

第1 不完全性定理と外延性*

神戸大学大学院システム情報学研究科 倉橋 太志[†]

Taishi Kurahashi

Graduate School of System Informatics,
Kobe University

1 はじめに

本稿は Gödel や Rosser による第1 不完全性定理に関して、理論において独立な文がどのように得られるのかという観点について、「外延性」という切り口から議論を行うものである。第1 不完全性定理は、ペアノ算術 PA が本質的不完全であること、すなわち PA を含む無矛盾な c.e. 理論 T が不完全であることを主張する定理である。Rosser 文を用いた第1 不完全性定理の証明は、特にそのような理論 T に対して $T \not\models \rho$ かつ $T \not\models \neg \rho$ を満たす Π_1 文 ρ が T をもとに具体的に構成できること、つまり PA が実効的本質的不完全であることを示している。より正確には、インデックス i を持つ c.e. 集合を W_i で表すとすれば、計算可能部分関数 f が存在して、任意の i について、もし W_i が PA の無矛盾な拡大理論であれば、 $f(i)$ が定義され、 $f(i)$ は文であり、 $W_i \not\models f(i)$ かつ $W_i \not\models \neg f(i)$ となる。

PA は本質的不完全なので、もちろんその無矛盾な有限拡大 $PA + \varphi$ も不完全である。有限拡大における独立な文を実効的に与える操作の存在を定式化する際には、上述のインデックスに基づく方法の他に、追加公理 φ に基づく方法がある。実際、追加公理 φ が与えられたときに $W_i = PA + \varphi$ を満たすインデックス i を φ から計算することができるため、計算可能部分関数 f が存在して、もし $PA + \varphi$ が無矛盾であれば、 $f(\varphi)$ が定義され、 $f(\varphi)$ は文であり、 $PA + \varphi \not\models f(\varphi)$ かつ $PA + \varphi \not\models \neg f(\varphi)$ となる。

それでは、有限拡大に制限した本質的不完全性の実効版を与える関数に対して「外延性」という追加条件を課することができるだろうか。すなわち、理論 T から独立な文を与える関数で、 T の外延、もしくは T の定理全体の集合の外延のみに依存するものは存在するだろうか。例えば追加公理に基づく定式化の場合、 $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば、 $PA + \varphi$ と $PA + \psi$ は同等の理論である。特に $PA + \varphi$ が無矛盾ならば $f(\varphi)$ と $f(\psi)$ はともに $PA + \varphi$ において独立であるが、しかし $f(\varphi)$ と $f(\psi)$ の間に何らかの関係がある保証はない。それでは、同等の理論に対しては、同等の独立な文を与えるような計算可能関数は存在するだろうか。本稿では $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$ となるような関数 f を「外延的」とであるということにする¹。

本稿では、この問題に関して次の構成で議論を行う。まず第2 節では有限本質的不完全性とその実効版を整理し、特に

*本研究は JSPS 科研費 (課題番号: JP23K03200) の助成を受けたものである。

[†]kurahashi@people.kobe-u.ac.jp

¹ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば文字列として同一 $f(\varphi) \equiv f(\psi)$ となることから、 f が T の定理全体の集合の外延のみに依存するという性質としてまず期待されるが、このような計算可能関数 f は一般には取ることはできない (命題 3.1)。

(A) c.e. 集合のインデックスに基づく実効版,

(B) 追加公理に基づく実効版,

(C) 追加公理と論理式に基づく実効版,

の三種類を導入する. 第 3 節では, これらの実効版に対して課すことのできる外延性条件を定式化し, Shavrukov and Visser [12] による条件付き外延性および Lindenbaum 代数の稠密性に関する結果と, Hamkins [5] によって提起された問題を紹介する. 第 4 節では, 外延性よりも強い条件である単調性は一般には課すことができないことを確認する. 最後に第 5 節では, Kurahashi and Visser [9] による最近の結果を紹介し, (A) では条件付き外延性でさえ実現できないこと, (C) では外延性そのものは不可能であるが, その自然な弱化は実現できること, 条件付き外延性まで弱めれば強い独立性を満たすものが取れることを述べる.

2 有限本質的不完全性とその実効版

$\mathcal{L}_A$ を一階算術の言語とし, 本稿では理論や論理式といえば $\mathcal{L}_A$ -理論や $\mathcal{L}_A$ -論理式を指すものとする. まずは本稿では各理論において独立な文をどのように得ることができるかという観点から, 議論を単純化するために, 考察対象を有限拡大のみに制限する.

定義 2.1. 理論 T が有限本質的不完全であるとは, 任意の文 φ に対して, $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi$ が不完全であることをいう.

この概念は Lindenbaum 代数の言葉で自然に特徴づけることができる. まずは理論 T の Lindenbaum 代数を定める. 文全体の集合 Sent 上の同値関係 $\sim_T$ を $\varphi \sim_T \psi : \iff T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ で定め, 文 φ の $\sim_T$ -同値類を $[\varphi]_T$ と書き, $L_T := \text{Sent} / \sim_T$ と定める (単純化のために以降は $[\varphi]_T$ を $[\varphi]$ と省略する). L_T 上の半順序 $\leq_T$ を

$$[\varphi] \leq_T [\psi] : \iff T \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

で定める. このとき $\leq_T$ は well-defined であり, L_T はこの半順序のもとでブール代数をなす. これを理論 T の Lindenbaum 代数という. 最小元は集合 $\text{Rf}(T) := \{\varphi \in \text{Sent} \mid T \vdash \neg\varphi\}$ であり, 最大元は集合 $\text{Th}(T) := \{\varphi \in \text{Sent} \mid T \vdash \varphi\}$ である. 要素 $a \in L_T$ がアトムであるとは, a は最小元ではなく, かつ任意の $b \in L_T$ について, $b <_T a$ ならば b が最小元となることをいう.

