

部分的な保存性を満たす文に関する最近の進展*

神戸大学大学院システム情報学研究科 小暮 晏佳[†]

Haruka Kogure

Graduate School of System Informatics,
Kobe University

神戸大学大学院システム情報学研究科 倉橋 太志[‡]

Taishi Kurahashi

Graduate School of System Informatics,
Kobe University

1 はじめに

第1不完全性定理は、条件を満たす理論の上で独立である文の存在を保証する定理である。独立な文にどのような性質を付加できるか、またそれらの性質をどの程度制御できるかを調べることは、不完全性定理を取り巻く諸現象をより精密に理解するうえで重要となる。部分的な保存性を満たす文の分析は、不完全性定理に関わる研究の一つとして発展してきた（教科書 [11, 5] や第二著者によるサーベイ論文 [17] を参照）。

Γ を Σ_n や Π_n などの論理式のクラスとし、 $\Sigma_n^d = \Pi_n$ および $\Pi_n^d = \Sigma_n$ とする。文 φ が理論 T 上で Γ -保存的であるとは、任意の Γ 文 γ について、もし $T + \varphi \vdash \gamma$ ならば、 $T \vdash \gamma$ となることをいう。定義より、 $T \vdash \varphi$ となる文 φ は自明に Γ -保存的となるため、 T 上で Γ -保存的な文 φ には非自明性、すなわち $T \not\vdash \varphi$ を期待することは自然である。実際に、 T 上で非自明に Γ -保存的な文は T 上で独立な文であることから、そうした文の存在は、第1不完全性定理の拡張であるとみることができる。

1979年に出版された Guaspari による論文 [3] において、 Γ -保存性を満たす文に関する基本的かつ体系的な分析が行われた。特に、Guaspari は第1不完全性定理の拡張として、 $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ とするとき、ペアノ算術 PA の無矛盾な c.e. 拡大理論 T において、 T 上で非自明に Γ -保存的な Γ^d 文が存在することを証明している。さらに、Guaspari は上述の論文 [3, p. 62] において次の二つの問題を提起している（用語の具体的な定義等は本稿の本文を参照）。

Question (1) PA の無矛盾な拡大理論の任意の c.e. 列 $\langle T_i \mid i \in \omega \rangle$ に対して、全ての T_i 上で非自明に Γ -保存的な Γ^d 文は存在するか？

Question (2) Π, Σ, Δ の任意の適切な組 (Γ, Θ) に対して、 T 上で exact に遺伝的に Γ -保存的であるような本質的に Θ である文は存在するか？

*本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 および JSPS 科研費（課題番号: JP23K03200）の助成を受けたものである。

[†]kogure@stu.kobe-u.ac.jp

[‡]kurahashi@people.kobe-u.ac.jp

これらの問題に対して、これまでに部分的な分析は行われてきたが、特に最近になって著しい進展があった。第 1 問題については有限個の理論について完全に解決し (Kurahashi, Okawa, Shavrukov, and Visser [10]), 第 2 問題についてもより拡張された設定のもとで肯定的に解決した (Kogure and Kurahashi [6])。本稿では、部分的な保存性を満たす文に関する最近の進展 (著者らの研究 [7] を含む) を解説するとともに、関連研究の概観を与える。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節では、部分的な保存性の基本的な定義と既知の基本結果を整理する。第 3 節において、複数の理論に対する同時保存性に関する Guaspari の第 1 問題について、Kurahashi, Okawa, Shavrukov, and Visser [10] による最近の結果、特に有限個の理論の場合の問題の解明について解説する。第 4 節では多様な部分保存性を導入し、二つの理論上で同時に保存的となる文の存在条件を体系的にまとめた Kogure and Kurahashi [6] の結果を中心として解説し、関連する Guaspari の第 2 問題の解決についても紹介する。最後に第 5 節において、二重の部分保存性に関する Kogure and Kurahashi [7] の結果を中心として紹介する。

2 部分的な保存性を満たす文

本稿を通じて、 $\mathcal{L}_A$ を一階算術の言語とする。単に論理式や文と書けば $\mathcal{L}_A$ -論理式や $\mathcal{L}_A$ -文のことを指し、理論とは PA の無矛盾な c.e. 拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論を指すとする。また、本稿全体を通して n は 1 以上の自然数を表すとする。 Γ は本節と次節においては Σ_n または Π_n を表すとするが、第 4 節以降には Σ_n と Π_n 以外の多くのクラスが登場し、 Γ はそれらの上を動くことになる。したがって、 $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ の場合に定めた用語などは適切に多くの Γ に対しても適用することとする。理論 T に対して、 $\text{Th}(T) := \{\varphi \mid T \vdash \varphi \text{ かつ } \varphi \text{ は文}\}$ および $\text{Th}_\Gamma(T) := \Gamma \cap \text{Th}(T)$ と定める。また、 $\Sigma_n^d = \Pi_n$ および $\Pi_n^d = \Sigma_n$ と定める。

定義 2.1 (Γ -保存性). 理論 T, U と文 φ に対して、

1. T が U 上で Γ -保存的であるとは、任意の Γ 文 γ について、 $T \vdash \gamma$ ならば $U \vdash \gamma$ が成り立つことをいう。
2. 文 φ が T 上で Γ -保存的であるとは、 $T + \varphi$ が T 上で Γ -保存的であることをいう。
3. $\text{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は } T \text{ 上で } \Gamma\text{-保存的な文}\}$.

