

Spherical designs obtained from P - and Q -polynomial association schemes

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
田中 太初

Hajime Tanaka
Research Center for Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Sciences
Tohoku University

本稿の内容は、Jesse Lansdown 氏、Bill Martin 氏、宗政昭弘氏および須田庄氏との共同研究に基づく。

m を正の整数とし、 $\mathbb{R}^m$ 内の原点を中心とする半径 1 の球面を S^{m-1} と表す：

$$S^{m-1} = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m : \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\}$$

非負整数 t に対し、 S^{m-1} の空でない有限部分集合 Ω は、次数 t 以下の全ての多項式 $f(\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ について次の等式が成り立つとき、**球 t -デザイン** と呼ばれる：

$$\frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} f(\boldsymbol{\xi}) d\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} f(\boldsymbol{\xi})$$

ここで、左辺の積分は S^{m-1} 上の面積分であり、 ω_{m-1} は S^{m-1} の面積を表す。例えば、正 $(t+1)$ -角形の頂点は球 t -デザイン ($m=2$) であり、正 20 面体の頂点は球 5-デザイン ($m=3$) である。球デザインは、様々な離散的対象から構成される。主なものとして、格子、等角直線族、直交群の軌道、アソシエーションスキーム (AS) の球面への埋め込み等が挙げられるが、本稿では AS の球面への埋め込みによる構成に着目する。AS の最も重要なクラスとして **Q -多項式距離正則グラフ** (すなわち P -& Q -多項式 AS) があるが、須田庄氏 [13] は、これらのグラフの「標準的な」球面への埋め込みについては、サイクルグラフを除き $t \leq 8$ となることを示した。講演のゴールとして、この上界を $t \leq 5$ に改善すること、 $t=5$ となる Q -多項式距離正則グラフを分類すること、そして特に、証明で用いた「多項式の手法」を紹介して楽しんでもらうこと、の 3 点を挙げた。本稿でも、この「多項式の手法」をメインに解説したい。

$\Gamma = (X, R)$ を直径 d の有限連結単純グラフとする。ここで X は Γ の頂点集合、 R は辺集合を表す。 ∂ を最短パスの長さによる X 上の距離とし、頂点 $x \in X$ に対し、

$$\Gamma_i(x) = \{y \in X : \partial(x, y) = i\} \quad (0 \leq i \leq d)$$

とおく。しばしば $\Gamma(x) = \Gamma_1(x)$ と略記する。非負整数 a_i, b_i, c_i ($0 \leq i \leq d$) が存在して、 $\partial(x, y) = i$ を満たす任意の 2 つの頂点 $x, y \in X$ に対して次が成り立つとき、 Γ を**距離正則グラフ**と呼ぶ：

$$|\Gamma_i(x) \cap \Gamma(y)| = a_i, \quad |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)| = b_i, \quad |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)| = c_i$$

ここで、 $\Gamma_{-1}(x) = \Gamma_{d+1}(x) = \emptyset$ である。このとき、 a_i, b_i, c_i ($0 \leq i \leq d$) を Γ の**交叉数**と呼び、次を Γ の**交叉列**と呼ぶ：

$$\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$$

交叉数は $b_0, b_1, \dots, b_{d-1} > 0$, $b_d = c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2, c_3, \dots, c_d > 0$ を満たす。さらに、 $k := b_0$ とおくと Γ は k -正則であり、特に、 $a_i + b_i + c_i = k$ ($0 \leq i \leq d$) が成り立つ。

以後、 $\Gamma = (X, R)$ は距離正則グラフとする。 $0 \leq i \leq d$ に対し、 A_i を Γ の**第 i 距離行列**とする。すなわち、 A_i は行と列がいずれも Γ の頂点で添え字付けられた行列であって、

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial(x,y) = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x, y \in X)$$

と定められる。特に、 $A := A_1$ は Γ の隣接行列であり、また、 $A_0 = I$ は単位行列である。距離正則グラフの定義は、これらの行列の3項漸化式とみなせる：

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1} \quad (0 \leq i \leq d)$$

ここで、 $b_{-1}A_{-1} = c_{d+1}A_{d+1} := 0$ である。従って、

$$M = \text{span}_{\mathbb{C}}\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$$