命題 2.2. 次は同値である.

1. T は有限本質的不完全である.
2. T の Lindenbaum 代数はアトムを持たない.

証明. (1 $\Rightarrow$ 2): 対偶を示す. T の Lindenbaum 代数がアトム $[\varphi]$ を持つとする. $[\varphi]$ は最小元ではないので, $T \not\vdash \neg\varphi$, つまり $T + \varphi$ は無矛盾である. 任意の文 ψ に対して $[\varphi \wedge \psi] \leq_T [\varphi]$ であるから, $[\varphi \wedge \psi]$ は最小元か, または $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi]$ である. 前者なら $T + \varphi \vdash \neg\psi$, 後者なら $T + \varphi \vdash \psi$ である. したがって $T + \varphi$ は完全であり, T は有限本質的不完全ではない.

(2 $\Rightarrow$ 1): T の Lindenbaum 代数がアトムを持たないと仮定する. φ を任意の文とし, $T + \varphi$ が無矛盾であるとする. このとき $[\varphi]$ は最小元ではない. $[\varphi]$ はアトムでないから, ある文 ψ が存在して, $[\psi] <_T [\varphi]$ かつ $[\psi]$ は最小元ではない. このとき $T \not\vdash \varphi \rightarrow \psi$ なので $T + \varphi \not\vdash \psi$ である.

もし $T + \varphi \vdash \neg\psi$ ならば $T \vdash \psi \rightarrow \varphi$ と合わせて $T \vdash \neg\psi$ となる．これは $[\psi]$ が最小元でないことに反する．したがって $T + \varphi \not\vdash \neg\psi$ である．つまり $T + \varphi$ は不完全である．以上より、 T は有限本質的不完全である． $\square$

アトムを持たない可算無限ブール代数はすべて同型なので (cf. Givant and Halmos [3, Chapter 16]), 次の系が得られる．

系 2.3. 無矛盾な *c.e.* 理論 T, U がともに有限本質的不完全であれば、それらの *Lindenbaum* 代数は同型である．

また、このようなブール代数は特に稠密である．実際、有限本質的不完全な理論 T の *Lindenbaum* 代数の要素 $[\varphi]$ と $[\psi]$ について $[\varphi] <_T [\psi]$, すなわち $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ かつ $T \not\vdash \psi \rightarrow \varphi$ とする．このとき T の有限拡大理論 $T + \psi \wedge \neg\varphi$ は無矛盾なので、 T の有限本質的不完全性より $T + \psi \wedge \neg\varphi$ において独立な文 ρ が取れる．このとき、 $\xi := \varphi \vee (\psi \wedge \rho)$ と定めると、 $[\varphi] <_T [\xi] <_T [\psi]$ となることが容易に確認できる．

有限本質的不完全性の実効版としては、次の三種類の定式化を与えることができる．

(A) *c.e.* 集合のインデックスに基づく実効版

(B) 追加公理に基づく実効版

(C) 追加公理と論理式に基づく実効版

それぞれを正確に定める．以降、定義や定理などに (A), (B), (C) を併記する場合は、どの定式化に関係するものであるかを示している．

定義 2.4 (A). 理論 T が**実効的 i-有限本質的不完全**であるとは、計算可能部分関数 f が存在して、任意の i について、 W_i が T の無矛盾な有限拡大理論であれば、 $f(i)$ が定義され、 $f(i)$ は文であり、 $W_i \not\vdash f(i)$ かつ $W_i \not\vdash \neg f(i)$ となることをいう．

この概念は Pour-El [1] によって weak effective extensibility という名称で導入されたものである．

定義 2.5 (B). 理論 T が**実効的 e-有限本質的不完全**であるとは、計算可能部分関数 f が存在して、任意の文 φ について、 $T + \varphi$ が無矛盾ならば、 $f(\varphi)$ が定義され、 $f(\varphi)$ は文であり、 $T + \varphi \not\vdash f(\varphi)$ かつ $T + \varphi \not\vdash \neg f(\varphi)$ となることをいう．

この概念は Jones [6] によって effective nonfinite completability という名称で導入されたものである．実効的 i-有限本質的不完全性は、理論を生成するインデックスを入力とすることでその理論を参照する、という観点から intensional であるという意味を込めて i と表記している．他方、実効的 e-有限本質的不完全性は、 T を起点として $T + \varphi$ の外延を与える φ そのものを入力とすることでその理論を参照するという観点から、extensional であるという意味を込めて e と表記している．

実効的 i-有限本質的不完全性は *c.e.* 集合のインデックスを扱うため、再帰定理を用いた自由度の高い構成と親和性が高く、次が成立する．

定理 2.6 (Pour-El [1] (もしくは Kurahashi and Visser [8, Theorem 3.1] を参照)). T を無矛盾な *c.e.* 理論とすると、以下は同値である：

1. T は実効的 i-有限本質的不完全である．

2. T は実効的本質的不完全である.

3. T は実効的分離不能である, すなわち計算可能部分関数 f が存在して, 任意の i, j について, もし $W_i \supseteq \text{Th}(T)$ かつ $W_j \supseteq \text{Rf}(T)$ かつ $W_i \cap W_j = \emptyset$ ならば, $f(i, j)$ が定義され, $f(i, j) \notin W_i \cup W_j$ となる.

実効的 i -有限本質的不完全性は次の意味で系 2.3 の強化を与える程度に強い概念である.