$T \vdash \varphi$ となる φ は T 上で自明に Γ -保存的である。非自明に T 上で Γ -保存的な Γ^d 文の存在は Guaspari によって証明された。

定理 2.2 (Guaspari [3, Theorem 2.4]). $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ について、

$$\Gamma^d \cap \text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(T) \neq \emptyset.$$

T 上で Γ -保存的な文は次の意味で強い反証不可能性の性質を持つ文である。

命題 2.3. 理論 T と文 φ に対して、次は同値である。

1. $\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, T)$.
2. 任意の Γ^d 文の集合 X について、 $T + X$ が無矛盾ならば $T + X \not\vdash \neg\varphi$ である。

したがって、Guaspari の文は単に T 上で独立であるだけでなく、命題 2.3 の意味で強い反証不可能性を持つ文であり、Guaspari の定理は第 1 不完全性定理を拡張する結果だともいえる。

同様に、第 2 不完全性定理についても部分的な保存性を通じた拡張が行われている。Kreisel [9, Remark 14(ii)] は、 T の無矛盾性を表す Π_1 文 Con_T について $\neg \text{Con}_T \in \text{Cons}(\Pi_1, T)$ であることを証明しており、この結果から第 2 不完全性定理が直ちに得られる。関連して、Smoryński [16, Application 5] は T が Σ_1 -健全であることと $\text{Con}_T \in \text{Cons}(\Sigma_1, T)$ であることの同値性を示している。したがって、 T が Σ_1 -健全ならば、 $\text{Con}_T \in \text{Cons}(\Sigma_1, T)$ かつ $\neg \text{Con}_T \in \text{Cons}(\Pi_1, T)$ が成り立つ。これは、命題 2.3 の意味から、 Con_T が強い意味で証明も反証もできないような文であることを意味する。このように、文とその否定がそれぞれ異なるクラスに関して保存的となる状況を一般化して、次の定義を導入する。

定義 2.4 ((Γ, Λ) -保存性). 理論 T と文 φ に対して、

1. 文 φ が T 上で (Γ, Λ) -保存的であるとは、 $\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, T)$ かつ $\neg \varphi \in \text{Cons}(\Lambda, T)$ となることをいう。
2. $\text{DCons}(\Gamma, \Lambda; T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は } T \text{ 上で } (\Gamma, \Lambda)\text{-保存的}\}.$

T 上で (Γ, Λ) -保存的な文は自動的に T 上で独立な文となり、次の Solovay の定理はこの文脈における第 1 不完全性定理の自然な拡張である。

定理 2.5 (Solovay (Guaspari [3, Theorem 2.7] を参照)). $\Sigma_n \cap \text{DCons}(\Pi_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$.

実は、Guaspari による定理 2.2 の証明は、実際にはより強い保存性である遺伝的な保存性をもつ文の存在を示している。

定義 2.6 (遺伝的 Γ -保存性). 理論 T と文 φ に対して、

- 文 φ が T 上で遺伝的に Γ -保存的であるとは、 $T \vdash S \vdash \text{PA}$ を満たす任意の理論 S について $\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, S)$ となることをいう。
- $\text{HCons}(\Gamma, T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は遺伝的に } \Gamma\text{-保存的}\}.$

定理 2.7 (Guaspari [3, Theorem 2.4]). $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ について、

$$\Gamma^d \cap \text{HCons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(T) \neq \emptyset.$$

3 Guaspari の第 1 問題：複数の理論に対する同時保存性

第 1 不完全性定理の拡張に、次の Mostowski の定理がある。

定理 3.1 (Mostowski [14, Theorem 1]). 理論の任意の c.e. 族 $\{T_i\}_{i \in J}$ に対して、ある Π_1 文 φ が存在して $\varphi, \neg \varphi \notin \bigcup_{i \in J} \text{Th}(T_i)$ が成り立つ。

Mostowski の定理を部分的な保存性を持つ文の存在の形に拡張できるか、という問いが自然に提起できる。部分理論たちに対しては同時に保存性を満たす文が存在することを述べている定理 2.7 は、定理 2.2 の Mostowski 型の自然な拡張であるとみなせる。Guaspari の提起した一つ目の問題は、複数の理論に対して同時に非自明に Γ -保存的となる Γ^d 文の存在を問うものである。

問題 3.2 (Guaspari の第 1 問題 [3, Question (1)]). 理論の任意の c.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ に対して,

$$\Gamma^d \cap \bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$$

は成り立つか. また, 二つの理論の場合はどうか.

実は Mostowski の定理の状況とは異なり, Guaspari の第 1 問題は一般には成り立たない.

定理 3.3 (Misercque [12, Theorem 2.1], [13, Proposition 5.1.3]). 理論のある無限 c.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ が存在して, 全ての $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ に対して $\bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) = \emptyset$ が成り立つ.

3.1 有限個の理論の分析

Misercque の定理の状況を受け, Guaspari が示唆するように, 二つの理論に制限した場合の第 1 問題に関する分析が行われた. この場合, 問題は単純な形に還元される.

定理 3.4 (Bennet [1, Corollary 8], [2, Corollary 3.1.9]). 理論 T, U に対して, 次は同値である.

1. $(\Gamma^d \cap \text{Cons}(\Gamma, T) \cap \text{Cons}(\Gamma, U)) \setminus (\text{Th}(T) \cup \text{Th}(U)) \neq \emptyset$.
2. $\Gamma^d \cap \text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ かつ $\Gamma^d \cap \text{Cons}(\Gamma, U) \setminus \text{Th}(T) \neq \emptyset$.

$\Gamma = \Sigma_n$ の場合には, 還元された条件に対する次のような特徴づけが得られている.

定理 3.5 (Bennet [1, Theorem 6], [2, Theorem 3.1.7]). 理論 T, U に対して, 次は同値である.

