

# Residual 公理の変種について \*

新潟大学経営戦略本部評価センター 関 隆宏

Takahiro Seki

University Evaluation Center, Headquarters for Management Strategy,  
Niigata University

## 1 はじめに

**部分構造論理** (substructural logics) は、シーケント計算 **LK** や **LJ** における構造に関する推論規則 (exchange, contraction, weakening) のいくつかを取り除き、必要に応じていくつかの公理を加えることにより得られる論理の総称である。部分構造論理では、論理演算子「 $\cdot$ 」(fusion) を加えるのが一般的である。(以下、 $\alpha \cdot \beta$  を  $\alpha\beta$  のように、fusion 演算子  $\cdot$  を省略して記す。) この fusion 演算子  $\cdot$  に関する性質と構造に関する規則には以下のような対応関係がある。

$$\begin{array}{lll} \alpha\alpha \leftrightarrow \alpha & \cdots & \text{weakening と contraction} \\ \alpha\beta \leftrightarrow \beta\alpha & \cdots & \text{exchange} \\ (\alpha\beta)\gamma \leftrightarrow \alpha(\beta\gamma) & \cdots & \text{associativity} \end{array}$$

**LJ** からすべての構造に関する推論規則 (weakening, contraction, exchange) を取り除くことにより得られる論理 **FL** において、結合則 (associativity) は証明可能である。一方、**結合則を持たない部分構造論理**の研究もしばしば行われている [1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11]。

本稿では

$$[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow (\alpha\beta \rightarrow \gamma), \quad (\alpha\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow [\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)]$$

の2つを **residual 公理** と呼び、さらに

$$[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \leftrightarrow (\alpha\beta \rightarrow \gamma)$$

を **強 residual 公理** と呼ぶ。ここで、 $\rightarrow$  は含意演算子を表す。Residual 公理は、結合則を持つ部分構造論理では証明可能であるが、結合則を持たない部分構造論理では一般に証明可能でない。したがって、結合則を持たない部分構造論理に(強) residual 公理を加えた論理において、結合則は証明可能になるか、などの問いが出てくる。

---

\* 本研究は科研費 (課題番号:19K03600) の助成を受けたものである。

一方, exchange を持たない部分構造論理では, 2 種類の含意  $\backslash, /$  が必要とされる。例えば, **FL** におけるこれら 2 種類の含意に関する推論規則は次のように与えられる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Delta, \Gamma, \alpha \backslash \beta, \Sigma \Rightarrow \delta} \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \backslash \beta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Delta, \beta / \alpha, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta} \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta / \alpha}$$

このとき, (強) residual 公理の含意を 2 種類の含意で置き換えた (強) residual 公理の **変種** を考える必要が生じる。

本稿では, 結合則と exchange を持たない部分構造論理に residual 公理の変種を加えた論理の階層性について考える。なお, 本研究は進行中の研究のため, 現時点までに得られている結果を証明なしで述べる。

## 2 基礎となる部分構造論理と residual 公理の変種

本稿における部分構造論理の論理式は, 命題変数に論理結合子  $\wedge, \vee, \cdot, \backslash, /$  を適用する形で作られ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  により表される。なお, 命題定数は用いない。

部分構造論理 **NAC** は次により定義される。

(a) 公理

(A1)  $\alpha \backslash \alpha$

(A2)  $(\alpha \wedge \beta) \backslash \alpha$

(A3)  $(\alpha \wedge \beta) \backslash \beta$

(A4)  $\alpha \backslash (\alpha \vee \beta)$

(A5)  $\beta \backslash (\alpha \vee \beta)$

(b) 推論規則

$$(R1) \quad \frac{\alpha \backslash \beta \quad \beta \backslash \gamma}{\alpha \backslash \gamma} \quad (R2) \quad \frac{\alpha \backslash \beta \quad \alpha \backslash \delta}{\alpha \backslash (\beta \wedge \delta)} \quad (R3) \quad \frac{\alpha \backslash \delta \quad \beta \backslash \delta}{(\alpha \vee \beta) \backslash \delta}$$

$$(R4) \quad \frac{\alpha \beta \backslash \delta}{\beta \backslash (\alpha \backslash \delta)} \quad (R5) \quad \frac{\beta \backslash (\alpha \backslash \delta)}{\alpha \backslash (\delta / \beta)} \quad (R6) \quad \frac{\alpha \backslash (\delta / \beta)}{\alpha \beta \backslash \delta}$$

