}}; \alpha \wedge \beta^b) &\xrightarrow{(\Delta, \hat{\beta})} (\Delta^{\vec{a}}, \hat{\beta}^b). \\ (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b; \alpha \wedge \beta^c) &\xrightarrow{(\Delta, \hat{\alpha})} (\Delta^{\vec{a}}, \hat{\alpha}^{b+c}). & (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b; \alpha \wedge \beta^c) &\xrightarrow{(\Delta, \alpha, \hat{\beta})} (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b, \hat{\beta}^c). \\ (\Delta^{\vec{a}}, \beta^b; \alpha \wedge \beta^c) &\xrightarrow{(\Delta, \beta, \hat{\alpha})} (\Delta^{\vec{a}}, \beta^b, \hat{\alpha}^c). & (\Delta^{\vec{a}}, \beta^b; \alpha \wedge \beta^c) &\xrightarrow{(\Delta, \hat{\beta})} (\Delta^{\vec{a}}, \hat{\beta}^{b+c}). \\ (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b, \beta^c; \alpha \wedge \beta^d) &\xrightarrow{(\Delta, \beta, \hat{\alpha})} (\Delta^{\vec{a}}, \beta^c, \hat{\alpha}^{b+d}). & (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b, \beta^c; \alpha \wedge \beta^d) &\xrightarrow{(\Delta, \alpha, \hat{\beta})} (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b, \hat{\beta}^{c+d}). \end{aligned}$$

なお, たとえば上記の最初のを正確に言うと, 第 1 型論理式に対してあらかじめ定めた順序によって $(\Delta, \alpha \wedge \beta)$ 中の最大のが $\alpha \wedge \beta$ である場合に $(\Delta^{\vec{a}}, \alpha \wedge \beta^b) \xrightarrow{(\Delta, \hat{\alpha})} (\Delta^{\vec{a}}, \hat{\alpha}^b)$ を遷移関係に追加する, ということである (他も同様).

$\alpha, \beta, \alpha \vee \beta \notin \Delta$, なる任意の $\alpha, \beta, \Delta \in \text{Seq}_{\xi}$ に対して :

$$\begin{aligned} (\Delta^{\vec{a}}; \alpha \vee \beta^b) &\xrightarrow{(\Delta, \alpha, \beta)} (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b, \beta^b). & (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b; \alpha \vee \beta^c) &\xrightarrow{(\Delta, \alpha, \beta)} (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^{b+c}, \beta^c). \\ (\Delta^{\vec{a}}, \beta^b; \alpha \vee \beta^c) &\xrightarrow{(\Delta, \alpha, \beta)} (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^c, \beta^{b+c}). & (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^b, \beta^c; \alpha \vee \beta^d) &\xrightarrow{(\Delta, \alpha, \beta)} (\Delta^{\vec{a}}, \alpha^{b+d}, \beta^{c+d}). \end{aligned}$$

$\varphi, \eta y. \varphi \notin \Delta$ なる任意の $\eta y. \varphi, \Delta \in \text{Seq}_{\xi}$ に対して :

$$(\Delta^{\vec{a}}; \eta y. \varphi^b) \xrightarrow{(\Delta, \varphi)} (\Delta^{\vec{a}}, \varphi^b). \quad (\Delta^{\vec{a}}, \varphi^b; \eta y. \varphi^c) \xrightarrow{(\Delta, \varphi)} (\Delta^{\vec{a}}, \varphi^{b+c}).$$

$y, \xi \downarrow_y \notin \Delta$ かつ $y \leq_{\xi} x$ なる任意の $y, \Delta \in \text{Seq}_{\xi}$ に対して :

$$(\Delta^{\vec{a}}; y^b) \xrightarrow{(\Delta, \xi \downarrow_y)} (\Delta^{\vec{a}}, (\xi \downarrow_y)^b). \quad (\Delta^{\vec{a}}, (\xi \downarrow_y)^b; y^c) \xrightarrow{(\Delta, \xi \downarrow_y)} (\Delta^{\vec{a}}, (\xi \downarrow_y)^{b+c}).$$

$y, \xi \downarrow_y \notin \Delta$ かつ $y \not\leq_{\xi} x$ なる任意の $y, \Delta \in \text{Seq}_{\xi}$ に対して :

$$(\Delta^{\vec{a}}; y^b) \xrightarrow{(\Delta, \xi \downarrow_y)} (\Delta^{\vec{a}}, (\xi \downarrow_y)^0). \quad (\Delta^{\vec{a}}, (\xi \downarrow_y)^b; y^c) \xrightarrow{(\Delta, \xi \downarrow_y)} (\Delta^{\vec{a}}, (\xi \downarrow_y)^b).$$