1. $\Pi_n \cap \text{Cons}(\Sigma_n, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.
2. $\text{Th}_{\Pi_n}(T) \not\subseteq \text{Th}(U)$ または $U + \text{Th}_{\Sigma_n}(T)$ が無矛盾である.

Guaspari の定理 2.2 を用いて $\varphi \in \Sigma_n \cap \text{Cons}(\Pi_n, \text{PA}) \setminus \text{Th}(\text{PA})$ を取り, $T := \text{PA} + \varphi$ および $U := \text{PA} + \neg\varphi$ と定めれば, $\text{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \text{Th}(U)$ かつ $U + \text{Th}_{\Sigma_n}(T)$ は矛盾となるため, Bennet の結果より $\Pi_n \cap \text{Cons}(\Sigma_n, T) \setminus \text{Th}(U) = \emptyset$ となる. したがって, 二つの理論について, $\Gamma = \Sigma_n$ の場合には Guaspari の問題は一般には成立せず, さらにその成立のための必要十分条件が定理 3.4 と 3.5 によって得られたことになる. ここで, 次節への接続も考えて, 次の条件を導入する. $U + \text{Th}_{\Sigma_n}(T)$ の無矛盾性と $T + \text{Th}_{\Pi_n}(U)$ の無矛盾性は同値であることに注意.

定義 3.6 (B_n -ペア). 理論 T, U の組 (T, U) が B_n -ペアであるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\begin{aligned} &(\text{Th}_{\Pi_n}(T) \not\subseteq \text{Th}(U) \text{ または } T + \text{Th}_{\Pi_n}(U) \text{ が無矛盾}) \text{ および} \\ &(\text{Th}_{\Pi_n}(U) \not\subseteq \text{Th}(T) \text{ または } U + \text{Th}_{\Pi_n}(T) \text{ が無矛盾}). \end{aligned}$$

系 3.7 (Bennet [1, 2]). 理論 T, U について, 次は同値である.

1. (T, U) は B_n -ペアである.
2. $(\Pi_n \cap \text{Cons}(\Sigma_n, T) \cap \text{Cons}(\Sigma_n, U)) \setminus (\text{Th}(T) \cup \text{Th}(U)) \neq \emptyset$.

任意有限個の理論に対する分析は最近になって Kurahashi, Okawa, Shavrukov, and Visser (以降, 単純化のために KOSV と記載) によって進められた. まずは定理 3.4 は次のように一般化することができる.

定理 3.8 (KOSV [10, Theorem 4.1]). 理論 $T_0, \dots, T_k$ に対して, 次は同値である.

1. $\Gamma^d \cap \bigcap_{i \leq k} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.
2. 全ての $i \leq k$ について, $(\Gamma^d \cap \bigcap_{\substack{j \leq k \\ j \neq i}} \text{Cons}(\Gamma, T_j)) \setminus \text{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

定理 3.5 も次のように一般化することができる.

定理 3.9 (KOSV [10, Theorem 4.6]). $T_0, \dots, T_k, U$ を理論とし, $I_k = \{0, \dots, k\}$ とすると, 次は同値である.

1. $(\Pi_n \cap \bigcap_{i \leq k} \text{Cons}(\Sigma_n, T_i)) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.
2. ある $X \subseteq I_k$ が存在して,

$$\bigcap_{i \in I_k \setminus X} \text{Th}_{\Pi_n}(T_i) \not\subseteq \text{Th}\left(U + \bigcup_{i \in X} \text{Th}_{\Sigma_n}(T_i)\right).$$

以上より, 有限個の理論についても, $\Gamma = \Sigma_n$ の場合には Guaspari の第 1 問題の成立のための必要十分条件が定理 3.8 と 3.9 によって得られた. さらに興味深いことに, $\Gamma = \Pi_n$ の場合には, 任意の有限個の理論に対して Guaspari の第 1 問題が成立することが分かった.

定理 3.10 (KOSV [10, Corollary 5.3]). 任意の理論 $T_0, \dots, T_k$ に対して,

$$\Sigma_n \cap \bigcap_{i \leq k} (\text{Cons}(\Pi_n, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset.$$

以上より, 有限個の理論に対する Guaspari の問題が完全に解決した.

3.2 遺伝的な保存性に関する Guaspari の問題

二つの理論に対する同時に非自明に遺伝的に保存的な文の存在についても分析が行われている.

定義 3.11 (C_n -ペア). 理論 T, U の組 (T, U) が C_n -ペアであるとは, $T + \text{Th}_{\Pi_n}(U)$ と $U + \text{Th}_{\Pi_n}(T)$ がともに無矛盾であることをいう.

(T, U) が C_n -ペアならば B_n -ペアでもあることに注意.

定理 3.12 (Bennet [1, Corollary 5], [2, Corollary 3.1.6]). 理論 T, U について, 次は同値である.

1. (T, U) は C_n -ペアである.
2. $(\Pi_n \cap \text{HCons}(\Sigma_n, T) \cap \text{HCons}(\Sigma_n, U)) \setminus (\text{Th}(T) \cup \text{Th}(U)) \neq \emptyset$.
3. $(\Sigma_n \cap \text{HCons}(\Pi_n, T) \cap \text{HCons}(\Pi_n, U)) \setminus (\text{Th}(T) \cup \text{Th}(U)) \neq \emptyset$.

遺伝性を課す場合には, 理論の c.e. 族一般に対する Guaspari の問題について次のように解答を与えることができる.

定理 3.13 (KOSV [10, Proposition 4.13]). 理論の c.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ について, 次は同値である.