定理 2.7 (Pour-El and Kripke [2]). 無矛盾な $c.e.$ 理論 T, U がともに実効的 i -有限本質的不完全であれば, それらの *Lindenbaum* 代数は計算可能同型である.

$c.e.$ 理論 T に対して, $T + \varphi = W_i$ となるインデックス i を φ から計算できるため, 実効的 i -有限本質的不完全性は実効的 e -有限本質的不完全性を含意する. 一方でその逆は一般には成立しない.

定理 2.8 (Jones [6] (もしくは Kurahashi and Visser [8, Example 4.3] を参照)). 実効的 e -有限本質的不完全であるが決定可能で本質的不完全でない理論が存在する.

$n \geq 1$ を固定する. もし実効的 e -有限本質的不完全性の定義において, $f(\varphi)$ が常に Π_n 文になるなら, f を PA において表現する Σ_1 論理式 $\delta(x, y)$ を用いて, Π_n 論理式

$$\rho(x) := \forall y (\delta(x, y) \rightarrow \text{True}_{\Pi_n}(y))$$

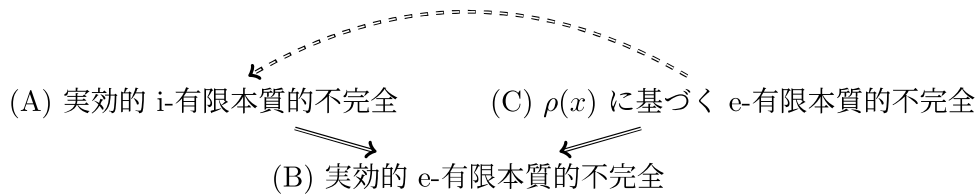
を取ることで $\text{PA} \vdash f(\varphi) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる. こうした分析のもと, 次の概念が Kurahashi and Visser [8] によって導入されている.

定義 2.9 (C). 理論 T が論理式 $\rho(x)$ に基づいて e -有限本質的不完全であるとは, 任意の文 φ について, $T + \varphi$ が無矛盾ならば, $T + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $T + \varphi \not\vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となることをいう.

$f(\varphi) := \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ と定めることで, 論理式 $\rho(x)$ に基づく e -有限本質的不完全性が実効的 e -有限本質的不完全性を含意することが分かる. さらに論理式を用いることで算術における不動点定理が使用できるようになり, 次が成り立つ.

定理 2.10 (Kurahashi and Visser [8, Theorem 4.7]). PA の無矛盾な $c.e.$ 拡大理論 T が論理式 $\rho(x)$ に基づいて e -有限本質的不完全ならば, 計算可能関数 f が存在して, 任意の i について, W_i が T の無矛盾な拡大理論であれば, ある文 φ について $f(i) = \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ であり, $W_i \not\vdash f(i)$ かつ $W_i \not\vdash \neg f(i)$ となる.

したがって, 有限本質的不完全性の実効版について, 独立な文を与えるだけであれば次の図の含意関係が成立する.



3 外延性

本稿では、PA の無矛盾 c.e. 拡大理論 T の有限本質的不完全性の実効版を与える関数・論理式に対して「外延性」という追加条件を課することができるだろうか、という問いを考える。すなわち、 T の有限本質的不完全性の三種類の実効版それぞれに対して次の形の外延性条件を追加することができるだろうか。

(A) 実効的 i-有限本質的不完全性: W_i, W_j が T の有限拡大理論で $\text{Th}(W_i) = \text{Th}(W_j)$ ならば $T \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$.

もしくはより弱く、 W_i, W_j が T の有限拡大理論で $W_i = W_j$ ならば $T \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$.

(B) 実効的 e-有限本質的不完全性: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$.

(C) 論理式に基づく e-有限本質的不完全性: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

これは、理論 T から独立な文を与える関数や論理式で、 T の外延や、 T の定理全体の集合の外延のみに依存して定まるものは存在するだろうか、という問いである。ここで、実効的 e-有限本質的不完全性の場合であったとしても、外延性の結論部分 $T \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$ を、文字列としての同一性 $f(\varphi) \equiv f(\psi)$ の形に強化することは一般にはできないことを確認しておく。

命題 3.1. $\text{Th}(T)$ と $\text{Rf}(T)$ が再帰的分離不能ならば、次の 2 条件を満たす計算可能関数 f は存在しない：

独立性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi \not\vdash f(\varphi)$ かつ $T + \varphi \not\vdash \neg f(\varphi)$ である。

同一性: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $f(\varphi) \equiv f(\psi)$ である。

証明. $\text{Th}(T)$ と $\text{Rf}(T)$ が再帰的分離不能であり、このような計算可能関数 f が存在したとする。 $\psi := f(0 = 0)$ と定めると、 ψ は T 上で独立である。よって $T + \psi$ は無矛盾なので、任意の文 φ について $T + \varphi \vee \psi$ も無矛盾である。 $X := \{\varphi \mid f(\varphi \vee \psi) \equiv \psi\}$ と定めると、 f の計算可能性より X は計算可能集合である。

- $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \varphi \vee \psi$ なので $T \vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow 0 = 0$ であり、同一性より $f(\varphi \vee \psi) \equiv \psi$ だから $\varphi \in X$ となる。以上より $\text{Th}(T) \subseteq X$ である。
- $T \vdash \neg \varphi$ ならば $T + \varphi \vee \psi \vdash \psi$ である。他方 $T + \varphi \vee \psi$ は無矛盾なので $T + \varphi \vee \psi$ 上で $f(\varphi \vee \psi)$ は独立である。したがって $f(\varphi \vee \psi)$ と ψ は異なる文であり、 $\varphi \notin X$ である。以上より $\text{Rf}(T) \cap X = \emptyset$ である。

