

# Navier-Stokes 方程式による渦伸長と拡散モデルにおける情報散逸：偏微分方程式的視座からの再定式化

一橋大学・大学院経済学研究科 \* 米田 剛

Tsuyoshi Yoneda

Graduate School of Economics

Hitotsubashi University

## 1 概要：拡散モデルに基づく Navier–Stokes 流の渦力学

三次元乱流における渦の生成および消滅は，流体力学における最も基本的な過程の一つである。古典的な渦伸長理論によれば，渦度は局所的なひずみ場との相互作用によって増幅される一方，粘性拡散によって空間的に広がり，平滑化される。このような順時間方向の渦力学は比較的良好に理解されてきた。しかし，整然とした渦管構造が，どのような渦度分布を起点として形成されるのかという**逆問題**については，いまだ十分な理解が得られていない。

その主因は，粘性を含む Navier–Stokes 方程式が本質的に不可逆であり，時間発展に伴って初期渦度分布に関する情報が散逸するためである。したがって，方程式を単純に逆時間方向へ積分しても，元の渦度分布を再構成することはできない。

近年，機械学習の分野においてスコアベース拡散モデルが急速に発展しており，そのモデルにおいては，順時間ダイナミクスに対応する逆問題がうまく定式化されている。特に注目すべき点は，拡散モデルを支配する順時間の Fokker–Planck 方程式が，係数の違いを除けば，Burgers 渦管を記述する渦度方程式と数学的に同一であることである。

この構造的同一性は，**渦力学と拡散モデルによる生成過程とを直接結びつける理論的な橋渡し**を与える。本研究ではこの対応関係を積極的に利用し，Navier–Stokes 流における渦形成過程を理解するための新たな理論的枠組みを，拡散モデルの視点から構築する。

この枠組みにおいて，ひずみ場は単に順時間方向における渦管の増幅や細化を決定する

だけではない。時間発展の後に観測されるコヒーレントな渦構造から、初期の渦度分布をどの程度まで再構成できるのか、すなわち**逆問題としての可逆性の度合い**もまた、ひずみ場によって規定される。本研究は、この視点から次の二つの基本的な問いを提起する。

1. 渦力学を逆時間方向に見たとき、どのようなひずみ場が初期渦度分布に関する情報を最も多く保持（或いは消失）するのか。
2. 与えられたひずみ場に付随する「情報散逸率」をどのように定量化できるか。またそれは、乱流中の渦構造の組織化について何を示唆するのか。

これらの問いに答えるための第一歩として、本研究では

軸対称 Navier-Stokes 流において、バーガーズ型ひずみ場で伸長される渦を時間逆方向に引き戻し、元の渦分布がどの程度再構成できるのか

を洞察する。これらの結果は**渦力学に対する新しい情報理論的視点を提供し、古典的渦伸長理論を、現代的拡散モデルに着想を得た可逆的枠組みへと拡張する。**

**Remark.** 本講究録に対応する講演発表では「現代 AI の根幹を成す誤差逆伝播法」を用いないリザーバーに基づく新たな勾配降下法を提案し、その新しい学習スキームの優れている点をアピールした。この *Remark* でその内容を簡単にまとめておきたい。

ライブラリ（たとえば *TensorFlow* や *PyTorch*）は基本的に誤差逆伝播法に依存しており、その中核アルゴリズムをユーザーレベルで変更することは非常に困難である。私自身は数学を起点とするモデル設計のアプローチを取っており、*learnable parameters* のスリム化・効率化につながっている。そのことを示唆する機械学習結果も講演発表時に紹介した（そのソースコードはすでに一般公開されている [4]）。講演発表時には省略したが、

データ駆動型フィルター [1] によるスケール分解

を時系列データ予測に採用している。さて、そのように機械学習の研究を進めている私が拡散モデルに現在注力しているのは偶然ではない。実は、フィルタリングによるスケール分解はその拡散モデルと双対関係にあるのではないか、というのが拡散モデル研究の出発点になっている。

- フィルタリングによる予測：データからノイズを抑えて、潜在的な決定的構造を抽出し学習する
- 拡散モデル：データをノイズ化し、ノイズから少しずつ元に戻す過程を学習する