**NAR** は **NAC** に推論規則

$$(R7) \quad \frac{\alpha \quad \alpha \backslash \beta}{\beta} \quad (R8) \quad \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

を加えることにより得られる部分構造論理である。

**NAL** は **NAR** に推論規則

$$(R9) \quad \frac{\alpha \backslash \beta}{\beta / \alpha} \quad (R10) \quad \frac{\beta / \alpha}{\alpha \backslash \beta}$$

を加えることにより得られる部分構造論理である。

Residual 公理の **変種** は次により得られる。**NAC** の定理は  $\alpha \backslash \beta$  の形の論理式に限られるので、最も外側の  $\rightarrow$  は  $\backslash$  に固定するが、他の  $\rightarrow$  は  $\backslash$  と  $/$  のいずれか、 $\alpha\beta$  は（そのまま） $\alpha\beta$  か  $\beta\alpha$  かのいずれかに置き換えることにより得られる論理式が residual 公理の変種である。以下に residual 公理の変種を列挙する。(R1) から (R16) は  $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow (\alpha\beta \rightarrow \gamma)$  の変種, (r1) から (r16) は  $(\alpha\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow [\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)]$  の変種である。

|       |                                                                                            |       |                                                                                            |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| (R1)  | $[\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)] \backslash (\alpha\beta \backslash \gamma)$ | (r1)  | $(\gamma / \alpha\beta) \backslash [\alpha \backslash (\gamma / \beta)]$                   |
| (R2)  | $[\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)] \backslash (\beta\alpha \backslash \gamma)$ | (r2)  | $(\gamma / \alpha\beta) \backslash [(\gamma / \beta) / \alpha]$                            |
| (R3)  | $[\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)] \backslash (\gamma / \alpha\beta)$          | (r3)  | $(\gamma / \alpha\beta) \backslash [\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)]$          |
| (R4)  | $[\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)] \backslash (\gamma / \beta\alpha)$          | (r4)  | $(\gamma / \alpha\beta) \backslash [(\beta \backslash \gamma) / \alpha]$                   |
| (R5)  | $[\alpha \backslash (\gamma / \beta)] \backslash (\alpha\beta \backslash \gamma)$          | (r5)  | $(\alpha\beta \backslash \gamma) \backslash [\alpha \backslash (\gamma / \beta)]$          |
| (R6)  | $[\alpha \backslash (\gamma / \beta)] \backslash (\beta\alpha \backslash \gamma)$          | (r6)  | $(\alpha\beta \backslash \gamma) \backslash [(\gamma / \beta) / \alpha]$                   |
| (R7)  | $[\alpha \backslash (\gamma / \beta)] \backslash (\gamma / \alpha\beta)$                   | (r7)  | $(\alpha\beta \backslash \gamma) \backslash [\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)]$ |
| (R8)  | $[\alpha \backslash (\gamma / \beta)] \backslash (\gamma / \beta\alpha)$                   | (r8)  | $(\alpha\beta \backslash \gamma) \backslash [(\beta \backslash \gamma) / \alpha]$          |
| (R9)  | $[(\beta \backslash \gamma) / \alpha] \backslash (\alpha\beta \backslash \gamma)$          | (r9)  | $(\gamma / \beta\alpha) \backslash [\alpha \backslash (\gamma / \beta)]$                   |
| (R10) | $[(\beta \backslash \gamma) / \alpha] \backslash (\beta\alpha \backslash \gamma)$          | (r10) | $(\gamma / \beta\alpha) \backslash [(\gamma / \beta) / \alpha]$                            |
| (R11) | $[(\beta \backslash \gamma) / \alpha] \backslash (\gamma / \alpha\beta)$                   | (r11) | $(\gamma / \beta\alpha) \backslash [\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)]$          |
| (R12) | $[(\beta \backslash \gamma) / \alpha] \backslash (\gamma / \beta\alpha)$                   | (r12) | $(\gamma / \beta\alpha) \backslash [(\beta \backslash \gamma) / \alpha]$                   |
| (R13) | $[(\gamma / \beta) / \alpha] \backslash (\alpha\beta \backslash \gamma)$                   | (r13) | $(\beta\alpha \backslash \gamma) \backslash [\alpha \backslash (\gamma / \beta)]$          |
| (R14) | $[(\gamma / \beta) / \alpha] \backslash (\beta\alpha \backslash \gamma)$                   | (r14) | $(\beta\alpha \backslash \gamma) \backslash [(\gamma / \beta) / \alpha]$                   |
| (R15) | $[(\gamma / \beta) / \alpha] \backslash (\gamma / \alpha\beta)$                            | (r15) | $(\beta\alpha \backslash \gamma) \backslash [\alpha \backslash (\beta \backslash \gamma)]$ |
| (R16) | $[(\gamma / \beta) / \alpha] \backslash (\gamma / \beta\alpha)$                            | (r16) | $(\beta\alpha \backslash \gamma) \backslash [(\beta \backslash \gamma) / \alpha]$          |