1. 全ての $i \in \omega$ について, $T_i + \bigcup_{j \neq i} \text{Th}_{\Gamma}(T_j)$ は無矛盾.
2. $\Gamma^d \cap \bigcap_{i \in \omega} (\text{HCons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.
3. 全ての $i \in \omega$ について, $(\Gamma^d \cap \bigcap_{j \neq i} \text{HCons}(\Gamma, T_j)) \setminus \text{Th}(T_i) \neq \emptyset$.
4. 全ての $k \in \omega$ について, $\Gamma^d \cap \bigcap_{i \leq k} (\text{HCons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.

3.3 無限個の理論について

Guaspari の第 1 問題は有限個の理論については理解できた一方で、無限個の理論については未解決問題が残っている。まず、理論の c.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ に関する次の三条件を考えよう。

G1 $\Gamma^d \cap \bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.

G2 全ての $i \in \omega$ について、 $(\Gamma^d \cap \bigcap_{j \neq i} \text{Cons}(\Gamma, T_j)) \setminus \text{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

G3 全ての $k \in \omega$ について、 $\Gamma^d \cap \bigcap_{i \leq k} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.

まずは **G1** が Guaspari の問題として求める状況である。 **G1** $\Rightarrow$ **G2** $\Rightarrow$ **G3** は容易に確認できる。有限個の理論に対する定理 3.8 のように、条件を還元できるかどうかは分かっていない。

問題 3.14 (KOSV [10, Problem 4.8]). 理論の c.e. 列について、**G2** $\Rightarrow$ **G1** は成立するか？

遺伝性を課した場合には、定理 3.13 より、**G1**, **G2**, **G3** に対応する条件がすべて同値であった。他方、次が成立する。

定理 3.15 (KOSV [10, Theorem 6.6]). **G3** を満たすが **G2** を満たさないような理論の c.e. 列が存在する。

次の定理は、条件 **G2** によって得られる $\Gamma^d \cap \bigcap_{i \in \omega} \text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ という形の主張が成立するための十分条件である（定理 3.9 の $(2 \Rightarrow 1)$ はこの定理の帰結である）。

定理 3.16 (KOSV [10, Theorem 4.2]). 理論の c.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ と理論 U について、もしある c.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在して

$$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \text{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \text{Th}\left(U + \bigcup_{i \in X} \text{Th}_{\Gamma}(T_i)\right)$$

が成り立つならば、 $(\Gamma^d \cap \bigcap_{i \in \omega} \text{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ である。

定理 3.9 を無限個の理論に対する主張に拡張できるかどうかは分かっていない。

問題 3.17 (KOSV [10, Problem 4.9]). 理論の c.e. 列について、 $\Gamma = \Sigma_n$ の場合に、定理 3.16 の逆が成立するか？

微妙な問題として、定理 3.16 の仮定の条件から集合 X の c.e. 性を落とせば真に弱い条件となることが分かっている（KOSV [10, Corollary 6.10]）が、その条件が定理 3.16 の結論に十分かどうかは分かっていない（KOSV [10, Problem 4.9]）。

4 Guaspari の第 2 問題：多様な部分保存性

Guaspari [3] は保存性、遺伝的な保存性に加えて次の性質についても考察している。

定義 4.1 (exact に Γ -保存的な文、本質的に Θ である文). 理論 T と文 φ に対して次を定める。

1. φ が T 上で exact に Γ -保存的であるとは、

$$\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \bigcup \{\text{Cons}(\Gamma', T) \mid \Gamma' \not\subseteq \Gamma\}$$

が成り立つことをいう。

2. φ が T 上で **exact に遺伝的に Γ -保存的** であるとは, $\varphi \in \text{HCons}(\Gamma, T)$ かつ, 任意の $\Theta \not\subseteq \Gamma$ について, $\text{PA} + \varphi \vdash \psi$ かつ $T \not\vdash \psi$ を満たす Θ 文 ψ が存在することをいう.
3. φ が T 上で **本質的に Θ** であるとは, φ が Θ 文であり, 任意の $\Theta' \not\subseteq \Theta$ に対し $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ を満たす Θ' 文 ψ が存在しないことをいう.

例えば, 文 φ が exact に Σ_n -保存的であるとは, Σ_n -保存的であるが Π_n -保存的でないことをいうので, Guaspari の定理 2.2 の文はこの性質を満たす. exact に保存的な文は非自明に保存的でもあることに注意. また, 文 φ が T 上で本質的に Σ_n であるとは, T 上で Π_n 文と同値にはならないことをいう. ただし, これらの定義は Γ や Θ がどの論理式のクラスの上を動くかによって変化することには注意が必要である. Guaspari は $\{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ のみを扱う場合について, 定理 2.7 の拡張である次の定理を証明した.

定理 4.2 (Guaspari [3, Theorem 2.6]). 任意の理論 T について次が成り立つ.

1. 任意の $\Theta \in \{\Sigma_{m+1}, \Pi_m \mid m \geq n\}$ に対し, 本質的に Θ で, かつ exact に遺伝的に Σ_n -保存的な文が存在する.
2. 任意の $\Theta \in \{\Sigma_m, \Pi_{m+1} \mid m \geq n\}$ に対し, 本質的に Θ で, かつ exact に遺伝的に Π_n -保存的な文が存在する.

ここで Δ_n -保存性の概念を導入する. 文 δ が $\Delta_n(T)$ であるとは, $T \vdash \delta \leftrightarrow \sigma$ となる Σ_n 文 σ と $T \vdash \delta \leftrightarrow \pi$ となる Π_n 文 π が存在することをいう.