$\varphi, \psi \notin \Sigma \cup \Delta$ なる任意の $\Box \varphi, \Box \psi, \Diamond \psi, \Diamond \Sigma, \Box \Delta, \Lambda \in \text{Seq}_{\xi}$ (ただし Λ はリテラルの集合) に対して

$$(\Lambda^{\vec{a}}, \Diamond \Sigma^{\vec{b}}, \Box \Delta^{\vec{c}}, \Box \varphi^d) \xrightarrow{(\Sigma, \hat{\varphi})} (\Sigma^{\vec{b}}, \hat{\varphi}^d). \quad (\Lambda^{\vec{a}}, \Diamond \Sigma^{\vec{b}}, \Diamond \psi^c, \Box \Delta^{\vec{d}}, \Box \psi^e) \xrightarrow{(\Sigma, \hat{\psi})} (\Sigma^{\vec{b}}, \hat{\psi}^{c+e}).$$

任意の $(\Delta, \hat{\varphi}) \in \text{Seq}_{\xi}^{\text{ext}}$ に対して :

$$(\Delta^{\vec{a}}, \hat{\varphi}^b) \xrightarrow{(\Delta, \varphi)} (\Delta^{\vec{a}}, \varphi^b).$$

先述の条件 (†) と (‡) の同値性は $\mathcal{P}$ の長さに関する帰納法で示され, 受理状態が $(\Gamma^{\vec{a}}; x^1)$ であることから, このオートマトンの受理言語が $\text{Cycle}(\Gamma; x)$ であることが言える.

以上の議論から次が言える.

定理 6 タブローゲームはオメガ正則である.

5 有限モデル性に対する完全性

この節で目標の定理が証明される. 証明の流れは本稿の前編 [5] と同じであるが, パリティゲームの無記憶決定性を用いることで有限モデルを構成する. なおクリプキモデルとその上での評価ゲームを説明無しに用いるので, それらについては [5] を参照されたい.

補題 7 (1) タブローゲームの真の無限プレイ (Close や Stop に至らずに無限に続くプレイのこと) には様相局面が必ず無限回出現する. (2) タブローゲームの真の無限プレイの中の無限長の論理式スレッドでは, 論理式の変化が必ず無限回起こる (すなわち「あるところから先はずっと同じ論理式」ということはない).

(証明) [5] の補題 7 と同じ.

(証明終)

定理 8 ξ のタブローゲームに閉パス製造者の必勝戦略が存在しないならば, ある有限モデルのある状態で ξ が偽になる.

(証明) ξ のタブローゲームに閉パス製造者の必勝戦略が存在しないとする. すると定理 6 と定理 3 によってタブローゲームをパリティ化したゲームに閉パス阻止者の無記憶必勝戦略が存在するので, それを $\mathbb{T}$ とする.

$\mathbb{T}$ の各局面はタブローゲームの局面に決定性パリティオートマトンの状態を書き加えた (Γ, q) または (Stop, q) という形である (閉パス阻止者の必勝戦略なので Close は現れない). そして $\mathbb{T}$ の各パスは拡張シーケント部分が ν スレッドを持たない真の無限パスになっているか, あるところ以降 Stop が続く無限パスである. 前者の場合は補題 7(1) からそこには無限個の様相局面が登場し, 後者の場合は Stop の直前は様相局面である. また $\mathbb{T}$ の中で枝分かれが起きるのは様相局面だけである. これらを踏まえて, 状態付き拡張シーケントの有限列 $S = \langle (\Gamma_1, q_1), (\Gamma_2, q_2), \dots, (\Gamma_n, q_n) \rangle$ が以下のどちらかの条件を満たすとき, S は ($\mathbb{T}$ の) セグメントであると言う ((Γ_1, q_1) を S の入口と呼ぶ).

- S は $\mathbb{T}$ の開始局面から最初の様相局面までの列である.
- S は $\mathbb{T}$ のある様相局面の直後から次の様相局面までの列である.

重要なのは次の事実である.

セグメントは有限種類しかない.

なぜなら $\mathbb{T}$ は無記憶戦略なので, 入口の局面が決まればその後には引き続く局面は一意に決まるからである. つまり $\mathbb{T}$ は有限種類のセグメントが無限個 (すべてのパスの後半が Stop... ならば有限個) つながって出来ており, $\mathbb{T}$ の枝分かれはセグメントの切れ目だけで起こっている.