以上より X は $\text{Th}(T)$ と $\text{Rf}(T)$ を分離する計算可能集合なので、これは再帰的分離不能性に反する。したがってそのような f は存在しない。□

PA の Lindenbaum 代数の稠密性についてもう一度考えることにする。上述のように、 $[\varphi] <_{\text{PA}} [\psi]$ のときに、 $T := \text{PA} + \psi + \neg \varphi$ は無矛盾な有限拡大なので、 T において独立な文 ρ が取れ、 $\xi := \varphi \vee (\psi \wedge \rho)$ とすれば $[\varphi] <_{\text{PA}} [\xi] <_{\text{PA}} [\psi]$ となる。ここで ξ は φ と ψ から実効的に取れるので、計算可能関数 $d(\cdot, \cdot)$ が存在して、 $[\varphi] <_{\text{PA}} [\psi]$ ならば $[\varphi] <_{\text{PA}} [d(\varphi, \psi)] <_{\text{PA}} [\psi]$ を満たす。この $d(\varphi, \psi)$ の値は φ, ψ の取り方、つまり「 T の取り方」に依存する。すなわち、 $[\varphi] = [\varphi']$ かつ $[\psi] = [\psi']$ であっても、 $[d(\varphi, \psi)] = [d(\varphi', \psi')]$ とは限らない。もしも $[\rho]$ を $\text{Th}(T)$ のみに依存して見つける計算可能な手続きがあるならば、それに基づいて Lindenbaum 代数上で well-defined な稠密演算を定め

ることができる。こうした観点から、本稿の「独立な文をどのように実効的に得ることができるのか」という問いは「独立な文を、証明可能性の構造をより反映する形でどのように実効的に得ることができるのか」と問い直すことができる。

例えば論理式に基づく e -有限本質的不完全性に対しては、Rosser の第 1 不完全性定理ではなく Gödel の第 1 不完全性定理の範囲であればこの追加条件を自然に満たす論理式を見出すことができる。Gödel の第 1 不完全性定理は、 PA を含む Σ_1 -健全な c.e. 理論 T が不完全であることを主張するものである。特にこの場合、 T の無矛盾性を表す Π_1 文 Con_T について $T \not\vdash \text{Con}_T$ かつ $T \not\vdash \neg \text{Con}_T$ である。 $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \text{Con}_{PA+\varphi} \leftrightarrow \text{Con}_{PA+\psi}$ であることが容易に分かる。また $\text{Con}_{PA+\varphi}$ は $\neg \text{Pr}_{PA}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ と同値であるから、 $\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を $\neg \text{Pr}_{PA}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ と定めることで、次の系が得られる。

系 3.2 (C). Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在して、次を満たす。

弱い独立性: $PA + \varphi$ が Σ_1 -健全ならば $PA + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である。

外延性: $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ である。

外延性の問題に対して最初の重要な結果を与えたのは Shavrukov and Visser [12] である。

定理 3.3 (C, Shavrukov and Visser [12, Theorem 1.1]). $\Delta_2(PA)$ 論理式 $\rho(x)$ が存在して、次を満たす。

独立性: $PA + \varphi$ が無矛盾ならば $PA + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である。

条件付き外延性: $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA + \varphi \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ である。

Shavrukov and Visser によって得られた論理式 $\rho(x)$ は純粋な外延性ではなく、結論が $PA + \varphi$ 上での証明可能性を主張する、弱い外延性である「条件付き外延性」のみを満たしていることに注意したい。

Shavrukov and Visser による $\Delta_2(PA)$ 論理式 $\rho(x)$ を用いて

$$f_\rho(\varphi) := \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \varphi$$

と定めることで、実効的 e -有限本質的不完全性に対して外延性を付加できることが従う。

系 3.4 (B, Shavrukov and Visser [12, Theorem 1.1]). 計算可能関数 f_ρ について、次が成立する。

独立性: $PA + \varphi$ が無矛盾ならば $PA + \varphi \not\vdash f_\rho(\varphi)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg f_\rho(\varphi)$ である。

外延性: $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash f_\rho(\varphi) \leftrightarrow f_\rho(\psi)$ である。

さらに

$$d_\rho(\varphi, \psi) := \varphi \vee (\psi \wedge f_\rho(\psi \wedge \neg \varphi))$$

とすれば、 d_ρ は Lindenbaum 代数上で well-defined な稠密演算を定めることのできる計算可能関数となる。

系 3.5 (Shavrukov and Visser [12, Theorem 1.3]). 計算可能関数 d_ρ について、次が成立する。

稠密性: $[\varphi] <_{PA} [\psi]$ ならば $[\varphi] <_{PA} [d_\rho(\varphi, \psi)] <_{PA} [\psi]$ である。

外延性: $[\varphi] = [\varphi']$ かつ $[\psi] = [\psi']$ ならば $[d_\rho(\varphi, \psi)] = [d_\rho(\varphi', \psi')]$ である。

Shavrukov and Visser の定理 3.3 は二種類の観点から改善の余地がある．まず第一に $\Delta_2(\text{PA})$ を Π_1 に落とせるかどうかである．第二に条件付き外延性を純粋な外延性に強化できるかどうかである．このような問いが Hamkins [5] によって提起された．

問題 3.6 (C, Hamkins [5, Question 28]). 次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？

独立性: $\text{PA} + \varphi$ が無矛盾ならば $\text{PA} + \varphi \not\models \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\text{PA} + \varphi \not\models \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である．

