

数理モデルによるバーチャル物理リザーバー計算

金沢大学・数物科学系 野津裕史

Hirofumi Notsu

Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University

1 はじめに

リザーバーコンピューティング (Reservoir Computing) は、高次元力学系が示す入力応答ダイナミクスを情報処理に活用する計算フレームワークである [5, 8, 10]。この観点から、物理システムは強力な計算資源として捉えることができる。本研究では、こうしたシステムが本来的に備える情報処理能力に着目し、物理リザーバーコンピューティングのための2つのバーチャルな設定を紹介する。

リザーバーコンピューティング (Reservoir Computing) は、高次元力学系が示す入力応答ダイナミクスを情報処理に活用する計算フレームワークである [5, 8, 10]。この枠組みでは、システム内部の複雑な時空間ダイナミクスをリザーバーとして利用し、学習を主として出力層に限定することで効率的な情報処理を実現する。この観点から、流体、振動子ネットワーク、電子回路などの物理システムは、強力な計算資源として捉えることができる。

近年、このような物理システムを利用した物理リザーバーコンピューティングが活発に研究されており、多様な物理現象に潜在する計算能力が明らかになりつつある。本研究では、こうしたシステムが本来的に備える情報処理能力に着目し、実験装置に依存しない二つのバーチャルな物理リザーバーを紹介する。具体的には、円柱周り流れと強制項付き蔵本モデルを対象として、その情報処理能力と力学的特性との関係について議論する。

2 円柱周り流れを用いたリザーバー計算 ([4] を参照)

1つ目は、2次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式に支配される円柱周り流れである [4]。流体の速度場 $\mathbf{v}$ および圧力 p は、式 (1) に示す非圧縮 Navier-Stokes 方程式と適切な境界条件によって記述される。ここで、 Re はレイノルズ数、 $\sigma(\mathbf{v}, p)$ は応力テンソル、 $D(\mathbf{v})$ はひずみ速度テンソルを表す。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{v}, p) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \times (0, T_f), \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T_f), \quad (1b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_* \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T_f), \quad (1c)$$

$$[\sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}^\perp = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T_f), \quad (1d)$$

$$\sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T_f), \quad (1e)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_4 \times (0, T_f), \quad (1f)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 \quad \text{in } \Omega, \quad \text{at } t = 0, \quad (1g)$$

ここで、 Ω は計算領域、 $(0, T_f)$ は時間区間を表す。 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top: \Omega \times (0, T_f) \rightarrow \mathbb{R}^2$ および p はそれぞれ速度場と圧力である。また、 $\sigma(\mathbf{v}, p) = (2/\text{Re})D(\mathbf{v}) - pI: \Omega \times (0, T_f) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は応力テンソル、 $D(\mathbf{v}) = (1/2)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top): \Omega \times (0, T_f) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ はひずみ速度テンソルを表す。さらに、 I は単位テンソル、 $\mathbf{n}$ および $\mathbf{n}^\perp$ はそれぞれ境界上の外向き単位法線ベクトルと単位接線ベクトルである。流入境界 Γ_1 上には、与えられた流入速度 $\mathbf{u}_*$ を課す。

具体的な Ω として、

$$\Omega = (-7.5, 22.5) \times (-7.5, 7.5) \setminus \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 0.5\}$$

を考え、流入境界速度として $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_*(t) = (u(t), 0)^\top$ を与える。ここで、 $u(t) \in \mathbb{R}$ は入力信号であり、一定時間ごとにランダムな値へ更新され、その値域は $[0.99, 1.01]$ とする。すなわち、 $u(t) = 1 + \delta u(t)$, $\delta u(t) \in [-0.01, 0.01]$ である。

リザーバー状態には、円柱後流に配置した、 $\bar{\Omega}$ 内の $N := 77$ 点からなる Ω_R :

$$\Omega_R = \{P^1, \dots, P^{77}\} = \{P = (P_1, P_2)^\top \in \bar{\Omega}; P_1 = i + 0.5, i \in \{1, \dots, 10\}, P_2 = j, j \in \{-3, \dots, 3\}\}$$

の速度および圧力の値を用いる。レイノルズ数を変化させて情報処理能力を評価した結果、 $\text{Re} = 45$ 付近において最も高い計算性能が得られた。この条件は、カルマン渦列の発生直前に現れる双子渦状態に対応しており、流れが秩序状態から周期的渦放出状態へ移行する境界近傍で高い情報処理能力が現れることを示唆している。