という大枠を対比することで、その双対関係が認識されることであろう。本講究録では、その拡散モデルの研究（進行中）を簡潔に紹介したいと考え至った。

## 2 偏微分方程式論に基づいた「拡散モデル」の再定式化

本章では、確率論的概念を最小限におさえつつ、偏微分方程式的視座から拡散モデルを再定式化する。

### 2.1 粘性を含む軸対称渦度方程式

与えられた定常な軸対称速度場  $U_r = U_r(r, z)$ ,  $U_z = U_z(r, z)$  が以下の divergence-free を満たすものとする（時間発展版も考えることができるがここでは省略）：

$$\frac{1}{r} \partial_r (r U_r) + \partial_z U_z = 0.$$

すると、粘性を含む軸対称渦度方程式の  $z$  成分  $\omega_z$  は次のように表現される：

$$\partial_t \omega_z + U_r \partial_r \omega_z + U_z \partial_z \omega_z = \omega_z \partial_z U_z + \omega_r \partial_r U_z + \nu \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 \right) \omega_z. \quad (1)$$

上の渦度方程式を以下の反応項と外力項付き 2 次元 Fokker–Planck 方程式に書き換える：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, z) \rho) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z(r, z) \rho) + \nu \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) + S(r, z) \rho + F(r, z). \quad (2)$$

式 (1) と (2) を比較すると、

$$\rho = \omega_z, \quad B_r = U_r - \frac{\nu}{r}, \quad B_z = U_z, \quad S = \partial_r B_r + 2\partial_z B_z + \frac{\nu}{r^2}, \quad F = \omega_r \partial_r U_z$$

となる。バーガーズ型ひずみ場の場合、 $U_r = -ar$ ,  $U_z = 2az$  ( $a > 0$ ),  $F = 0$  となる。

### 2.2 時間逆方向 PDE の導出

ここで  $f = (B_r, B_z)$ ,  $x = (x_1, x_2) = (r, z)$  とする。実装の記号に合わせるため  $\nu = \frac{\sigma^2}{2}$  と置く。ここでは簡単のため外力ゼロ： $F = 0$  の場合を考える。このとき  $\rho(t, x)$  は

$$\partial_t \rho(t, x) = -\nabla_x \cdot (f(x) \rho(t, x)) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_x \rho(t, x) + S(x) \rho(t, x), \quad t > 0 \quad (3)$$

を満たす。この方程式を時間反転させて、逆向きの「時間」に対する PDE を導く素直な計算によって逆問題を定式化した場合はどうなるか。その場合は、逆向きラプラシアンを

ダイレクトに含むことになるので明らかに ill-posed となる。逆問題を適切に定式化するための突破口は、その逆ラプラシアンをドリフト項に書き換えるところにある。まず固定された終端時刻  $T > 0$  を取り、

$$\tau = T - t, \quad \rho^*(\tau, x) := \rho(T - \tau, x)$$

と定めよう。すると

$$\partial_\tau \rho^*(\tau, x) = -\partial_t \rho(t, x)|_{t=T-\tau}$$

なので、(3) を用いると

$$\begin{aligned} \partial_\tau \rho^*(\tau, x) &= -\left(-\nabla_x \cdot (f(x) \rho(t, x)) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_x \rho(t, x) + S(x) \rho(t, x)\right)_{t=T-\tau} \\ &= \nabla_x \cdot (f(x) \rho^*(\tau, x)) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta_x \rho^*(\tau, x) + S(x) \rho^*(\tau, x) \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。一方で、逆向き時間  $\tau$  においてドリフト  $\tilde{b}(\tau, x)$  を持つ非粘性方程式は

$$\partial_\tau \rho^*(\tau, x) = -\nabla_x \cdot (\tilde{b}(\tau, x) \rho^*(\tau, x)) + S(x) \rho^*(\tau, x) \quad (5)$$

という表現になる。(4) と (5) は、どちらも同じ  $\rho^*(\tau, x)$  に対する PDE であるはずなので、右辺が一致しなければならない。すなわち

$$\nabla_x \cdot (f \rho^*) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta_x \rho^* = -\nabla_x \cdot (\tilde{b} \rho^*) \quad (6)$$

となる。ここで、左辺を  $\nabla_x \cdot (\dots)$  の形に書きたい。標準的な計算により

$$\tilde{b} \rho^* = -f \rho^* + \frac{\sigma^2}{2} \nabla_x \rho^*$$

とおくと、(6) を満たすことがわかる。したがって  $\rho^*(\tau, x) > 0$  の領域では以下のように表現される：

$$\tilde{b}(\rho_0, t, x) = -f(x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\nabla_x \rho^*(t, x)}{\rho^*(t, x)} = -f(x) + \frac{\sigma^2}{2} \nabla_x \log \rho^*(t, x). \quad (7)$$