外延性: $\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\text{PA} \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ である．

4 単調性

外延性に関する諸結果を紹介する前に、実効的 ω -有限本質的不完全性を与える関数 f に対して、外延性よりも強い性質である「単調性」を課せないことが容易に示せることを紹介しておく．

命題 4.1 (B, Hamkins [5, Theorem 27]). 無矛盾な理論 T に対して、次の二条件を満たす関数 f は存在しない．

独立性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi \not\models f(\varphi)$ かつ $T + \varphi \not\models \neg f(\varphi)$ ．

単調性: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば $T \vdash f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$ ．

証明. 独立性と単調性の二条件を満たす関数 f が存在したとする． $T \vdash \varphi$ となる文 φ をとれば、 $T \vdash \neg f(\varphi) \rightarrow \varphi$ と単調性より $T \vdash f(\neg f(\varphi)) \rightarrow f(\varphi)$ である．対偶をとると $T + \neg f(\varphi) \vdash \neg f(\neg f(\varphi))$ であるから、独立性より $T + \neg f(\varphi)$ は矛盾する．よって $T \vdash f(\varphi)$ であり、再び独立性より $T + \varphi$ は矛盾するが、これは T の無矛盾性に反する． $\square$

Lindenbaum 代数の稠密性を与える関数についても、同様に単調性を課することはできない．

命題 4.2 (Kurahashi and Visser [9, Theorem 5.17]). 無矛盾な理論 T に対して、次の二条件を満たす関数 d は存在しない．

稠密性: $[\varphi] <_T [\psi]$ ならば $[\varphi] <_T [d(\varphi, \psi)] <_T [\psi]$ ．

右側単調性: $[\psi] \leq_T [\psi']$ ならば $[d(\varphi, \psi)] \leq_T [d(\varphi, \psi')]$ ．

証明. 稠密性と右側単調性の二条件を満たす関数 d が存在したとする． $T \vdash \varphi$ となる文 φ をとれば、 $[\neg \varphi] <_T [\varphi]$ である．稠密性より $[\neg \varphi] <_T [d(\neg \varphi, \varphi)] <_T [\varphi]$ となる． $[d(\neg \varphi, \varphi)] <_T [\varphi]$ の対偶をとって $[\neg \varphi] <_T [\neg d(\neg \varphi, \varphi)]$ なので、稠密性より $[\neg \varphi] <_T [d(\neg \varphi, \neg d(\neg \varphi, \varphi))] <_T [\neg d(\neg \varphi, \varphi)]$ となる．また、 $[\neg d(\neg \varphi, \varphi)] \leq_T [\varphi]$ なので、右側単調性より $[d(\neg \varphi, \neg d(\neg \varphi, \varphi))] \leq_T [d(\neg \varphi, \varphi)]$ となる．したがって $T + d(\neg \varphi, \neg d(\neg \varphi, \varphi))$ は矛盾するが、これは $[\neg \varphi] <_T [d(\neg \varphi, \neg d(\neg \varphi, \varphi))]$ に反する． $\square$

これらの命題は外延性という条件がこれ以上強めることのできないような追加条件であり、特に外延性を満たす関数の存在を示す Shavrukov and Visser の結果が非自明であることも示しているといえる．

Montalbán and Walsh [11] は、計算可能な稠密関数がより具体的な状況で単調性を満たさないことを示している．彼らの証明は単純ではあるが面白いのでここで紹介しておく．まず、 $T + \varphi$ が無矛盾ならば、第2不完全性定理より $T + \varphi \not\models \text{Con}_{T+\varphi}$ であり、したがって $[\varphi \wedge \text{Con}_{T+\varphi}] <_T [\varphi]$ であることを確認しておく．

定理 4.3 (Montalbán and Walsh [11]). T を PA の無矛盾な *c.e.* 拡大理論とすると、次の二条件を満たす計算可能な関数 d は存在しない。

弱い稠密性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $[\varphi \wedge \text{Con}_{T+\varphi}] <_T [d(\varphi)] <_T [\varphi]$.

単調性: $[\varphi] \leq_T [\psi]$ ならば $[d(\varphi)] \leq_T [d(\psi)]$.

証明. 弱い稠密性と単調性の二条件を満たす計算可能関数 d が存在したとする。このとき、 d を T において表現する論理式 $\delta(x, y)$ がとれる。すなわち、任意の文 ξ について、 $T \vdash \delta(\ulcorner \xi \urcorner, y) \leftrightarrow y = \overline{d(\xi)}$ が成り立つ。いま $\psi := \forall x \forall y (\delta(x, y) \wedge \text{Con}_{T+x} \rightarrow \text{Con}_{T+x+\dot{y}})$ と定める。ここで $\dot{y}$ は文 ξ の Gödel 数から $\neg \xi$ の Gödel 数を出力する原始再帰的関数に対応する項である。もし $T + \psi$ が矛盾するなら、 $T \vdash \neg \psi$ つまり $T \vdash \exists x \exists y (\delta(x, y) \wedge \text{Con}_{T+x} \wedge \neg \text{Con}_{T+x+\dot{y}})$ であり、特に $T \vdash \text{Con}_T$ となるため、第2不完全性定理より T の無矛盾性に反する。したがって $T + \psi$ は無矛盾である。弱い稠密性より $[d(\psi)] <_T [\psi]$ となる。さらに $\varphi := \psi \wedge (d(\psi) \rightarrow \text{Con}_{T+\psi})$ と定める。もし $T + \varphi$ が矛盾するなら、 $T \vdash \neg \varphi$ 、つまり $T \vdash \psi \rightarrow (d(\psi) \wedge \neg \text{Con}_{T+\psi})$ である。特に $T \vdash \psi \rightarrow d(\psi)$ なので $[d(\psi)] <_T [\psi]$ に反する。したがって $T + \varphi$ もまた無矛盾である。