以下、**L** を **NAC**, **NAR**, **NAL** のいずれかとする。**L** に公理の集合  $X$  を加えることにより得られる論理を **L** +  $X$  により表す。

**定理 1**  $n = 1, \dots, 16$  に対し、**L** +  $\{(Rn)\} = \mathbf{L} + \{(rn)\}$ .

**定理 1** より、residual 公理は  $(Rn)$  の方だけを考えれば十分であることが分かる。以下、**L** +  $\{(Rn_1), \dots, (Rn_k)\}$  を **L**( $n_1, \dots, n_k$ ) と書く。

**定理 2** **L**(4) = **L**(11) = **L**(4, 11), **L**(6) = **L**(13) = **L**(6, 13).

$\beta \backslash \alpha$  を  $\alpha \backslash \beta$  の **逆** という。先の residual 公理の変種の一覧から次が分かる。

**定理 3** 各  $(Rn)$  について、この逆である  $(rm)$  が存在する。

### 3 強 residual な論理

強 residual 公理の **変種** は以下のように列挙される。

|                                                                                                    |                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (SR1) $[\alpha \setminus (\beta \setminus \gamma)] \leftrightarrow (\alpha\beta \setminus \gamma)$ | (SR2) $[\alpha \setminus (\beta \setminus \gamma)] \leftrightarrow (\beta\alpha \setminus \gamma)$ |
| (SR3) $[\alpha \setminus (\beta \setminus \gamma)] \leftrightarrow (\gamma / \alpha\beta)$         | (SR4) $[\alpha \setminus (\beta \setminus \gamma)] \leftrightarrow (\gamma / \beta\alpha)$         |
| (SR5) $[\alpha \setminus (\gamma / \beta)] \leftrightarrow (\alpha\beta \setminus \gamma)$         | (SR6) $[\alpha \setminus (\gamma / \beta)] \leftrightarrow (\beta\alpha \setminus \gamma)$         |
| (SR7) $[\alpha \setminus (\gamma / \beta)] \leftrightarrow (\gamma / \alpha\beta)$                 | (SR8) $[\alpha \setminus (\gamma / \beta)] \leftrightarrow (\gamma / \beta\alpha)$                 |
| (SR9) $[(\beta \setminus \gamma) / \alpha] \leftrightarrow (\alpha\beta \setminus \gamma)$         | (SR10) $[(\beta \setminus \gamma) / \alpha] \leftrightarrow (\beta\alpha \setminus \gamma)$        |
| (SR11) $[(\beta \setminus \gamma) / \alpha] \leftrightarrow (\gamma / \alpha\beta)$                | (SR12) $[(\beta \setminus \gamma) / \alpha] \leftrightarrow (\gamma / \beta\alpha)$                |
| (SR13) $[(\gamma / \beta) / \alpha] \leftrightarrow (\alpha\beta \setminus \gamma)$                | (SR14) $[(\gamma / \beta) / \alpha] \leftrightarrow (\beta\alpha \setminus \gamma)$                |
| (SR15) $[(\gamma / \beta) / \alpha] \leftrightarrow (\gamma / \alpha\beta)$                        | (SR16) $[(\gamma / \beta) / \alpha] \leftrightarrow (\gamma / \beta\alpha)$                        |