これが逆時間ラプラシアンから得られるドリフト項であり、初期関数  $\rho_0$  に依存する点に注意する。 $\nabla_x \log \rho^*(t, x)$  は（時間逆向きの）スコア関数と呼ばれる。PDE としては

$$\partial_\tau \rho^* = -\nabla \cdot (\tilde{b} \rho^*) + S \rho^*$$

と表現されるので、これらをまとめると、結局は以下の PDE を解くことに帰着される：

$$\partial_\tau(\rho^* \circ \Phi) = \left( -\nabla \cdot \tilde{b} + S \right) (\rho^* \circ \Phi), \quad (8)$$

$$\partial_\tau \Phi = \tilde{b} \circ \Phi. \quad (9)$$

ドリフト項  $\tilde{b}$  は  $\rho_0$  に依存しているので、初期値依存の関数族となっている点に注意する。要は、理論的には、与えられた終端時刻の関数  $\rho(T, \cdot)$  に対応する初期関数  $\rho_0$  が存在するか否かを考えないといけないが、これは難しい問題である。そのような非自明問題に正面から取り組むのではなく、機械学習を援用することが突破口となる。要は、各変数  $x, t$  に対して、その初期値依存の関数族の中から適切な関数が機械学習によって選出されるのである。

**Remark.** 繰り返しになるが、決定論的に式変形すると、

$$\begin{aligned} \partial_\tau(\rho^* \circ \Phi) &= \left( -\frac{\sigma^2}{2} \Delta + \nabla \cdot f + S \right) (\rho^* \circ \Phi), \\ \partial_\tau \Phi &= -f \circ \Phi. \end{aligned}$$

という PDE になり、逆ラプラシアンが含まれることとなる。よってこれは *ill-posed* であり、数学的には意味を成さない。

### 2.3 熱方程式の解の離散ラグランジュ流表現によるスコア関数の再表現

まずは簡単のため、熱方程式から生成されるスコア関数および離散ラグランジュ流表現を見てみよう。具体的な PDE 解析手法としては極めて標準的なもののみを用いている。要は、拡散項を熱核により表現し、放物型スケーリングに基づいて時間パラメータ  $t$  のオーダーを評価する、という手法である。 $\mathbb{R}^2$  上の熱方程式は以下のように表現される：

$$\partial_t \rho(t, x) = \nu \Delta_x \rho(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^2.$$

基本解は

$$G(t, x) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\nu t}\right)$$

で与えられ、これは初期値がディラックデルタの場合の解とみなせる。さて、離散ラグランジュ流を考える際は、このディラックデルタが初期値の場合における時刻  $\Delta t$  の解を考えるだけで十分である。要は、初期時刻に位置  $x$  にある流体粒子が時刻  $\Delta t$  に具体的にど

の位置  $\tilde{x}$  に移っているかを推定したいのだが、それは次の確率密度（熱方程式の解  $\rho$ ）で表現される：

$$\rho(\Delta t, \tilde{x}) = \frac{1}{(4\pi\nu\Delta t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|\tilde{x} - x|^2}{4\nu\Delta t}\right).$$

これは以下のように離散ラグランジュ流の表記に自然に書き換えることができる：

$$\tilde{x} = x + \sqrt{2\nu\Delta t}\varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I),$$

$\varepsilon$  はガウスノイズである。これにより、離散ラグランジュ流における（ $2\nu$  でスケールされた） $\tilde{b}$  は

$$2\nu\tilde{b}(x, \tilde{x}) = \frac{x - \tilde{x}}{\Delta t} = 2\nu\nabla_{\tilde{x}} \log \rho(\Delta t, \tilde{x}) = -\sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}\varepsilon$$

と表現される。 $\tilde{b}(x, \tilde{x})$  は、 $x$  を目標位置として固定したとき、 $\Delta t$  後の位置  $\tilde{x}$  から最も確率の高い前時刻位置  $x$  へ引き戻す際の逆時間ラグランジュ速度となる。二つ目の等式

$$2\nu\nabla_{\tilde{x}} \log \rho(\Delta t, \tilde{x}) = -\sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}\varepsilon$$