弱い稠密性より $[\varphi \wedge \text{Con}_{T+\varphi}] <_T [d(\varphi)] <_T [\varphi]$ である。 $[\varphi] \leq_T [\psi]$ なので、単調性より $[d(\varphi)] \leq_T [d(\psi)]$ 、つまり $[d(\varphi)] \leq_T [\varphi \wedge d(\psi)]$ を得る。再び $[\varphi] \leq_T [\psi]$ と φ の定義より $[d(\varphi)] \leq_T [\psi \wedge \text{Con}_{T+\psi}]$ となる。 ψ の定義より $[d(\varphi)] \leq_T [\text{Con}_{T+\psi+\neg d(\psi)}]$ が得られる。ここで φ の定義より $T + \psi + \neg d(\psi) \vdash \varphi$ なので、 $T \vdash \text{Con}_{T+\psi+\neg d(\psi)} \rightarrow \text{Con}_{T+\varphi}$ であるから、 $[d(\varphi)] \leq_T [\text{Con}_{T+\varphi}]$ つまり $[d(\varphi)] \leq_T [\varphi \wedge \text{Con}_{T+\varphi}]$ となる。これは $[\varphi \wedge \text{Con}_{T+\varphi}] <_T [d(\varphi)]$ に反する。□

5 最近の成果

(A) 実効的 i -有限本質的不完全性

(B) 実効的 e -有限本質的不完全性

(C) 論理式に基づく e -有限本質的不完全性

であった。特に (B) 実効的 e -有限本質的不完全性については Shavrukov and Visser によって外延性を満たす関数の存在が示されている (系 3.4)。Kurahashi and Visser [9] において、(A) と (C) について、Hamkins の問題に関連する次の結果が得られた。

- (A) で条件付き外延性を満たすものはない。
- (C) で外延性を満たすものはない。
- (C) で外延性を自然に弱めた条件を満たすものが存在する。
- (C) で条件付き外延性だとさらに強い独立性を満たすものが存在する。

表 1 は以上の結果について、存在の成否のみをまとめたものである。これらの結果について順に紹介する。

定理 5.1 (Kurahashi and Visser [9, Corollary 6.4]). 任意の無矛盾 *c.e.* 理論 T に対し、次を満たす計算可能部分関数 f は存在しない。

	(A) 実効的 i-有限本質 的不完全性	(B) 実効的 e-有限本質 的不完全性	(C) 論理式に基づく e- 有限本質的不完全性	
外延性	×	✓ (系 3.4) Shavrukov and Visser [12]	×	(定理 5.2) Kurahashi and Visser [9]
無矛盾外延性	×	✓	✓ (定理 5.3) Kurahashi and Visser [9]	
条件付き外延性	×	✓	✓	
	×			
	(定理 5.1) Kurahashi and Visser [9]			

表 1: 有限本質的不完全性の実効版と外延性

弱い独立性: W_i が T の無矛盾な有限拡大理論ならば, $f(i)$ が定義されて, $f(i)$ は文で, $T \not\vdash f(i)$ かつ $W_i \not\vdash \neg f(i)$.

条件付き外延性: W_i が T の無矛盾な有限拡大理論で $W_i = W_j$ ならば $W_i \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$.

証明. そのような計算可能部分関数 f が存在すると仮定して矛盾を導く. $T = W_i$ を満たすインデックス i を固定する. T は無矛盾なので, 弱い独立性より $f(i)$ は定義されて文であり, $T \not\vdash f(i)$ となる. 再帰定理により, 次を満たすインデックス j が取れる:

$$W_j = \begin{cases} T + \neg f(j) & \text{if } f(j) \downarrow \text{ かつ } T \vdash f(j) \rightarrow f(i), \\ T & \text{otherwise.} \end{cases}$$

いま $f(j)$ が定義されかつ $T \vdash f(j) \rightarrow f(i)$ であると仮定して矛盾を導く. このとき $W_j = T + \neg f(j)$ であり, 特に $W_j \vdash \neg f(j)$ である. もし W_j が無矛盾ならば, W_j は T の無矛盾な有限拡大であるから, 弱い独立性より $W_j \not\vdash \neg f(j)$ となるがこれはおかしい. したがって W_j は矛盾している. よって $T \vdash f(j)$ が従う. いま仮定より $T \vdash f(j) \rightarrow f(i)$ なので, $T \vdash f(i)$ を得るため, おかしい.

したがって W_j の定義から, 実際には $W_j = T$ である. よって $W_i = W_j$ は T の無矛盾な有限拡大であるから, 条件付き外延性より $T = W_i \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$ を得る. 特に $T \vdash f(j) \rightarrow f(i)$ であるが, これは先ほど示したことに反する. 以上より, そのような計算可能部分関数 f は存在しない. $\square$

したがって実効的 i-有限本質的不完全性については条件付き外延性でさえ満たす関数は存在しない. この結果は, 実効的 i-有限本質的不完全性の概念が本質的に内包的であり, 有限拡大の特定の c.e. インデックスに依存せざるをえないことを意味している. 条件付き外延性を満たす論理式が存在するという Shavrukov and Visser の定理 3.3 とを合わせると, 条件付き外延性を保存しながら定理 2.10 のように (C) から (A) を導く方法はないことが分かる.