図 2 の左上図は, ある $\mathbb{T}$ の拡張シーケント部分だけを書いた例である. ただし二箇所ずつ出現する拡張シーケント $(p, \hat{x})$ と $(p, \hat{y})$ にはそれぞれの二箇所に対して同じ状態が付いているとする. この中の開始局面 $\mu x.(a \vee \Diamond p \vee \Box x \vee \nu y.((\bar{a} \vee \Diamond q) \wedge \Box y))$ から様相局面 $(a, \Diamond p, \Box x, \Box y)$ までの列がひとつのセグメントでこれを S_1 と呼び, その上にある $(p, \hat{x})$ から $(p, a, \Diamond p, \Box x, \Box y)$ までの列と $(p, \hat{y})$ から $(p, \bar{a}, \Diamond q)$ までの列をそれぞれセグメント S_2, S_3 と呼ぶ. すると $\mathbb{T}$ はこれら 3 つのセグメントが図 2 の上右上図のように無限につながったものになっている.

さてモデル $M = \langle W, R, V \rangle$ を次で定める (図 2 の上右下図が M の例である).

- $W = \{S \mid S \text{ は } \mathbb{T} \text{ のセグメント} \}$ (これは有限集合である)
- $SRS' \iff \mathbb{T}$ 中で S の直後に S' がある
- $V(p) = \{S \in W \mid S \text{ の中のあるシーケント部分に } \bar{p} \text{ が現れる} \}$

そして評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, S_1)$ (S_1 は開始局面を入口とするセグメント) を考える. セグメント S 中の論理式 φ を評価ゲームの局面 (φ, S) と読めば, $\mathbb{T}$ 中の論理式スレッドの木 (印 $\wedge$ は無視し, 同じ論理式