は、順時間方向の粒子の軌道に現れるガウスノイズと、その集団が誘導する（逆時間における）確率密度の最尤勾配とを、同一のガウス遷移に基づくものとしてあえて等号で結んだ（ $PDE$  的視座から再定式化する際、最も重要となる橋渡し）。また、ここから

$$\nabla_{\tilde{x}} \cdot \tilde{b}(x, \tilde{x}) = -\frac{2}{\Delta t}$$

も得られる（連続極限  $\Delta t \rightarrow 0$  で無限大に発散する点に注意する）。熱方程式の逆時間過程は連続極限では ill-posed であるが、時間を離散化することで逆向き力学が明示的に現れる。したがって離散化は単なる数値的近似ではなく、逆課程を可視化するための本質的操作だと言える。しかしながら、この  $\tilde{b}$  を（形式的に  $\Delta t \rightarrow 0$  として）そのままラグランジュ流で表現すると

$$\partial_\tau \Phi = \tilde{b}(x, \cdot) \circ \Phi$$

となってしまう。要は、逆時間方向における行先を表す  $x$  が変数に入ってきてしまっており、このままでは意味をなさない。この問題を克服するために機械学習が用いられるのである。いずれにしても、次節ではこの一連の計算を、移流項と反応項が入った方程式へと拡張する。

## 2.4 反応項付き Fokker–Planck Equation の解の離散ラグランジュ流表現 およびスコア関数の表現

$p(t, x, y)$  を、次の 反応項付き Fokker–Planck 方程式の基本解とする（ここでは簡単のため 1 次元で考えるが多次元でも同様である）：

$$\begin{cases} \partial_t p(t, x, y) = -\partial_y(b(y)p(t, x, y)) + \frac{1}{2}\partial_y^2(a(y)p(t, x, y)) + S(y)p(t, x, y), \\ p(0, x, y) = \delta(y - x). \end{cases} \quad (10)$$

ここで  $x$  は初期点を表す空間パラメータであり、未知関数は  $y$  に関する関数としての  $p$  である。本節では、放物型方程式の基本解の短時間挙動に対する標準的な解析手法としての

「弱形式を介した半群表現に対する時間方向のテイラー展開」

を用いる。そのことによって、真の基本解とガウス核が同一の一次短時間展開を持つことが正当化される。(10) にテスト関数  $\varphi(y)$  を掛けて  $y$  について部分積分を行うと、

$$\frac{d}{dt} \int p(t, x, y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) \left( b(y) \varphi'(y) + \frac{1}{2} a(y) \varphi''(y) + S(y) \varphi(y) \right) dy \quad (11)$$

が得られる。右辺に現れる微分作用素を

$$(L\varphi)(y) := b(y) \varphi'(y) + \frac{1}{2} a(y) \varphi''(y) + S(y) \varphi(y)$$

と定義する。初期条件より

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(y - x) \varphi(y) dy = \varphi(x),$$

（この積分は超関数の意味である）また (11) を  $t = 0$  で評価すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int p(t, x, y) \varphi(y) dy \Big|_{t=0} &= \int_{\mathbb{R}} \delta(y - x) (L\varphi)(y) dy \\ &= (L\varphi)(x) = b(x) \varphi'(x) + \frac{1}{2} a(x) \varphi''(x) + S(x) \varphi(x) \end{aligned}$$

となる。したがって変数  $t$  に対する  $t = 0$  におけるテイラー展開より、

$$\int_{\mathbb{R}} p(\Delta t, x, y) \varphi(y) dy = \varphi(x) + \Delta t \left( b(x) \varphi'(x) + \frac{1}{2} a(x) \varphi''(x) + S(x) \varphi(x) \right) + o(\Delta t) \quad (12)$$

が得られる。次に、係数を点  $x$  で凍結させた定数係数方程式

$$\partial_t q = -b(x) \partial_y q + \frac{1}{2} a(x) \partial_y^2 q + S(x) q, \quad q(0, y) = \delta(y)$$

を考える。これは線形方程式なので、標準的な計算により、この基本解は明示的に

$$q(t, y) = e^{S(x)t} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \exp\left(-\frac{(y - b(x)t)^2}{2a(x)t}\right)$$

で与えられる。一方で

$$\begin{aligned} & e^{S(x)\Delta t} G(a(x)\Delta t, y - x - b(x)\Delta t) \\ &= e^{S(x)\Delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)\Delta t}} \exp\left(-\frac{(y - x - b(x)\Delta t)^2}{2a(x)\Delta t}\right) \end{aligned}$$