とおくと、 M は隣接行列 A で生成される可換 $\mathbb{C}$ -代数であり、 Γ の**隣接代数**と呼ばれる。

$\dim M = d+1$ より、 A はちょうど $d+1$ 個の相異なる固有値を持つことが分かる。これらを $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d \in \mathbb{R}$ としよう。ここで、添え字付けは固有値の降順とは限らないが、 Γ は k -正則なので k は A の固有値であり、常に $\theta_0 = k$ と定める。 $0 \leq i \leq d$ に対し、 A の θ_i -固有空間への直交射影を E_i と表し、これを Γ の**第 i 原始冪等元**と呼ぶ。実際、 $E_0, E_1, \dots, E_d$ は半単純可換 $\mathbb{C}$ -代数 M の(中心)原始冪等元となる。定義より、次が成り立つ：

$$A = \theta_0 E_0 + \theta_1 E_1 + \dots + \theta_d E_d$$

また、 Γ が正則かつ連結であることより、 E_0 は成分が全て1の行列 J を用いて

$$E_0 = \frac{1}{|X|} J$$

と表せる。

$E = E_1$ と略記しよう。実数 a_i^*, b_i^*, c_i^* ($0 \leq i \leq d$) が存在して、次の条件が成り立つとき、 E は Γ の **Q -多項式冪等元**と呼ばれる：

$$(i) \quad |X|E \circ E_i = b_{i-1}^* E_{i-1} + a_i^* E_i + c_{i+1}^* E_{i+1} \quad (0 \leq i \leq d)$$

$$(ii) \quad b_0^*, b_1^*, \dots, b_{d-1}^* > 0, b_d^* = c_0^* = 0, c_1^* = 1, c_2^*, c_3^*, \dots, c_d^* > 0$$

ここで、 $\circ$ は行列の Hadamard 積 (すなわち成分ごとの積) を表す。このとき、 a_i^*, b_i^*, c_i^* ($0 \leq i \leq d$) は Γ の**Krein 数**と呼ばれる。また、 $m := b_0^*$ とおくと $m = \text{trace } E = \text{rank } E$ となり、さらに、 $a_i^* + b_i^* + c_i^* = m$ ($0 \leq i \leq d$) が成り立つ。

以下では常に E は Q -多項式幂等元とし、

$$|X|E = \theta_0^* A_0 + \theta_1^* A_1 + \cdots + \theta_d^* A_d$$

と表す。 $|X|E$ の成分 $\theta_0^*(= m), \theta_1^*, \dots, \theta_d^* \in \mathbb{R}$ を Γ の**双対固有値**と呼ぶ。ここで、 $F := m^{-1}|X|E$ とおくと、 F は半正定値、すなわち Gram 行列であり、かつ対角成分が全て 1 となる。従って、次を満たす単位ベクトル $\xi_x \in \mathbb{R}^m$ ($x \in X$) を選ぶことができる：

$$\xi_x \cdot \xi_y = F_{x,y} = m^{-1}\theta_{\partial(x,y)}^* \in [-1, 1] \quad (x, y \in X) \quad (1)$$

集合 $\Omega_\Gamma = \{\xi_x : x \in X\} \subset S^{m-1}$ を Γ の E に関する**球面埋め込み**と呼ぶことにする。 Ω_Γ は $O(m)$ の作用を除いて一意的に定まる。例えば、3次元(超)立方体グラフ Q_3 の球面埋め込みは S^2 に内接する立方体の頂点となり、 n 頂点のサイクルグラフ C_n の球面埋め込みは S^1 に内接する正 n 角形の頂点となる。Cameron–Goethals–Seidel [2] は Ω_Γ が常に球 2-デザインであること、及び Ω_Γ が球 3-デザインになることと $a_1^* = 0$ が同値であることを示した。須田氏 [13] はこれを一般化して、次の定理を証明した：

定理 1 ([13, Theorem 3.1]). *The spherical embedding Ω_Γ of Γ with respect to E is a spherical t -design in S^{m-1} if and only if the following hold:*

$$a_i^* = 0 \quad \left(0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor\right), \quad c_i^* = \frac{mi}{m+2i-2} \quad \left(0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor\right).$$