それでは Hamkins の問題の扱う, 論理式に基づく e-有限本質的不完全性に話題を移す. まずは, Hamkins の問題は次の意味で成立しないことが簡単に分かる.

定理 5.2 (C, Kurahashi and Visser [9, Theorem 3.1]). T を PA の無矛盾拡大理論とすると, 次の二条件を満たす論理式 $\rho(x)$ は存在しない.

独立性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $T + \varphi \not\vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

外延性: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

証明. 独立性と外延性を満たす論理式 $\rho(x)$ が存在すると仮定して矛盾を導く．不動点定理により

$$\text{PA} \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \rho(\ulcorner \varphi_0 \urcorner), \quad \text{PA} \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \neg \rho(\ulcorner \varphi_1 \urcorner)$$

を満たす文 φ_0, φ_1 が取れる． $T + \varphi_0 \vdash \rho(\ulcorner \varphi_0 \urcorner)$ なので独立性より $T + \varphi_0$ は矛盾する．同様に $T + \varphi_1 \vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi_1 \urcorner)$ なので独立性より $T + \varphi_1$ も矛盾する．したがって $T \vdash \neg \varphi_0$ かつ $T \vdash \neg \varphi_1$ であり、よって $T \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1$ となる．外延性より $T \vdash \rho(\ulcorner \varphi_0 \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \varphi_1 \urcorner)$ を得るが、不動点の取り方より $T \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \neg \varphi_1$ となる．これは T の無矛盾性に反する． $\square$

この証明において、外延性を実際に使用したのは $T + \varphi_0$ が矛盾かつ $T \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1$ という特別な場合だけである．実際、その場合だけを除外するような弱化条件を考えれば、次の肯定的結果を得ることができる．

定理 5.3 (C, Kurahashi and Visser [9, Theorem 4.1]). T を PA の無矛盾 c.e. 拡大理論とする．このとき、次の二条件を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在する．

独立性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $T + \varphi \not\vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ．

無矛盾外延性: $T + \varphi$ が無矛盾かつ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ ．

この定理は、Hamkins の問いに対する最良の肯定的回答を与えていると考えることができる．無矛盾外延性は条件付き外延性を含意することが容易に確認できるため、定理 5.3 は定理 3.3 の拡張になっている．

証明は Guaspari and Solovay [4] の構成法に基づく．理論 $T + x$ の定理全体の集合を列挙する 2 変数計算可能関数である $f(x, \cdot)$ を定義し、不動点定理により

$$\text{PA} \vdash \rho(x) \leftrightarrow \neg \exists y (f(x, y) = \ulcorner \rho(\dot{x}) \urcorner \wedge \forall w \leq y f(x, w) \neq \ulcorner \neg \rho(\dot{x}) \urcorner)$$

を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ を取る． $\rho(x)$ は $T + x$ の Rosser 文に他ならず、 $\rho(x)$ が独立性を満たすことは容易に分かる．無矛盾外延性を満たすために $f(\varphi, \cdot)$ による $\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ や $\neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ の出力順をコントロールする部分が証明の肝である．

最後の結果の紹介に移る． T を PA の Σ_1 -健全な c.e. 拡大理論とすれば Con_T が T 上で独立であることはすでに述べた．無矛盾だが Σ_1 -健全でない T で特に $\neg \text{Con}_T$ を証明できるものが存在するため、PA の本質的不完全性を示すには Con_T では不十分であり、そのためには T の Rosser 文を用いる、というのが通常の議論の流れである．しかし、実は Σ_1 -健全でない理論 T であっても、 T の証明可能性述語をうまく取り換えることによって T において Con_T が独立となるようにできることが知られている (cf. Lindström [10, Corollary 2.5])．特に Con_T はさらに強く次の意味で独立となることが知られている．

定理 5.4 (Kreisel [7]). T を PA の無矛盾な c.e. 拡大理論とすると、 $\neg \text{Con}_T$ は T 上で Π_1 -保存的である．すなわち、任意の Π_1 文 φ について、 $T + \neg \text{Con}_T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である．

Kreisel の定理は第 2 不完全性定理の一般化である．実際、特に φ として $0 = 1$ をとれば第 2 不完全性定理が得られる．Rosser 文の否定は T 上で Π_1 -保存的ではないことが知られており (cf. Lindström [10, Exercise 5.1])、定理 5.3 について、上述の Rosser 文に基づく証明法を採用する限りは、定理 5.3 における独立性を Π_1 -保存性を要求する強い独立性に書き換えることはできない．他方、無矛盾外延性を条件付き外延性に弱めれば、 T の各有限拡大 φ に対し特に $\text{Con}_{T+\varphi}$ の形の独立な文が取れることを示し、次の定理が成立する．この定理もまた Shavrukov and Visser の定理 3.3 の拡張である．

定理 5.5 (Kurahashi and Visser [9, Theorem 5.14]). T を PA の無矛盾 *c.e.* 拡大理論とする. このとき, 次の二条件を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在する.

強い独立性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ は $T + \varphi$ 上 Π_1 -保存的である.

条件付き外延性: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T + \varphi \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ である.

定理 5.5 の重要な帰結は, Shavrukov and Visser の外延的稠密性の結果である系 3.5 の次の形の強化である. ここで Γ はある $n \geq 1$ に対する Σ_n もしくは Π_n を表すとする.

系 5.6 (Kurahashi and Visser [9, Corollary 5.15]). T を PA の無矛盾な *c.e.* 拡大理論とする. このとき, 計算可能関数 d が存在して, 次を満たす.