と書ける。よって、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} q(\Delta t, y - x) \varphi(y) dy \\ &= e^{S(x)\Delta t} \int_{\mathbb{R}} G(a(x)\Delta t, y - x - b(x)\Delta t) \varphi(y) dy \\ &= e^{S(x)\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + b(x)\Delta t + \sqrt{a(x)\Delta t} z) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \varphi(x) + \Delta t \left( b(x) \varphi'(x) + \frac{1}{2} a(x) \varphi''(x) + S(x) \varphi(x) \right) + O(\Delta t^{3/2}) \end{aligned} \tag{13}$$

が得られる。なお  $\Delta t^{1/2}$  オーダーの項は、 $ze^{-z^2/2}$  が奇関数によりゼロとなる（伊藤積分とこの弱近似における共通の核心ポイント）。ここでテスト関数  $\varphi$  がディラックデルタへと収束する関数列に置き換えよう。その関数列と  $O(\Delta t^{3/2})$  との競合を勘案し、 $\Delta t^{3/2}$  がゼロへ収束するオーダーの方が優勢になるように関数列を取る。そうすることで、(12) と (13) を比較したとき、基本解  $p(\Delta t, x, \cdot)$  とガウス核  $G$  は、同一の一次短時間展開を持つことが正当化される。ここからはより実装に近づけるため  $a = \sigma^2$ （定数）と置く。前節の熱核のときと同様に、離散ラグランジュ流として

$$\tilde{x} = x + b(x) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon \tag{14}$$

を得る。ここでも  $\varepsilon$  はガウスノイズである。この時刻  $\Delta t$  における PDE の解は

$$p(\Delta t, x, \tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2\Delta t)^{d/2}} \exp(S(x)\Delta t) \exp\left(-\frac{|\tilde{x} - x - b(x)\Delta t|^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) + o(\Delta t)$$

となる。この表現公式から、以下のスコア関数が得られることになる：

$$\nabla_{\tilde{x}} \log p(\Delta t, x, \tilde{x}) = -\frac{\tilde{x} - x - b(x) \Delta t}{\sigma^2 \Delta t}.$$

よって、以下の「ドリフト  $\tilde{b}$  の離散版」が得られる：

$$\tilde{b}(x, \tilde{x}) = -\frac{\tilde{x} - x}{\Delta t} = -b(x) + \sigma^2 \nabla_{\tilde{x}} \log p(\Delta t, x, \tilde{x}).$$

**Remark.** 今までの洞察をまとめると、粘性軸対称渦度方程式の離散ラグランジュ流は

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= \left( U_r(R_k, Z_k) - \frac{\nu}{R_k} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon^{(r)}, \\ Z_{k+1} &= U_z(R_k, Z_k) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon^{(z)}, \end{aligned}$$

となる。 $\varepsilon^{(r)}$  と  $\varepsilon^{(z)}$  は独立なガウスノイズである。

## 2.5 逆方向離散ラグランジュ流に現れるスコア関数と機械学習

各離散ステップ  $k$  において、前節までの議論により以下の漸化式が得られる：

$$x_k = x_{k+1} + \tilde{b}(x_k, x_{k+1}) \Delta t.$$

これは逆時間方向のラグランジュ流 (9) の離散版となる。しかし本研究の目的は、逆方向ラグランジュ流を  $x_{k+1}$  のみに依存する閉じた形で表現することにある。そのため、 $\tilde{b}(x_k, x_{k+1})$  を

$$v(x_{k+1}, k)$$

のような関数で近似することを考える。ここで  $v$  は時間ステップ  $k$  を条件とする関数であり、実装上はニューラルネットワークによって表現される。

**Remark.** 標準的な拡散モデルでは

$$x_t = \sqrt{1 - \beta_t} x_{t-1} + \sqrt{\beta_t} \varepsilon_t, \quad \beta_t \in (0, 1), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, I)$$

といった形の漸化式が想定されている。ここから

$$\alpha_t := 1 - \beta_t, \quad \bar{\alpha}_t := \prod_{s=1}^t \alpha_s$$

により定義される  $\bar{\alpha}_t$  を用いることで、直接計算（各時刻のガウスノイズ  $\varepsilon_t$  は互いに独立であることを使う）により

$$x_t = \sqrt{\bar{\alpha}_t} x_0 + \sqrt{1 - \bar{\alpha}_t} \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I)$$