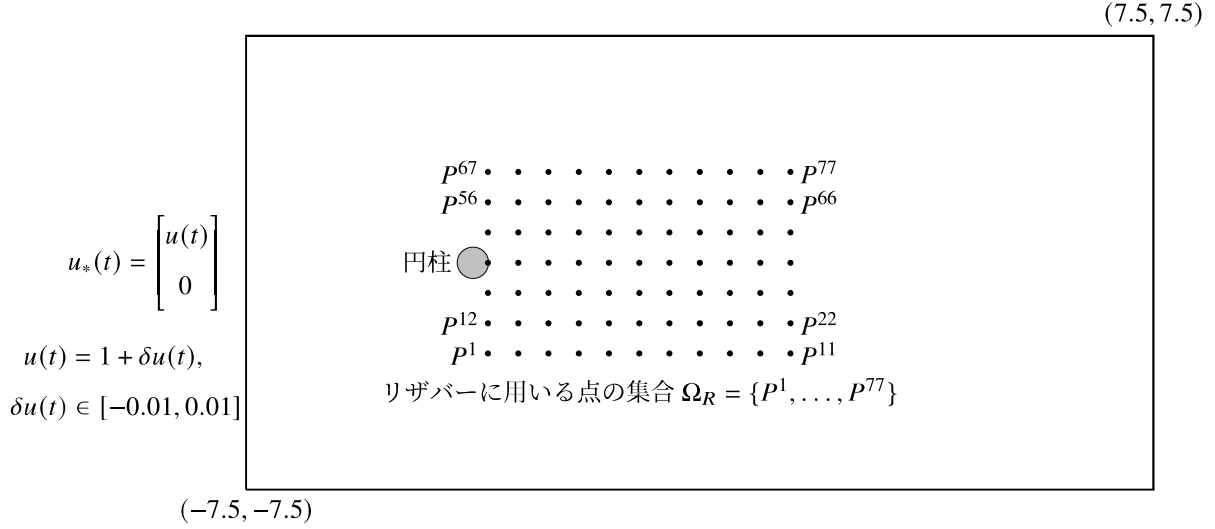


図1 円柱まわりの流れを用いたリザーバー計算：計算領域 Ω , 入力 $u(t)$, リザーバーのデータ取得点 Ω_R .

3 リザーバーとしての蔵本モデル ([3] を参照)

2つ目は、位相同期現象を記述する代表的な蔵本モデル [6] を用いたリザーバーである [3]。ここでは特に、外部入力への同期を表す強制項を含む蔵本モデル [1, 2, 12] を考える。 $M \in \mathbb{N}$ とし、 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t)) \in \mathbb{R}^M$ を入力とする。このとき、強制項付き蔵本モデルは、

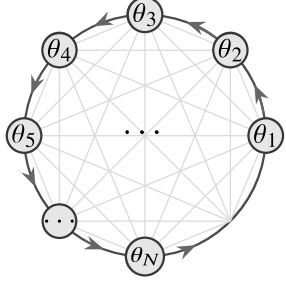
$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k + \underbrace{\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [\sin(\theta_j - \theta_k)]}_{\text{カップリング項}} + \underbrace{F \sin(cu_{v_k} - \theta_k)}_{\text{強化項}}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

で与えられる。ここで、 $\theta_k = \theta_k(t) \in \mathbb{S} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ は第 k 振動子の位相、 ω_k はその固有角振動数を表す。 ω_k は、平均 1、標準偏差 1 の正規分布 N に 2π を掛けた分布 $2\pi N$ からサンプリングされる。パラメータ $K, F \geq 0$ は、それぞれ結合強度および強制強度を表す。また、 v_k は集合 $\{1, 2, \dots, M\}$ から一様にサンプリングされ、各振動子が入力ベクトルのどの成分を受け取るかを指定する。さらに、 c は入力スケーリング定数である。

リザーバーは入力に対する非線形応答を通じて、入力情報の処理および記憶を担う。本研究では、カオスアトラクタ上の軌道を予測するパターン予測問題を対象とする。カオスアトラクタ上の軌道は、有界で決定論的でありながら長期的には予測困難な運動として特徴付けられる [7]。