強い稠密性: $[\varphi] <_T [\psi]$ かつ $\varphi, \psi \in \Gamma \supseteq \Pi_1$ ならば, $d(\varphi, \psi) \in \Gamma$ であり, $[\varphi] <_T [d(\varphi, \psi)] <_T [\psi]$ であり, かつ任意の Σ_1 文 σ に対して $[\sigma] \leq_T [d(\varphi, \psi)]$ ならば $[\sigma] \leq_T [\varphi]$ が成り立つ.

外延性: $[\varphi] = [\varphi']$ かつ $[\psi] = [\psi']$ ならば $[d(\varphi, \psi)] = [d(\varphi', \psi')]$ である.

定理 5.5 の関数 d は Lindenbaum 代数の区間に関する, より精密な代数的制御を与えるものになっている.

6 おわりに

本稿では, 第 1 不完全性定理を, 各理論に対して独立な文をどのように実効的に与えることができるかという観点から捉え直し, 有限本質的不完全性の三種類の実効版である

(A) 実効的 i -有限本質的不完全性

(B) 実効的 e -有限本質的不完全性

(C) 論理式に基づく e -有限本質的不完全性

を導入したうえで, それらに対して外延性という条件を課することができるかどうかを考察した. Shavrukov and Visser の結果は, (C) の条件付き外延性を経由しつつ, (B) および対応する Lindenbaum 代数の稠密演算について, 外延的な形で独立な文や補間元を与える計算可能関数の存在を示している. これにより, 独立な文を与える操作や稠密性を与える操作を, 理論の表示ではなく外延そのものに依存する形で構成できる場合があることが分かる. 他方で, Hamkins の問いが求める意味での純粋な外延性は, (C) においては一般には実現できない. しかし, 外延性をわずかに弱めた無矛盾外延性を考えると, (C) においては無矛盾な有限拡大に対しては, Π_1 論理式により独立な文を外延的に与えることができる. この結果は, Hamkins の問いに対する最良の肯定的回答とみなすことができる. さらに, 条件付き外延性まで弱めれば, 強い独立性を持つ Π_1 論理式が得られ, そこから Lindenbaum 代数の強い稠密性関数の存在が従う. また, (A) に関しては, 条件付き外延性でさえ実現できないという強い否定結果が得られた. このことは, *c.e.* 集合のインデックスを入力とする定式化が本質的に内包的であり, 理論の表示の違いを無視できないことを示している. したがって, 本稿で扱った三種類の実効版は単なる技術的な定式化の違いではなく, 独立な文を与える操作の外延性をどの程度実現できるかという点で, 本質的に異なる振る舞いを示すものであることが分かった.

今後の展望としては, まずはより強い独立性を持つ文を与えるような外延的な論理式の構成が挙げられる.

問題 6.1 (Kurahashi and Visser [9, Question 2.3]). T を PA の無矛盾 c.e. 拡大理論とする。このとき、次の二条件を満たす Π_n 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？

強い独立性: $T + \varphi$ が無矛盾ならば $T + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ は $T + \varphi$ 上 Π_n -保存的である。

条件付き外延性: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $T + \varphi \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ である。

また、条件付き外延性を無矛盾外延性に強められるか？

また、Lindenbaum 代数の稠密関数のより体系的な分析も関連する重要な課題である。

問題 6.2 (Montalbán and Walsh [11, Question 2.8]). T を PA の無矛盾 c.e. 拡大理論とする。このとき、次の二条件を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？ $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ を Π_1 文として、

稠密性: $[\varphi] <_T [\psi]$ ならば $[\varphi] <_T [\rho(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)] <_T [\psi]$ 。

単調性: $[\varphi] \leq_T [\varphi']$ かつ $[\psi] \leq_T [\psi']$ ならば $[\rho(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)] \leq_T [\rho(\ulcorner \varphi' \urcorner, \ulcorner \psi' \urcorner)]$ 。

謝辞

本稿に対して多くの改善点を提案してくださった上島晟宏さんと熊坂翼さんに感謝いたします。

参考文献

- [1] Marian Boykan Pour-El. Effectively extensible theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 33(1):56–68, 1968.
- [2] Marian Boykan Pour-El and Saul Kripke. Deduction-preserving ‘Recursive isomorphisms’ between theories. *Fundamenta Mathematicae*, 61:141–163, 1967.
- [3] Steven Givant and Paul Halmos. *Introduction to Boolean algebras*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2009.
- [4] David Guaspari and Robert M. Solovay. Rosser sentences. *Annals of Mathematical Logic*, 16:81–99, 1979.
- [5] Joel David Hamkins. Nonlinearity and illfoundedness in the hierarchy of large cardinal consistency strength. *Monatshefte für Mathematik*, 208(4):687–728, 2025.
- [6] James P. Jones. Effectively retractable theories and degrees of undecidability. *The Journal of Symbolic Logic*, 34:597–604, 1969.
- [7] Georg Kreisel. On weak completeness of intuitionistic predicate logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 27(2):139–158, 1962.
- [8] Taishi Kurahashi and Albert Visser. Pour-El’s landscape. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 30(3):362–397, 2024.
- [9] Taishi Kurahashi and Albert Visser. Extensional independence. Preprint, arXiv:2506.13524, 2025.

- [10] Per Lindström. *Aspects of incompleteness*, volume 10 of *Lect. Notes Log.* Natick, MA: Association for Symbolic Logic, 2nd edition, 2003.
- [11] Antonio Montalbán and James Walsh. On the inevitability of the consistency operator. *The Journal of Symbolic Logic*, 84(1):205–225, 2019.
- [12] V. Yu. Shavrukov and Albert Visser. Uniform density in Lindenbaum algebras. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 55(4):569–582, 2014.