が得られる。初期位置  $x_0$  とガウスノイズ  $\varepsilon$  を使って  $x_t$  が明示的に表現されているので、非常に使い勝手の良い表現式である。本研究のように方程式の解析自体が主眼となっている場合でも、同様の設定が可能である。すなわち、(14) を用いて初期位置  $x_0$  を入力として終端時刻  $L - 1$  までのデータ  $x_1, x_2, \dots, x_{L-1}$  を大量に生成し、勾配降下によって

$$x_0 \simeq v^*(x_k, k) \Delta t$$

となる関数  $v^*$  を同定すれば良い。

いま、順方向離散ラグランジュ流から得られた  $N$  本のサンプル列

$$\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{L-1}, \quad n = 1, \dots, N$$

が与えられているとする。このとき、 $v$  の近似精度を評価するため、以下の経験的汎関数を導入する：

$$\mathcal{J}[v] := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{L-1} \left| v(x_{k+1}^{(n)}, k) - \tilde{b}(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}) \right|^2.$$

この汎関数を最小化することにより、

$$v^* := \arg \min_v \mathcal{J}[v]$$

が定まり、それに対応する逆方向離散ラグランジュ流は

$$x_k = x_{k+1} + v^*(x_{k+1}, k) \Delta t$$

として与えられる。このようにして、順方向の離散ラグランジュ流から学習されたスコア関数を用いて、逆方向の生成的ダイナミクスが構成されるのである。

### 3 軸対称 Navier-Stokes 流に対する逆時間ダイナミクスの実装

本章では学習結果を紹介する。

### 3.1 ハイパーパラメータ，評価指標の設定

まずは様々なハイパーパラメータの設定を紹介する。ここでは  $\nu = 1$  and  $0.01$ ,  $U_r = -ar$ ,  $U_z = 2az$  ( $a = 1$ ) のバーガーズ型ひずみ場の場合を実装した。時間区間  $[0, T]$  を  $L$  ステップに分割し，刻み幅  $\Delta t = T/(L - 1)$  とした。本実装では  $T = 2$ ,  $L = 200$  とした。初期時刻の流体粒子の位置は，スケールパラメータ  $s > 0$  を用いて

$$(R_0, Z_0) = (e^{2aT} s, s)$$

とし， $s = 1, 2, \dots, 11, 12$  の場合を調べた。これは初期時刻のときの  $R$  と，終端時刻のときの  $Z$  のスケールを一致させるための設定である。また，順方向離散ラグランジュ流（学習データ）において，途中で  $R$  が負値に至った軌道は除外した。 $R$  が正値を保つ軌道のみを残しながら総データ数  $N = 10,000$  となるように学習データを生成した（トレーニング用に 8,000，検証用に 2,000）。初期値再構成誤差は，成分ごとの総移動距離で正規化した相対 MAE により評価した。例えば  $R$  成分について，

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|R_0^{(i)} - \hat{R}_0^{(i)}|}{\sum_{k=0}^{L-2} |R_{k+1}^{(i)} - R_k^{(i)}|} \quad (15)$$

を評価指標とした。なお， $\hat{R}_0^{(i)}$  が予測である。 $Z$  成分についても同様に定義した。各スケールパラメータ  $s$  に対して複数回の独立試行を行い，相対 MAE の平均値および標準偏差を算出した。学習結果の信頼性を高めるため，平均 MAE の相対標準誤差（標準誤差を平均値で正規化した量）が約 6 パーセント前後程度となるまで試行を繰り返した（80 回）。

### 3.2 アーキテクチャ

本研究では Song らによる連続時間 SDE に基づくスコアベース生成モデルの枠組みを採用した [2, 3]。すなわち，**スコアネットワークのオーソドックスな実装を基礎とし，問題設定に必要な要素のみを残した最小構成を採用した**。AI による画像生成などの複雑な空間構造を有する高次元モデルと比較すると，本研究で扱う系は， $R$  および  $Z$  からなる二次元の離散的ラグランジュ流を追跡するという極めて低次元な構造となっている。したがって，このような最小構成を採用することは至極妥当であると考えられる。

具体的なアーキテクチャとしてのスコアネットワークは，状態変数  $(R, Z)$  と時刻  $t$  を入力とする多層パーセプトロンで構成される。時刻情報は， $\sin$ ,  $\cos$  関数からなる時間埋め込みと呼ばれる標準的な手法により潜在表現へと変換される。この時間埋め込み表現を

状態変数  $(R, Z)$  の潜在表現と結合させ、複数の全結合層と活性化関数からなる主ネットワークに入力することで、時間および空間に対して連続的なスコア関数表現が得られる。