須田氏はこの定理を用いて、 Γ がサイクルグラフの場合を除き Ω_Γ は高々球 8-デザインであること、すなわち球 9-デザインにはならないことを示した。

本稿の主結果は次である：

定理 2. *Assume that $d \geq 3$ and $m \geq 3$. Then, the spherical embedding Ω_Γ of Γ with respect to E is at most a spherical 5-design, i.e., it is not a spherical 6-design. Moreover, Ω_Γ is a spherical 5-design if and only if Γ is one of the following:*

- (a) a nonbipartite Taylor graph ($d = 3$) with intersection array $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$, where

$$k = \frac{(m-1)(m+2)}{2}, \quad \mu = \frac{m^2 + m - 4 - (m-3)\sqrt{m+2}}{4},$$

or its distance-2 graph, which is also a nonbipartite Taylor graph;

- (b) the Hermitian dual polar graph $[{}^2A_{2d-1}(2)]$.

Taylor グラフとは、直径 $d = 3$ の距離正則グラフであって、各 $x \in X$ に対して $|\Gamma_3(x)| = 1$ となるもののことである。この後者の条件は実際、 $c_2 = b_1(=: \mu)$, $c_3 = b_0(= k)$ と同値である (cf. [1, Proposition 4.2.2])。また、4 元体 $\mathbb{F}_4$ 上の $2d$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_4^{2d}$ に非退化なエルミート内積

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{2d} u_i v_i^2 \quad (u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{F}_4^{2d})$$

を入れるとき、対応する**双対極グラフ** $[^2A_{2d-1}(2)]$ は極大 (すなわち d 次元) 等方的部分空間全体を頂点集合とし、2 頂点 $x, y \in X$ は $\dim x \cap y = d - 1$ のとき隣接する (cf. [1, Section 9.4])。なお、 $[^2A_{2d-1}(2)]$ の球面埋め込みが球 5-デザインであることは、宗政氏 [11] により 2004 年に示された。ちなみに、上記の距離正則グラフはいずれも Q -多項式冪等元をちょうど 2 つ持ち、その一方に関する球面埋め込みについてのみ球 5-デザインとなる。

一般に、 $\Omega \subset S^{m-1}$ が球 t -デザインであるとき、次の **Fisher 型不等式** が成り立つ：

$$|\Omega| \geq \begin{cases} \binom{m+e-1}{e} + \binom{m+e-2}{e-1} & \text{if } t = 2e \text{ is even} \\ 2 \binom{m+e-1}{e} & \text{if } t = 2e + 1 \text{ is odd} \end{cases} \quad (2)$$

Fisher 型不等式で等号が成り立つとき、 Ω を**タイト球 t -デザイン**と呼ぶ。特に、タイト球 5-デザインはクラス 3 のアソシエーションをなすことが知られている (cf. [5]) が、これらは実際、球デザインの直交変換及びグラフの同形を除いて、定理 2 (a) のパラメータを持つ Taylor グラフと 1 対 1 に対応することが示せる。

さて、ここでいよいよ「多項式の手法」を紹介する。この手法は、坂内英一氏による次の補題に基づく：

補題 3 (坂内). *Let Ω be a spherical t -design in S^{m-1} . Let $f \in \mathbb{R}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$ be a polynomial such that $f|_{S^{m-1}}$ is not identically zero, and that $f(\xi) = 0$ for all $\xi \in \Omega$. Then, we have $t < 2 \deg f$.*

この補題の証明は容易である。 $\deg(f^2) = 2 \deg f$ であり、条件より

$$\frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} f^2(\xi) d\sigma(\xi) > 0, \quad \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\xi \in \Omega} f^2(\xi) = 0$$

となるので、 Ω は球 $(2 \deg f)$ -デザインには成り得ないのである。

この補題の応用例をいくつか紹介しよう (ただし、ここでは $f|_{S^{m-1}} \not\equiv 0$ の証明は省略する)。記号の簡略化のため、(1) の等式の値を $\sigma_{\partial(x,y)}$ と書くことにする：

$$\sigma_i = m^{-1} \theta_i^* \quad (i = 0, 1, \dots, d)$$

また、 Ω_Γ は球 t -デザインだとする。まずはウォームアップである。

例 4. $a_1 > 0$ とする。すなわち、 Γ は 3-サイクル x, y, z を含む。これに対し、

$$f(\xi) = (\xi \cdot \xi_x - \xi \cdot \xi_y)(\xi \cdot \xi_y - \xi \cdot \xi_z)(\xi \cdot \xi_z - \xi \cdot \xi_x)$$