**定理 1** から,  $(Rn)$  の逆が  $(rm)$  であるとき,  $\mathbf{L}(n, m)$  は強 residual 公理の変種  $(SRn)$  と  $(SRm)$  を定理に持つことが分かる。これと **定理 3** から, 次が分かる。

#### 定理 4

- (a)  $\mathbf{L} + \{(SR1)\} = \mathbf{L} + \{(SR7)\} = \mathbf{L}(1, 7),$
- (b)  $\mathbf{L} + \{(SR2)\} = \mathbf{L} + \{(SR15)\} = \mathbf{L}(2, 15),$
- (c)  $\mathbf{L} + \{(SR3)\} = \mathbf{L}(3),$
- (d)  $\mathbf{L} + \{(SR4)\} = \mathbf{L} + \{(SR11)\} = \mathbf{L}(4, 11),$
- (e)  $\mathbf{L} + \{(SR5)\} = \mathbf{L}(5),$
- (f)  $\mathbf{L} + \{(SR6)\} = \mathbf{L} + \{(SR13)\} = \mathbf{L}(6, 13),$
- (g)  $\mathbf{L} + \{(SR8)\} = \mathbf{L} + \{(SR9)\} = \mathbf{L}(8, 9),$
- (h)  $\mathbf{L} + \{(SR10)\} = \mathbf{L} + \{(SR16)\} = \mathbf{L}(10, 16),$
- (i)  $\mathbf{L} + \{(SR12)\} = \mathbf{L}(12),$
- (j)  $\mathbf{L} + \{(SR14)\} = \mathbf{L}(14).$

**定理 4** より, 強 residual 公理  $(SR1)$  から  $(SR16)$  は, **定理 4** の番号 (a) から (j) に対応させて  $(SRa)$  から  $(SRj)$  に再整理する。例えば,  $(SR1)$  は  $(SRa)$ ,  $(SR11)$  は  $(SRd)$  に, それぞれ整理される。

以下,  $l_1, \dots, l_k \in \{a, \dots, j\}$  のとき,  $\mathbf{L} + \{(SRl_1), (SRl_2), \dots, (SRl_k)\}$  を  $\mathbf{L}[l_1 l_2 \dots l_k]$  と書く。特に,  $\mathbf{L}$  に  $(SRa)$  から  $(SRj)$  のすべてを公理として加えた論理は  $\mathbf{L}[abcdefghij]$  と書かれるべきであるが, 簡単に  $\mathbf{L}[a-j]$  と書く。

**NAC** に強 residual 公理を加えた論理の中には, 明示的に加えていない強 residual 公理が定理になる場合もある。この状況は以下により整理される。

**定理 5**

- (1)  $\mathbf{L}[ab] = \mathbf{L}[abi]$ ,
- (2)  $\mathbf{L}[ag] = \mathbf{L}[agj]$ ,
- (3)  $\mathbf{L}[ah] = \mathbf{L}[adfh]$ ,
- (4)  $\mathbf{L}[bg] = \mathbf{L}[bdfg]$ ,
- (5)  $\mathbf{L}[bh] = \mathbf{L}[beh]$ ,
- (6)  $\mathbf{L}[gh] = \mathbf{L}[cgh]$ .

まず、**NAC** をベースとした場合に、**定理 5** の状況等を勘案して、定理となる強 residual 公理をすべて明示した形（例えば、**NAC**[ab] は公理 (SRa), (SRb) 以外にも (SRi) も定理となるので **NAC**[abi] と書かれる）で整理すると、次のようになる。