出力は  $(R, Z)$  各成分に対応するスコアであり、単一のネットワークによって全時刻  $k = 0, 1, \dots, L - 1$  にわたるスコアを同時に学習する。

### 3.3 学習結果 ( $\nu = 1$ and $\nu = 0.01$ )

以下が学習結果である。

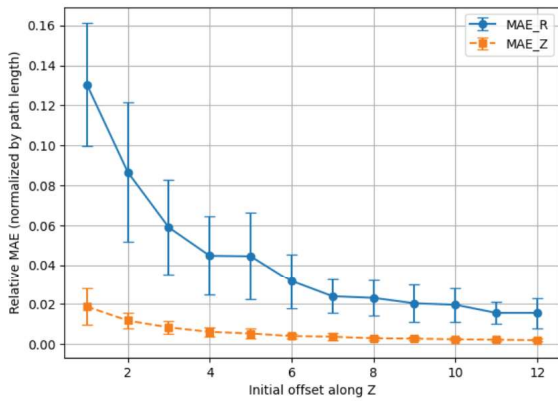


図1 学習結果 ( $\nu = 1$ )

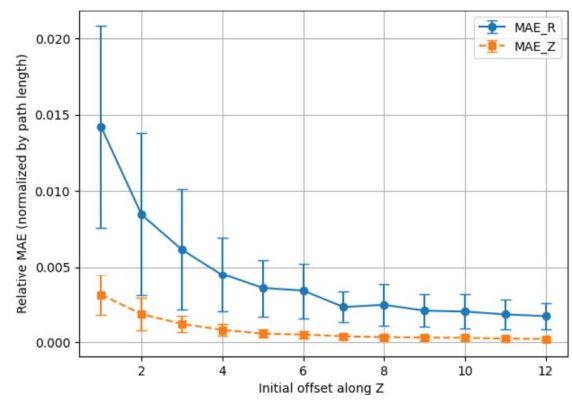


図2 学習結果 ( $\nu = 0.01$ )

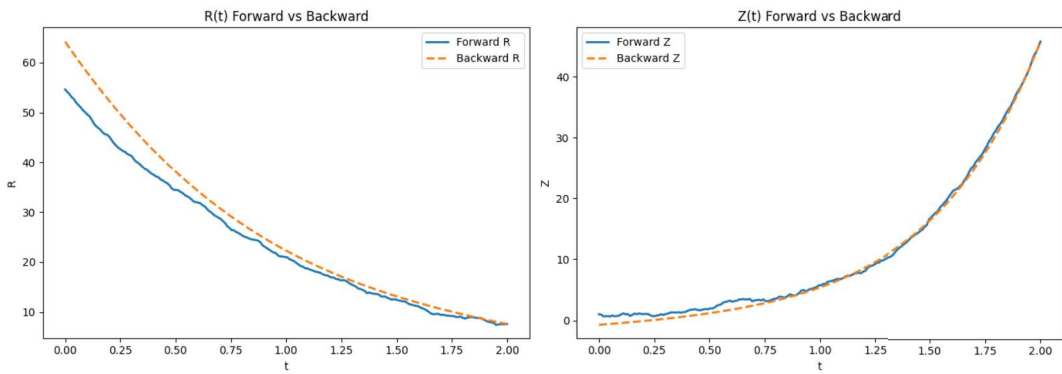


図3 具体例 ( $\nu = 1, s = 1$ )

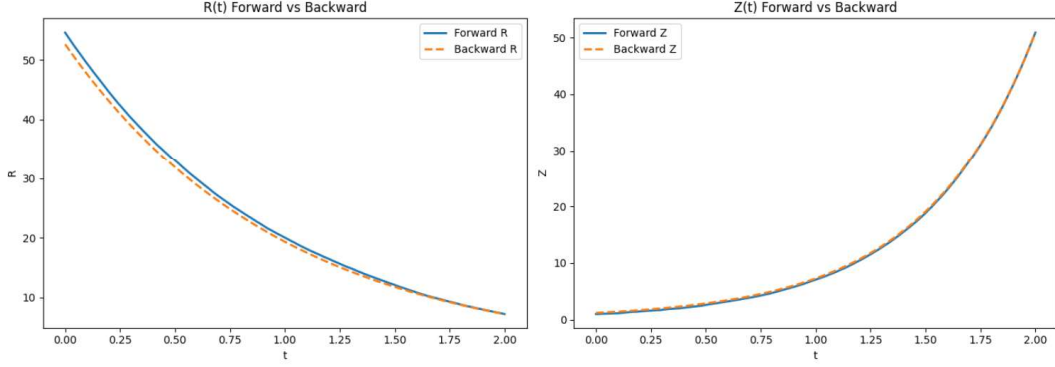


図4 具体例 ( $\nu = 0.01, s = 1$ )