とおくと、 $f(\xi_u) = 0$ ($u \in X$) となる。実際、 $\partial(x, u) = i$, $\partial(y, u) = j$, $\partial(z, u) = h$ とおき、必要ならば x, y, z を並び替えて $i \geq j \geq h$ とすると、 x と z が隣接しているので三角不等式より $h \geq i - 1$ であり、従って

$$f(\xi_u) = (\sigma_i - \sigma_j)(\sigma_j - \sigma_h)(\sigma_h - \sigma_i) = 0$$

となって、補題 3 より $t < 2 \deg f = 2 \cdot 3 = 6$ となる。なお、この議論では、球面埋め込みに用いる E として Q -多項式冪等元を選んだということを除き、 Q -多項式性は使っていない。

この例により、「多くの」 Γ について、 Ω_Γ が高々球5-デザインであることが分かる。 Γ が二部グラフの場合 (すなわち $a_0 = a_1 = \dots = a_d = 0$) にも多項式の同じような構成を行うことができるが、それでもまだ定理2の上界 $t \leq 5$ を示すには十分ではない。なお、講演では Γ の特殊な部分構造を用いた多項式の構成法があることを述べた¹が、本稿では割愛する。上界 $t \leq 5$ を一般に示すために、 Q -多項式性の重要な帰結である、次の **Leonard の定理** [8] を用いる：

定理 5. *There exists $\beta \in \mathbb{R}$ such that*

$$\frac{\theta_{i-2} - \theta_{i+1}}{\theta_{i-1} - \theta_i} = \frac{\theta_{i-2}^* - \theta_{i+1}^*}{\theta_{i-1}^* - \theta_i^*} \left(= \frac{\sigma_{i-2} - \sigma_{i+1}}{\sigma_{i-1} - \sigma_i} \right) = \beta + 1 \quad (2 \leq i \leq d-1).$$

ちなみに、「完全版」の Leonard の定理では、固有値 θ_i や双対固有値 θ_i^* だけでなく、交叉数 a_i, b_i, c_i や Krein 数 a_i^*, b_i^*, c_i^* 等が、高々5つのパラメータ (そのうち1つは直径 d) を用いて表される。上の定理は θ_i や θ_i^* (または σ_i) が同じ漸化式を満たすことを主張しているが、これからさらに次が直ちに分かる：

補題 6. *There exists $\gamma^* \in \mathbb{R}$ such that*

$$\sigma_{i-1} - \beta\sigma_i + \sigma_{i+1} = \gamma^* \quad (1 \leq i \leq d-1).$$

これをさらに変形していくことで次を得る：

補題 7. *There exists $\rho^* \in \mathbb{R}$ such that*

$$\sigma_{i-1}^2 - \beta\sigma_{i-1}\sigma_i + \sigma_i^2 - \gamma^*(\sigma_{i-1} + \sigma_i) = \rho^* \quad (1 \leq i \leq d). \quad (3)$$

[14, Section 8] を参照されたい (ただし本稿では記述を簡明にするために σ_i の関係式に書き換えてある)。Leonard の定理から導かれた重要な関係式 (3) を用いて、目的の上界 $t \leq 5$ を示すことができる：

例 8. 隣接する2頂点 $x, y \in X$ を固定し、

$$f(\xi) = (\xi \cdot \xi_x - \xi \cdot \xi_y)((\xi \cdot \xi_x)^2 - \beta(\xi \cdot \xi_x)(\xi \cdot \xi_y) + (\xi \cdot \xi_y)^2 - \gamma^*(\xi \cdot \xi_x + \xi \cdot \xi_y) - \rho^*)$$

とおくと、 $f(\xi_u) = 0$ ($u \in X$) となる。実際、 $\partial(x, u) = i$, $\partial(y, u) = j$ とおき、 $i \geq j$ と仮定しよう。このとき、

$$f(\xi_u) = (\sigma_i - \sigma_j)(\sigma_i^2 - \beta\sigma_i\sigma_j + \sigma_j^2 - \gamma^*(\sigma_i + \sigma_j) - \rho^*)$$