定義 4.3 (Δ_n -保存性). 文 φ が理論 T 上 **Δ_n -保存的** であるとは, 任意の $\Delta_n(T)$ 文 δ について, $T + \varphi \vdash \delta$ ならば $T \vdash \delta$ となることをいう.

扱う論理式のクラスとして Δ_n を考えたとしても, exact に Σ_n -保存的 (Π_n -保存的) であること, および本質的に Σ_n (Π_n) であることの定義は変化しない. 現段階で文 φ が T 上で exact に Δ_n -保存的であるとは, $\varphi \in \text{Cons}(\Delta_n, T) \setminus (\text{Cons}(\Sigma_n, T) \cup \text{Cons}(\Pi_n, T))$ となることである¹. この場合に, 定理 4.2 と同様の結果が成立するか, を問うのが次の Guaspari の問題である.

問題 4.4 (Guaspari の第2問題 [3, p.62, Question (2)]). Π, Σ, Δ の意味のある組 (Γ, Θ) に対し, T 上で exact に遺伝的に Γ -保存的な, 本質的に Θ である文は存在するか.

意味のある組 (Γ, Θ) とは, 例えば $\Gamma \supseteq \Theta$ としてしまうと自明に問題が成立しないため, そのような組を除いた組である, という意図である. さて, この問題をより一般的な枠組みにおいて分析することにする. まずは以降で重要な役割を果たす, 新しい非対称な保存性の概念である $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存性を導入する.

定義 4.5 ($\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存性 (Kogure and Kurahashi [6])). 理論 T, U と文 φ について,

- T が U 上で **$\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的** であるとは, 任意の Σ_n 文 σ と Π_n 文 π について, $T \vdash \sigma \wedge \pi$ ならば $U \vdash \sigma \vee \pi$ が成り立つことをいう.
- φ が T 上で **$\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的** であるとは, $T + \varphi$ が T 上で $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的であることをいう.

さらに次の2つのクラスを考え, これらを Γ としたときの Γ -保存性の概念も考えることにする.

- $B(\Sigma_n)$ を, Σ_n 文のブール結合全体の集合とする.

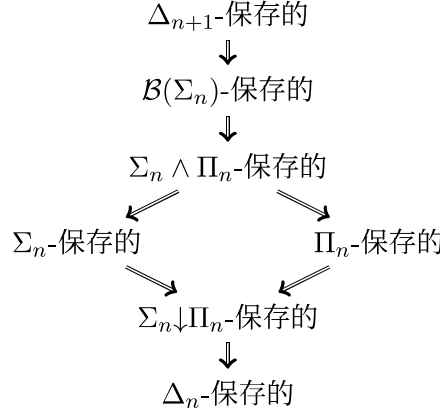


図 1: 各種保存性の間の関係

- $\Sigma_n \wedge \Pi_n := \{\sigma \wedge \pi \mid \sigma \in \Sigma_n \text{ かつ } \pi \in \Pi_n\}$.

図 1 はここまでで導入した各種の Γ -保存性の間の含意関係を表すものである。

以降, これらのクラスを扱うことにする. この時点で, 先ほどの場合から exact に Δ_n -保存的であること概念が変化することになる. すなわち, 文 φ が T 上で exact に Δ_n -保存的であるとは, $\varphi \in \text{Cons}(\Delta_n, T) \setminus \text{Cons}(\Sigma_n \downarrow \Pi_n, T)$ となることをいう. 一方, 文 φ が T 上で exact に $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的であるとは, $\varphi \in \text{Cons}(\Sigma_n \downarrow \Pi_n, T) \setminus (\text{Cons}(\Sigma_n, T) \cup \text{Cons}(\Pi_n, T))$ となることをいう. 扱う論理式のクラスが増えるほど, exact に Γ -保存的であることがより厳密になっていく.

ちなみに, exact に $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的な Σ_n 文は存在しない. というのも, もし φ が T 上で $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的な Σ_n 文だとすると, $T + \varphi \vdash \pi$ となる Π_n 文 π をとれば, $T + \varphi \vdash \varphi \wedge \pi$ なので $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存性より $T \vdash \varphi \vee \pi$ を得るため, $T \vdash \pi$ となり φ が T 上で Π_n -保存的となるからである. 同様に, exact に Δ_n -保存的な Π_n 文が存在しないことも示せる [6, Proposition 6.1].

ここからは, Kogure and Kurahashi [6] において体系的に整備されている, 二つの理論上で同時に保存的である文の存在条件に関する諸結果をまとめた四つの表を紹介する. まず表 1 は Bennet や KOSV の研究の流れにある, 二つの理論上で同時に非自明に Γ -保存的な Θ 文の存在条件をまとめたものである. Bennet の結果 (系 3.7) に登場した B_n -ペアの概念が重要となるが, KOSV の結果 (定理 3.10) のように無条件で存在するものも多い.

$\Gamma \backslash \Theta$	Π_n	Σ_n	$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$B(\Sigma_n)$	$\Delta_{n+1}(\text{PA})$
$B(\Sigma_n)$	/	/	/	/	✓
$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	/	/	/	✓	✓
Π_n	/	Thm. 3.10	✓	✓	✓
Σ_n	B_n Cor. 3.7	/	B_n	✓	✓
$\Sigma_n \downarrow \Pi_n$	B_n	✓	✓	✓	✓
Δ_n	B_n	✓	✓	✓	✓

表 1: 二つの理論上で同時に非自明に Γ -保存的な Θ 文の存在

続いて, 表 2 は二つの理論上で同時に exact に Γ -保存的な Θ 文の存在条件をまとめたものである. 表 1 では ✓ がついていた右下周辺が, 表 2 ではすべて B_n に変化している.