カオスアトラクタは支配方程式に内在する幾何学的構造から生じ、その複雑さを定量的に評価できる。そのため、学習や予測の性能を評価するための有用なベンチマークとなる。さらに、振動現象と同様に、カオスダイナミクスは自然界に広く見られる普遍的な現象である [11]。

本研究では、リザーバー計算の枠組みを用いて蔵本モデルの計算能力を活用することを考える [5, 10]。一般に、リザーバーは多数の非線形ノードから構成される結合ネットワークとして表現される。リザーバー計算は、ニューロモルフィックデバイスと総称される神経回路模倣型ハードウェアを実現するための代表的な計算フレームワークの一つである [9, 10, 13]。ここで、リザーバーは入力によって駆動される強制項をもつ結合蔵本振動子系によって構成される。学習後には、外部入力を出力から構成されるフィードバックループで置き換えることで、系を入力から切り離し、ネットワークが自律的にアトラクタを再現できるようにする。この入力から切り離された系は、一般に、“閉じた系 (closed system)” と呼ばれる。結果として、自己持続的な同期が達成される場合には、閉じた系がアトラクタのダイナミクスを良好に再現できることが分かった。また、ハイパーパラメータである F と K の組合せは比較的広い範囲にわたって存在することも確認された [3]。



- $\theta(t) := (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))^T \in \mathbb{S}^N$: リザーバー,
- $f: \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$, $f(\theta) := (1, \sin \theta, \sin^2 \theta)^T$,
- $W_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{M \times (2N+1)}$: 読み出し重み行列,
- $y(t)$: ターゲット, $\hat{y}(t)$: ターゲットの近似,
- $y(t) \approx \hat{y}(t) = W_{\text{out}} f(\theta) \in \mathbb{R}^M$.

図2 蔵本モデルを用いたリザーバー計算 (open system).

4 結び

本稿では、数理モデルに基づく二つのバーチャルな物理リザーバーコンピューティングの実現例を紹介した。円柱周り流れと蔵本モデルという異なる力学系を対象としたにもかかわらず、いずれもそのダイナミクスが情報処理資源として利用可能であることが示されている。これらの事例は、物理システムの情報処理能力が個々の物理現象に固有のものではなく、多様な力学系に共通して現れる可能性を示唆している。今後は、さらに幅広い数理モデルを対象として物理リザーバーの設計原理や性能評価を進めることにより、物理システムの計算能力に関する理解が一層深まることが期待される。

謝辞：本研究は、JST-CREST, JPMJCR2014 の支援を受けた。

参考文献

- [1] T.M. Antonsen, R.T. Faghih, M. Girvan, E. Ott, and J. Platig. External periodic driving of large systems of globally coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(3), 2008.
- [2] L.M. Childs and S.H. Strogatz. Stability diagram for the forced kuramoto model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(4):043128, 2008.
- [3] T.G. de Jong, H. Notsu, and K. Nakajima. Harnessing omnipresent oscillator networks as computational resource. arXiv:2502.04818[cs.LG].
- [4] K. Goto, K. Nakajima, and H. Notsu. Twin vortex computer in fluid flow. *New Journal of Physics*, 23:063051, 2021.
- [5] H. Jaeger and H. Haas. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication. *Science*, 304(5667):78–80, 2004.
- [6] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics: January 23–29, 1975, Kyoto University, Kyoto/Japan*, pages 420–422. Springer, 1975.

- [7] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [8] W. Maass, T. Natschläger, and H. Markram. Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations. *Neural Computation*, 14(11):2531–2560, 2002.
- [9] K. Nakajima. Reservoir computing: Theory, physical implementations, and applications. *IEICE Technical Report; IEICE Tech. Rep.*, 118(220):149–154, 2018.
- [10] K. Nakajima. Physical reservoir computing: an introductory perspective. *Japanese Journal of Applied Physics*, 59(6):060501, 2020.
- [11] H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, and M.J. Feigenbaum. *Chaos and fractals: new frontiers of science*, volume 106. Springer, 2004.
- [12] H. Sakaguchi. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields. *Progress of theoretical physics*, 79(1):39–46, 1988.
- [13] G. Tanaka, T. Yamane, J.B. Héroux, R. Nakane, N. Kanazawa, S. Takeda, H. Numata, D. Nakano, and A. Hirose. Recent advances in physical reservoir computing: A review. *Neural Networks*, 115:100–123, 2019.