となる。まず、 $i = j$ ならば、1次の因子について $\sigma_i - \sigma_j = 0$ であり、 $f(\xi_u) = 0$ である。次に、 $i \neq j$ ならば $j = i - 1$ であり、(3) より2次の因子の値が0となるので、やはり $f(\xi_u) = 0$ である。従って、補題3より $t < 2 \deg f = 2 \cdot 3 = 6$ となる。ちなみに、もしさらに Γ が二部グラフならば、常に $i \neq j$ が成り立つので上記の f の1次の因子は不要であり、従って $t < 2 \cdot 2 = 4$ とできる。

¹スライドでの説明を準備していたが、時間の都合上ほとんど紹介できなかった。

以上により定理 2 の前半が示せたが、後半の分類の証明についても流れのみ説明しよう。以降、 Ω_Γ は球 5-デザインだとする。定理 1 より、

$$a_0^* = a_1^* = a_2^* = 0, \quad c_0^* = 0, \quad c_1^* = 1, \quad c_2^* = \frac{2m}{m+2}$$

となる。ここで、Terwilliger–Vidunas [15] による次の結果を用いる：

定理 9 ([15, Theorem 5.3]). *There exist $\omega, \eta \in \mathbb{R}$ such that*

$$a_i^*(\theta_i - \theta_{i-1})(\theta_i - \theta_{i+1}) = \gamma^* \theta_i^2 + \omega \theta_i + \eta \quad (0 \leq i \leq d),$$

where θ_{-1} and θ_{d+1} are defined respectively by setting $i = 1$ and $i = d$ in Theorem 5.

なお、定理中の γ^* は補題 6 のものと同一である。ちなみに、この定理は線形代数的対象である **Leonard 対** [14] の枠組みで一般的に証明された。 $a_0^* = a_1^* = a_2^* = 0$ より、定理 9 の左辺は $i = 0, 1, 2$ のとき 0 である。右辺は θ_i の高々 2 次式なので、右辺は結局恒等的に 0、すなわち $\gamma^* = \omega = \eta = 0$ となる。 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$ は互いに異なるので、

$$a_0^* = a_1^* = \dots = a_{d-1}^* = 0$$

が分かる ($\theta_d = \theta_{d+1}$ となることは実際にある)。

まず、 $a_0^* = a_1^* = \dots = a_{d-1}^* = a_d^* = 0$ となるとき Γ は **Q -二部**と呼ばれるが、これは Γ が極対的²であることと同値である。 Q -二部かつ二部である Q -多項式距離正則グラフは Curtin [4] 及び野村 [12] により分類されているが、 Γ が二部のとき Ω_Γ が球 4-デザインにならないことは例 8 で既に示したので、これらは該当しない。一方、二部でない Q -二部 Q -多項式距離正則グラフは Dickie–Terwilliger [7] により分類されており、これらを調べると Taylor グラフが残る。

次に、 $a_0^* = a_1^* = \dots = a_{d-1}^* = 0$ かつ $a_d^* > 0$ となるとき Γ は**準 Q -二部**と呼ばれる。このような Q -多項式距離正則グラフは Dickie [6] により分類されており、これらを調べると $[^2A_{2d-1}(2)]$ のみが残る。ただし、[6] の分類では $d \geq 4$ を仮定しており、 $d = 3$ の場合は別途検討する必要がある。幸い $d = 3$ の場合でも [6] の議論の多くはそのまま適用できるので、等式 $c_2^* = (2m)/(m+2)$ を条件として加えて、計算機も援用した長大な考察を行うことで、 $[^2A_5(2)]$ のみが残ることを証明できるのである。

最後に、双対性に関して少々コメントしておきたい。 Γ の最小周期を g と表すと、非負整数 ℓ について $g > \ell$ であることと

$$a_i = 0 \quad \left(0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right), \quad c_i = 1 \quad \left(0 \leq i \leq \left\lceil \frac{\ell-1}{2} \right\rceil\right)$$

が同値であることがすぐ分かる。これと定理 1 を見比べると、球デザインのパラメータ t と最小周期 g が双対的な関係にあることが見て取れる。実際、サイクルを除く Q -多項式距離正則グラフについて $g \leq 6$ となることは Lewis [9] により 2000 年に示されており、さらに 2025 年に Miklavič [10] は $g = 6$ となる例が下記に限ることを証明した：