¹後ほどみるように, 扱う論理式のクラスを増やすと exact に Δ_n -保存的であることの定義が変化する.

$\Gamma \backslash \Theta$	Π_n	Σ_n	$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$\mathcal{B}(\Sigma_n)$	$\Delta_{n+1}(\text{PA})$
$\mathcal{B}(\Sigma_n)$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$\checkmark$
$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$\checkmark$	$\checkmark$
Π_n	$\diagup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Σ_n	B_n	$\diagup$	B_n	B_n	B_n
$\Sigma_n \downarrow \Pi_n$	$\times$	$\times$	B_n	B_n	B_n
Δ_n	$\times$	B_n	B_n	B_n	B_n

表 2: 二つの理論上で同時に exact に Γ -保存的な Θ 文の存在

表 3 は二つの理論上で同時に非自明に遺伝的に Γ -保存的な Θ 文の存在条件をまとめたものである．この表には Bennet の結果（定理 3.12）に登場した C_n -ペア以外にも次に新しく導入するいくつかのペア条件が登場している．

定義 4.6 (C_n^- -ペア, $C_n^\wedge$ -ペア, $C_n^\mathcal{B}$ -ペア (Kogure and Kurahashi [6])). 理論 T, U に対し,

1. (T, U) が C_n^- -ペアであるとは, $T + \text{Th}_{\Pi_n}(U)$ と $U + \text{Th}_{\Pi_n}(T)$ の少なくとも一方が無矛盾であることをいう．
2. (T, U) が $C_n^\wedge$ -ペアであるとは, $T + \text{Th}_{\Sigma_n \wedge \Pi_n}(U)$ と $U + \text{Th}_{\Sigma_n \wedge \Pi_n}(T)$ がともに無矛盾であることをいう．
3. (T, U) が $C_n^\mathcal{B}$ -ペアであるとは, $T + \text{Th}_{\mathcal{B}(\Sigma_n)}(U)$ が無矛盾であることをいう．

これらの条件は, 既に定めている B_n と C_n も含めて次の含意関係を持つ ((a) と (b) については後述する) :

$$C_{n+1}^- \implies C_n^\mathcal{B} \Rightarrow C_n^\wedge \Rightarrow (b) \Rightarrow C_n \Rightarrow (a) \Rightarrow C_n^-$$

$\searrow$
 B_n

$\Gamma \backslash \Theta$	Π_n	Σ_n	$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$\mathcal{B}(\Sigma_n)$	$\Delta_{n+1}(\text{PA})$
$\mathcal{B}(\Sigma_n)$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$C_n^\mathcal{B}$
$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$C_n^\wedge$	$C_n^\wedge$
Π_n	$\diagup$	C_n Thm. 3.12	C_n	C_n	C_n
Σ_n	C_n Thm. 3.12	$\diagup$	C_n	C_n	C_n
$\Sigma_n \downarrow \Pi_n$	C_n	C_n	C_n^-	C_n^-	C_n^-
Δ_n	C_n	(a)	C_n^-	C_n^-	C_n^-

表 3: 二つの理論上で同時に非自明に遺伝的に Γ -保存的な Θ 文の存在

T, U 上で同時に非自明に遺伝的に Δ_n -保存的な Σ_n 文の存在条件が表 3 において (a) と書かれている． $C_n \Rightarrow (a) \Rightarrow C_n^-$ は分かっているが [6, Theorem 6.7], 存在を特徴づけるような (T, U) の条件は分かっていない [6, Problem 6.8].

最後の表 4 は二つの理論上で同時に exact に遺伝的に Γ -保存的な Θ 文の存在条件をまとめたものである．興味深いのは表 3 において二つの理論上で同時に非自明に遺伝的に $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的な $\Sigma_n \wedge \Pi_n$ 文の存在は C_n^- で特徴づけられた一方で, 非自明性を exact 性に強めることでその存在条件が C_n に変化する点である．表 4 において, 各 $\Theta \supseteq \Sigma_n$ について, T, U 上で同時に exact に遺伝的に Δ_n -保存的な Θ 文の存在条件が (b) と書かれている． $C_n^\wedge \Rightarrow (b) \Rightarrow C_n$ は分かっ

いるが [6, Theorem 6.4], 存在を特徴づけるような (T, U) の条件は分かっていない [6, Problem 6.5]. また, (b) と書かれた各項目が互いに同値かどうかも分かっていない.

$\Gamma \backslash \Theta$	Π_n	Σ_n	$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$\mathcal{B}(\Sigma_n)$	$\Delta_{n+1}(\text{PA})$
$\mathcal{B}(\Sigma_n)$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$C_n^{\mathcal{B}}$
$\Sigma_n \wedge \Pi_n$	$\diagup$	$\diagup$	$\diagup$	$C_n^{\wedge}$	$C_n^{\wedge}$
Π_n	$\diagup$	C_n	C_n	C_n	C_n
Σ_n	C_n	$\diagup$	C_n	C_n	C_n
$\Sigma_n \downarrow \Pi_n$	$\times$	$\times$	C_n	C_n	C_n
Δ_n	$\times$	(b)	(b)	(b)	(b)

表 4: 二つの理論上で同時に exact に遺伝的に Γ -保存的な Θ 文の存在

各 Γ に対して, Γ^* を次で定める:

$$\Gamma^* = \begin{cases} \Delta_{n+1}(\text{PA}) & (\Gamma = \mathcal{B}(\Sigma_n)), \\ \mathcal{B}(\Sigma_n) & (\Gamma = \Sigma_n \wedge \Pi_n), \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n), \\ \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n), \\ \Sigma_n \wedge \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n \downarrow \Pi_n), \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Delta_n). \end{cases}$$

表 4 は二つの理論に対して最も強い性質を持つ文の存在に関するものであり, 次の系が得られる.