**定理 6** **NAC** と **NAC**[a-j] の間には以下の論理がある。

**NAC**[a], **NAC**[b], **NAC**[c], **NAC**[d], **NAC**[e], **NAC**[f], **NAC**[g], **NAC**[h], **NAC**[i], **NAC**[j], **NAC**[abi], **NAC**[ace], **NAC**[adfh], **NAC**[agj], **NAC**[bcj], **NAC**[bdfg], **NAC**[beh], **NAC**[cdefij], **NAC**[cdei], **NAC**[cdfi], **NAC**[cdi], **NAC**[cdij], **NAC**[ce], **NAC**[cefj], **NAC**[cf], **NAC**[cgh], **NAC**[cj], **NAC**[de], **NAC**[defj], **NAC**[df], **NAC**[dj], **NAC**[efij], **NAC**[efj], **NAC**[egi], **NAC**[ei], **NAC**[fi], **NAC**[hij], **NAC**[ij].

次に、**NAR** をベースとした場合を考える。このとき、 $\alpha \setminus [\alpha(\beta \setminus \beta)]$  が定理になる（なお、これは **NAC** の定理ではない）ので、 $\alpha\beta \setminus \beta\alpha$  が定理となる論理が存在する。このような論理は **可換** であるという。

**定理 7** **NAR**[a], **NAR**[d], **NAR**[f], **NAR**[g], **NAR**[i], **NAR**[j] は可換である。また、これらよりも強い論理はすべて **NAR**[a-j] と等しい。

**定理 6** と **定理 7** から、次が分かる。

**定理 8** **NAR** と **NAR**[a-j] の間にある論理は **NAR**[b], **NAR**[c], **NAR**[e], **NAR**[h], **NAR**[beh], **NAR**[ce] である。

最後に、**NAL** をベースとした場合を考える。このとき、 $\alpha \setminus [(\beta/\beta)\alpha]$  が定理になる（なお、これは **NAR** の定理ではない）ので、可換である論理はさらに増える。

**定理 9** **NAL**[a], **NAL**[c], **NAL**[d], **NAL**[e], **NAL**[f], **NAL**[g], **NAL**[h], **NAL**[i], **NAL**[j] は可換である。また、これらよりも強い論理はすべて **NAL**[a-j] と等しい。

**定理 6** と **定理 9** から、次が分かる。

**定理 10**  $\mathbf{NAL}$  と  $\mathbf{NAL}[a-j]$  の間にある論理は  $\mathbf{NAL}[b]$  だけである。

では, (SRb) は何者なのか? これに対する答えは次により示される。

**定理 11**  $\mathbf{L}[b]$  を含む論理は結合的である。つまり, このような論理では  $\alpha(\beta\gamma) \leftrightarrow (\alpha\beta)\gamma$  が定理である。

本稿では residual 公理および強 residual 公理の変種について,  $\mathbf{NAC}$ ,  $\mathbf{NAR}$ ,  $\mathbf{NAL}$  における階層構造を整理した。詳細な証明および関連する話題については, 別稿にて報告する予定である。

## 参考文献

- [1] Bimbó, K., *Proof Theory : Sequent Calculi and Related Formalisms*, Chapman & Hall, 2014.
- [2] Brady, R. T., ‘The Gentzenization and decidability of RW’, *Journal of Philosophical Logic* 19: 35–73, 1990.
- [3] Cintula, P. and C. Noguera, *Logic and Implication: An Introduction to the General Algebraic Study of Non-classical Logics*, Trends in Logic 57, Springer, 2021.
- [4] Galatos, N., P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Elsevier, 2007.
- [5] Galatos, N. and H. Ono, ‘Cut elimination and strong separation for substructural logics: An algebraic approach’, *Annals of Pure and Applied Logic* 161:1097–1133, 2010.
- [6] Ono, H., *Proof Theory and Algebra in Logic*, Springer, 2019.
- [7] Paoli, F., *Substructural Logics: A Primer*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [8] Restall, G., *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, 2000.
- [9] Schroeder-Heister, P. and K. Došen (ed.), *Substructural Logics*, Oxford University Press, 1993.
- [10] Seki, T., ‘Metacompleteness of substructural logics’, *Studia Logica* 100: 1175–1199, 2012.
- [11] Seki, T., ‘Variations of axioms K and S in substructural logics’, In: Sano, K., R. Hatano, H. Ono (ed.) *Exploring Negation, Modality and Proof*, 209–228. Springer, 2026.