図1 ( $\nu = 1$ ) と図2 ( $\nu = 0.01$ ) を比較すると、 $\nu$  の値に関わらず自己相似的なグラフであることが見て取れる。そして両方とも  $R$  方向については相対 MAE が大きく、初期位置に関する情報が軸に近づくにつれて顕著に失われていることが理解できる。一方で  $Z$  方向では、相対 MAE は全体として ( $R$  と比べて) 小さく安定的に保たれており、初期位置の情報が比較的良好に保持されていることが確認できる。

### 3.4 2次元流の場合の追試

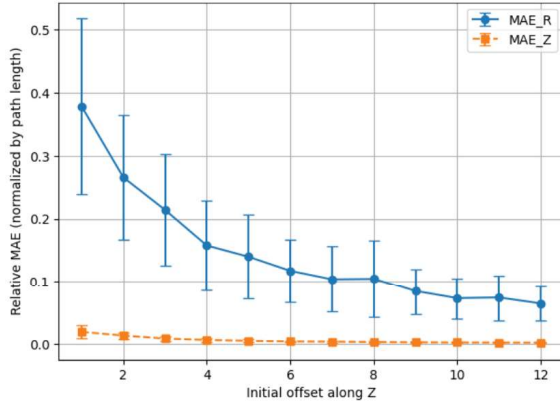
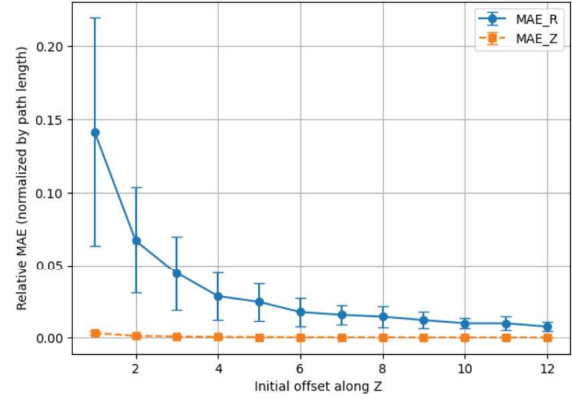
追試として、以下の2次元流の場合 ( $a = 1$ ) の数値実験も推し進めた (あえて  $R, Z$  の記号はそのままにしている)。

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= -2aR_k \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon^{(r)}, \\ Z_{k+1} &= 2aZ_k \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon^{(z)}. \end{aligned}$$

初期時刻の流体粒子の位置は、3次元の場合と同様、スケールパラメータ  $s > 0$  を用いて

$$(R_0, Z_0) = (e^{2aT}s, s)$$

とし、 $s = 1, 2, \dots, 11, 12$  の場合を調べた。以下が学習結果である。

図5 学習結果 ( $\nu = 1$ )図6 学習結果 ( $\nu = 0.01$ )

3次元の場合とほぼ同様の傾向がみてとれる。

### 3.5 結論

これらの学習結果は

双曲型のひずみ場において圧縮方向の力学が初期位置に関する情報を不可逆的に消失させる役割を果たす一方で、伸長方向にはそのような強い情報喪失が生じにくい

ことを示唆している。

今後の課題としては、本手法をより一般的な乱流場へと拡張し、軸対称性が明示的に仮定されない状況においても、渦軸構造や渦の幾何学的配置が情報喪失を規定しているか否かを系統的に検証することが挙げられる。

### 参考文献

- [1] T. Jinno, T. Mitsui, K. Nakai, Y. Saiki and T. Yoneda, *Long-term prediction of El Nino-Southern Oscillation using reservoir computing with data-driven realtime filter*, Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci., 35 (2025) 053149.
- [2] Y. Song, S. Ermon, *Generative Modeling by Estimating Gradients of the Data Distribution*, Advances in Neural Information Processing Systems, 32 (2019) 11895 – 11907.
- [3] Y. Song, J. Sohl-Dickstein, D. P. Kingma, A. Kumar, S. Ermon and B. Poole,

*Score-Based Generative Modeling through Stochastic Differential Equations*, International Conference on Learning Representations, 2021.

[4] T. Yoneda, <https://github.com/tsuyoshi-yoneda-math/>.