系 4.7. (T, U) が $C_n^{\mathcal{B}}$ -ペアならば, 任意の $\Gamma \in \{\Delta_n, \Sigma_n \downarrow \Pi_n, \Sigma_n, \Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n)\}$ について, T, U 上で同時に exact に遺伝的に Γ -保存的な Γ^* 文が存在する.

この系と (T, T) が $C_n^{\mathcal{B}}$ -ペアであることを用いて, Guaspari の第 2 問題の肯定的解決である次の定理が得られる.

定理 4.8 (Kogure and Kurahashi [6, Theorem 10.3]). 任意の理論 T , 任意の Γ , および $\Theta \supseteq \Gamma^*$ に対し, (Γ, Θ) がどの $n \geq 1$ に対しても $(\Sigma_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n)$ および $(\Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n)$ のいずれでもないならば, T 上で exact に遺伝的に Γ -保存的な, 本質的に Θ である文が存在する.

二つの組が除外されるのは, Σ_n -保存的あるいは Π_n -保存的である $\Sigma_n \wedge \Pi_n$ 文が, それぞれ Π_n 文あるいは Σ_n 文と同値になることに起因する [6, Proposition 10.2].

5 二重の部分保存性

本節は, Solovay の定理 2.5 において考察した, 二重に保存的な文に注目する. 以降, Γ, Λ は $\{\Delta_n, \Sigma_n, \Pi_n, \Sigma_n \downarrow \Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n)\}$ を動くとし, Θ は $\{\Sigma_n, \Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n), \Delta_{n+1}(\text{PA})\}$ を動くとする. T 上で (Γ, Λ) -保存的である文全体の集合を $\text{DCons}(\Gamma, \Lambda; T)$ と表した (定義 2.4). Solovay の定理は $\Sigma_n \cap \text{DCons}(\Pi_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$ を主張するものだったが, 存在が保証される別の組も知られている.

定理 5.1 (Hájek [4, Theorem 2]). $\Delta_{n+1}(\text{PA}) \cap \text{DCons}(\Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n); T) \neq \emptyset$.

一方で, 理論の性質や, 保存性のクラスによっては, 二重に保存的な文が存在しない場合もある.

定理 5.2 (Lindström [11, Exercise 5.6]).

1. T が Σ_n -健全ならば, $\Delta_{n+1}(\text{PA}) \cap \text{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) = \emptyset$.
2. $\mathcal{B}(\Sigma_n) \cap \text{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) = \mathcal{B}(\Sigma_n) \cap \text{DCons}(\Pi_n, \Pi_n; T) = \emptyset$.

Kogure and Kurahashi [7] では, T 上で (Γ, Λ) -保存的な Θ 文が存在するための, 理論 T に関する必要十分条件を体系的に分析した. 状況は (i) 存在, (ii) 条件付き存在, (iii) 非存在, の三つに分かれるが, (iii) については Lindström の定理 5.2.2 で説明がつく. (i) については, Solovay の定理 2.5, Hájek の定理 5.1, および次の定理で説明ができる.

定理 5.3 (Kogure and Kurahashi [7, Theorems 3.3 and 3.4]). 理論 T について,

1. $(\Sigma_n \wedge \Pi_n) \cap \text{DCons}(\Sigma_n \downarrow \Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n; T) \neq \emptyset$.
2. $\Sigma_{n+1} \cap \text{DCons}(\mathcal{B}(\Sigma_n), \mathcal{B}(\Sigma_n); T) \neq \emptyset$.

最後に (ii) であるが, Lindström の定理 5.2.1 を含む状況を正確に特定できた. 次の概念は ω -無矛盾性を階層化した Kreisel の n -無矛盾性 [8] をさらに別の理論で相対化したものである.

定義 5.4 (相対的 Γ -矛盾性). 理論 T, U に対し, T が U 上で Γ -矛盾であるとは, ある Γ 論理式 $\varphi(x)$ が存在して, $U \vdash \exists x \varphi(x)$ かつ, すべての $k \in \omega$ に対して $T \vdash \neg \varphi(\bar{k})$ となることをいう.

$\text{RFN}_{\Pi_n}(T)$ を Π_n 文 $\forall x (\text{Pr}_T(\ulcorner \text{True}_{\Pi_n}(x) \urcorner) \rightarrow \text{True}_{\Pi_n}(x))$ と定め, これを T の一様 Π_n 反映原理という. このとき, 次が成立する (特に $T = U$ の場合の $(1 \Leftrightarrow 4)$ は Smoryński [15] による).

定理 5.5 (Kogure and Kurahashi [7, Theorems 3.6 and 3.8]). U を T の部分理論とすると, 次は同値である.

1. T は U 上で Σ_{n+1} -無矛盾である.
2. $\Delta_{n+1}(U) \cap \text{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) = \emptyset$.
3. $\Delta_{n+1}(U) \cap \text{DCons}(\mathcal{B}(\Sigma_n), \mathcal{B}(\Sigma_n); T) = \emptyset$.
4. $U + \text{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ は Σ_2 -健全である.

以上より, T 上で (Γ, Λ) -保存的な Θ 文の存在に関する状況がすべて解明できた.

さらに Kogure and Kurahashi [7] では, 二重保存性の概念を, 遺伝的な保存性に強化した場合の分析も行った.

定義 5.6 (遺伝的な (Γ, Λ) -保存性).