² Γ は Q -多項式だと仮定しているので、これは各 $x \in X$ に対して $|\Gamma_d(x)| = 1$ となることと同値である。

- (a) a generalized hexagon of order $(1, k-1)$, i.e., a bipartite distance-regular graph with $d = 3$ and $c_2 = 1$
- (b) the Odd graph O_{d+1}

上記 (b) と定理 2 (b) はいずれも d が発散する無限系列である一方、上記 (a) は $d = 3$ かつ二部、定理 2 (a) は $d = 3$ かつ Q -二部、とちょうど対応しているのが面白い (これが果たして偶然なのかどうかは分からない)。

本稿ではここまで Γ が Q -多項式であることを仮定してきたが、ある意味でこれに匹敵する「良い」性質として薄と呼ばれる性質がある。これは Γ の Terwilliger 代数に関する性質であるが、Collins [3] は 1997 年に、サイクルを除く (かつ Q -多項式とは限らない) 薄距離正則グラフについて $g \leq 8$ が成り立つこと、及び $g = 8$ となる例が下記に限ることを証明した：

a generalized octagon of order $(1, k-1)$, i.e., a bipartite distance-regular graph with $d = 4$ and $c_2 = c_3 = 1$

上記の Lewis と Miklavič の結果と本稿の定理 2 を踏まえて、次の予想を提案したい：

予想 10. *Let $\mathfrak{X}$ be a dual-thin Q -polynomial association scheme with $d \geq 3$ and $m \geq 3$, but not necessarily P -polynomial. Then, the spherical embedding $\Omega_{\mathfrak{X}}$ of $\mathfrak{X}$ with respect to the Q -polynomial idempotent E is at most a spherical 7-design, i.e., it cannot be a spherical 8-design. Moreover, $\Omega_{\mathfrak{X}}$ is a spherical 7-design if and only if $\mathfrak{X}$ is the association scheme of a tight spherical 7-design, so $\mathfrak{X}$ is Q -bipartite, $d = 4$, $c_2^* = (2m)/(m+2)$, and $c_3^* = (3m)/(m+4)$.*

なお、講演時にはタイト球 7-デザインの AS が双対薄であることを示すことも問題として挙げていたが、これについては後日証明することができた。

参考文献

- [1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2] P. J. Cameron, J.-M. Goethals, and J. J. Seidel, The Krein condition, spherical designs, Norton algebras and permutation groups, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 40 (1978) 196–206.
- [3] B. V. C. Collins, The girth of a thin distance-regular graph, *Graphs Combin.* 13 (1997) 21–30.
- [4] B. Curtin, 2-Homogeneous bipartite distance-regular graphs, *Discrete Math.* 187 (1998) 39–70.

- [5] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata* 6 (1977) 363–388.
- [6] G. A. Dickie, Q -polynomial structures for association schemes and distance-regular graphs, Ph.D. thesis, University of Wisconsin, 1995.
- [7] G. A. Dickie and P. M. Terwilliger, Dual bipartite Q -polynomial distance-regular graphs, *European J. Combin.* 17 (1996) 613–623.
- [8] D. A. Leonard, Orthogonal polynomials, duality and association schemes, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982) 656–663.
- [9] H. A. Lewis, Homotopy in Q -polynomial distance-regular graphs, *Discrete Math.* 223 (2000) 189–206.
- [10] Š. Miklavič, A classification of Q -polynomial distance-regular graphs with girth 6, *Electron. J. Combin.* 32 (2025) P4.60; arXiv:2501.12820.
- [11] A. Munemasa, Spherical 5-designs obtained from finite unitary groups, *European J. Combin.* 25 (2004) 261–267.
- [12] K. Nomura, Spin models on bipartite distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 64 (1995) 300–313.
- [13] S. Suda, On spherical designs obtained from Q -polynomial association schemes, *J. Combin. Des.* 19 (2011) 167–177; arXiv:0910.4628.
- [14] P. Terwilliger, Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other, *Linear Algebra Appl.* 330 (2001) 149–203; arXiv:math/0406555.
- [15] P. Terwilliger and R. Vidunas, Leonard pairs and the Askey–Wilson relations, *J. Algebra Appl.* 3 (2004) 411–426; arXiv:math/0305356.