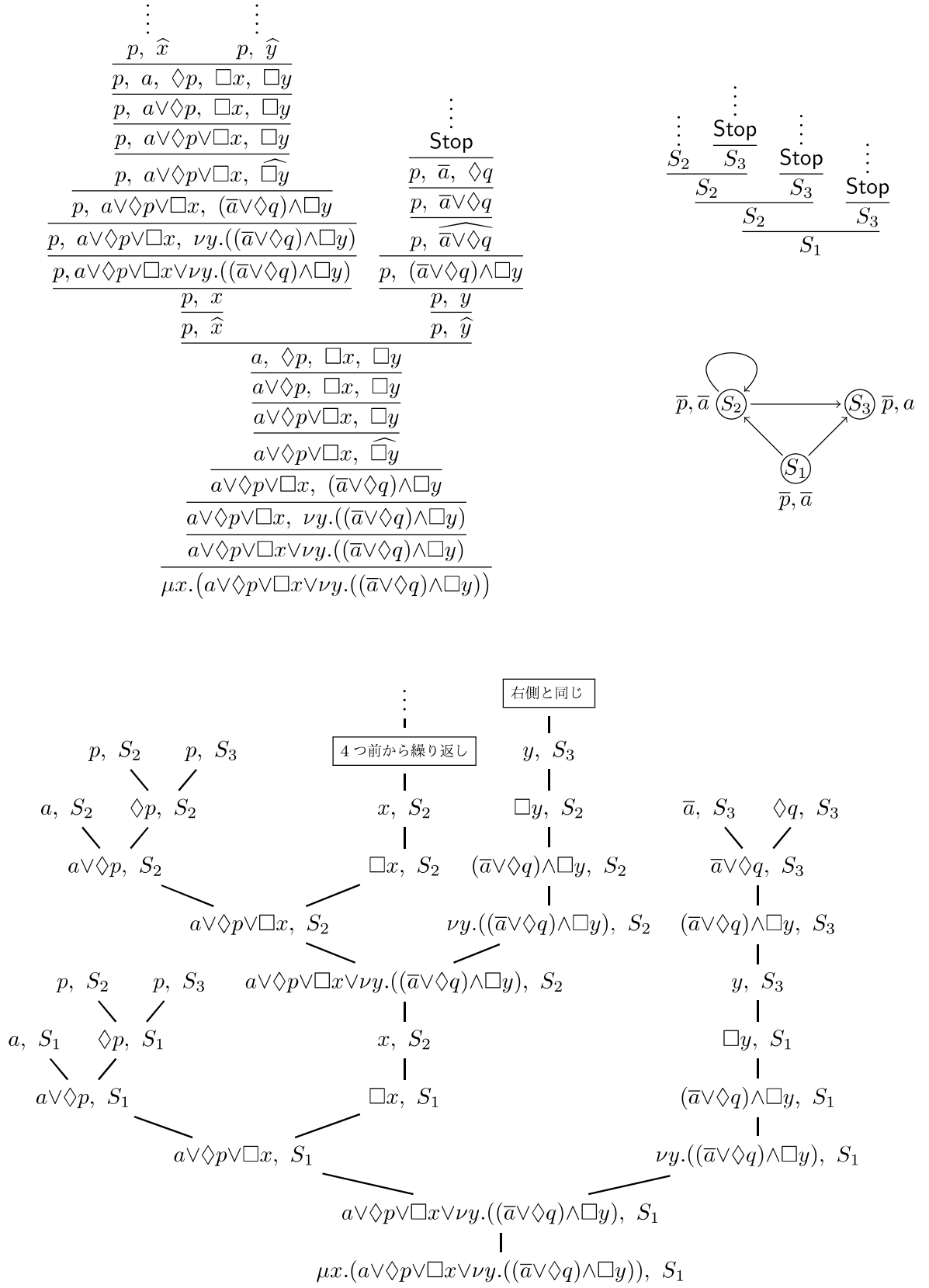


図 2 上左：阻止者の必勝戦略 $\mathbb{T}$ 。上右上： $\mathbb{T}$ のセグメントの構造。上右下：モデル M 。下：否定者の必勝戦略。

が続く部分はまとめてひとつにする) が評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, S_1)$ の否定者の必勝戦略になる (図 2 の下図が例である). これが否定者の必勝戦略であることは次のように確認できる.

- $\mathbb{T}$ 中で $\alpha \wedge \beta$ がセグメント S 内にあれば, S 内でいつかは後継者 α と β のどちらかが生成されるので, これは評価ゲームの否定者の選択である.
- $\mathbb{T}$ 中で $\alpha \vee \beta$ がセグメント S 内にあれば, S 内でいつかは後継者 α と β が生成されるので, これは評価ゲームでの肯定者のすべての選択をカバーしている.
- $\mathbb{T}$ 中で $\Box\varphi$ がセグメント S 内にあれば, S の直後のどれかのセグメント内に後継者 φ があるので, これは評価ゲームでの否定者の選択である.
- $\mathbb{T}$ 中で $\Diamond\varphi$ がセグメント S 内にあれば, S の直後のすべてのセグメント内に後継者 φ があるので, これは評価ゲームでの肯定者のすべての選択をカバーしている.
- 補題 7(2) やゲームの定義により, $\mathbb{T}$ 内の論理式スレッドが途切れるのは次の 3 つの場合だけであり, いずれの場合も評価ゲームで否定者の勝利になる.
 - 様相局面の中の $\bar{p}$ で終わる. この場合は M の定義により p がその状態で真なので, 否定者の勝利である.
 - 様相局面の中の p で終わる. この場合は, p が属していたセグメント内には $\bar{p}$ は存在しないはずである. なぜならいったん発生したりテラルは様相局面まで引き継がれるので, $\bar{p}$ が存在したらそのセグメントの最後の様相局面には p と $\bar{p}$ が存在して, $\mathbb{T}$ がタブローゲームの閉パス阻止者必勝戦略であることに反するからである. したがってモデルの定義から p はこの状態で偽であり, 否定者の勝利である.
 - 様相局面の $\Diamond\varphi$ で終わる. これが起くるのはこれが製造不可局面である場合だけで, このときは M の中でこの状態からの遷移先が無いので, 否定者の勝利である.
- T がタブローゲームの閉パス阻止者の必勝戦略であることから, どんな論理式スレッドも ν スレッドではない.

以上のことから有限モデル M の状態 S_1 で ξ が偽なので, 定理 8 が証明された.

(証明終)

この定理 8 を定理 5 と合わせれば次が得られる.

任意の有限モデルの任意の状態 ξ が真であるならば, ξ の閉タブローが存在する.

これが目標の定理 4 の「(3) $\Rightarrow$ (1)」である.

参考文献

- [1] Dexter Kozen. A finite model theorem for the propositional μ -calculus. *Studia Logica* 47(3):233–241, (1988).
- [2] Damian Niwinski and Igor Walukiewicz. Games for the μ -calculus. *Theoretical Computer Science* 163:99–116, (1996).
- [3] Yde Venema. *Lectures on the modal μ -calculus*. (インターネットから入手可能. 数年毎に改訂され, 本稿では 2020 年版と 2024 年版を参考にしている.)
- [4] 鹿島亮. コンピュータサイエンスにおける様相論理. 森北出版 (2022).
- [5] 鹿島亮. 様相ミュー計算のタブロー法の完全性と無限ゲームの決定性について. 京都大学数理解析研究所講究録 2233, pp.65-81 (2022).
- [6] 田中一之. 計算理論と数理論理学. 共立出版 (2022)