1. 文 φ が T 上で**遺伝的に** (Γ, Λ) -保存的であるとは, $T \vdash S \vdash \text{PA}$ となる任意の理論 S について $\varphi \in \text{DCons}(\Gamma, \Lambda; S)$ となることをいう.
2. $\text{HDCons}(\Gamma, \Lambda; T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ は } T \text{ 上で遺伝的に } (\Gamma, \Lambda)\text{-保存的}\}$.

各 Γ, Λ, Θ に対して, T 上で遺伝的に (Γ, Λ) -保存的な Θ 文の存在に関する状況についても [7] においてすべて解明できたが, 紙面の都合上, いくつかの結果のみを紹介して本稿を終えることにする. その他の結果については [7] を参照されたい.

定理 5.7 (Kogure and Kurahashi [6, Theorem 5.7],[7, Theorems 4.10, 4.11, 4.21]). 理論 T に対して, 次は同値である.

1. T は PA 上で $\Sigma_n \downarrow \Pi_n$ -保存的である.
2. $\Sigma_n \cap \text{HDCons}(\Pi_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$.
3. $(\Sigma_n \wedge \Pi_n) \cap \text{HDCons}(\Delta_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n; T) \neq \emptyset$.
4. $\Sigma_{n+1} \cap \text{HDCons}(\Delta_n, \mathcal{B}(\Sigma_n); T) \neq \emptyset$.
5. $\Sigma_{n+1} \cap \text{HDCons}(\mathcal{B}(\Sigma_n), \Delta_n; T) \neq \emptyset$.
6. $\text{HDCons}(\Delta_n, \Delta_n; T) \neq \emptyset$.

定理 5.8 (Kogure and Kurahashi [7, Theorem 4.16]). 理論 T に対して, 次は同値である.

1. T は PA 上で Π_n -保存的である.
2. $\Delta_{n+1}(\text{PA}) \cap \text{HDCons}(\Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n); T) \neq \emptyset$.
3. $\text{HDCons}(\Pi_n, \Pi_n; T) \neq \emptyset$.

定理 5.9 (Kogure and Kurahashi [7, Theorem 4.22]). 理論 T に対して, 次は同値である.

1. T は PA 上で Σ_n -保存的である.
2. $\Sigma_{n+1} \cap \text{HDCons}(\Sigma_n, \mathcal{B}(\Sigma_n); T) \neq \emptyset$.
3. $\Sigma_{n+1} \cap \text{HDCons}(\mathcal{B}(\Sigma_n), \Sigma_n; T) \neq \emptyset$.
4. $\text{HDCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$.

謝辞

本稿に対して改善点をコメントしてくださった神戸大学の上島晟宏氏に感謝いたします.

参考文献

- [1] Christian Bennet. On a problem by D. Guaspari. In Mats Furberg, Thomas Wetterström, and Claes Åberg, editors, *Logic and Abstraction: Essays dedicated to Per Lindström on his fiftieth birthday*, volume 1 of *Acta Philosophica Gothoburgensia*, pages 61–69. Acta Universitatis Gothoburgensis, 1986.
- [2] Christian Bennet. *On some orderings of extensions of arithmetic*. PhD thesis, University of Göteborg, 1986.
- [3] David Guaspari. Partially conservative extensions of arithmetic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 254:47–68, 1979.

- [4] Petr Hájek. On partially conservative extensions of arithmetic. In Maurice Boffa, Dirk van Dalen, and Kenneth McAloon, editors, *Logic Colloquium '78: Proceedings of the colloquium held in Mons, August 1978*, volume 97 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 225–234. North-Holland, 1979.
- [5] Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [6] Haruka Kogure and Taishi Kurahashi. A variety of partially conservative sentences. 2024. arXiv:2412.08208.
- [7] Haruka Kogure and Taishi Kurahashi. Doubly partially conservative sentences. 2025. arXiv:2503.12373.
- [8] Georg Kreisel. A refinement of ω -consistency (abstract). *The Journal of Symbolic Logic*, 22:108–109, 1957.
- [9] Georg Kreisel. On weak completeness of intuitionistic predicate logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 27(2):139–158, 1962.
- [10] Taishi Kurahashi, Yuya Okawa, V. Yu. Shavrukov, and Albert Visser. On Guaspari’s problem about partially conservative sentences. *Annals of Pure and Applied Logic*, 173(5):25, 2022. Id/No 103087.
- [11] Per Lindström. *Aspects of Incompleteness*, volume 10 of *Lecture Notes in Logic*. A K Peters, 2nd edition, 2003.
- [12] Didier Misercque. Answer to a problem by D. Guaspari. In W. Guzicki, W. Marek, A. Pelc, and C. Rauszer, editors, *Open Days in Model Theory and Set Theory: Proceedings of a Conference held in September 1981 at Jadwisin, near Warsaw, Poland*, pages 181–183, 1983.
- [13] Didier Misercque. *Sur le treillis des formules fermées universelles de l’arithmétique de Peano*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1985–1986.
- [14] Andrzej Mostowski. A generalization of the incompleteness theorem. *Fundamenta Mathematicae*, 49(2):205–232, 1961.
- [15] Craig Smoryński. ω -consistency and reflection. In *Colloque International de Logique (Clermont-Ferrand, 1975)*, volume 249 of *Colloq. Internat. CNRS*, pages 167–181. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1977.
- [16] Craig Smoryński. Calculating self-referential statements. *Fundamenta Mathematicae*, 109(3):189–210, 1980.
- [17] 倉橋太志. 不完全性定理の数学的発展. **数学**, 73(1):60–87, 2021.