

半直積群に関する群のゼータ関数と部分群束の同型性

野方 雄斗* (弘前大学)

RIMS 共同研究（公開型）有限群論，代数的組合せ論，頂点代数の研究

概要

(Hironaka, 2017) では，二つの有限群が非同型であるにもかかわらず群のゼータ関数が一致する現象が紹介されている．この現象が起こるための必要十分条件は，一般には知られていない．本稿では，巡回群どうしの半直積として表されるクラスを対象を限定し，この現象が起こるための必要十分条件を与える．証明の詳細については (Nogata, 2025) を参照されたい．さらに，部分群束と群のゼータ関数の一致に関する展望と，それに関連する問題や実験結果についても紹介する．

本稿の構成

はじめに §1 では，先行研究の流れを整理し，本研究の主結果と適用例を述べる．続く §2 では主定理の証明の流れを概説する．最後に §3 では，主結果に付随して残る未解決問題を大きく 5 つに整理し，その詳細と計算機実験の結果，および考察を §3.1 から §3.5 にかけて述べる．

1 準備と主結果

本節では，本稿の問題設定と主結果を述べるために必要な準備を行う．はじめに §1.1 では，群のゼータ関数の定義を与え，導入の背景と先行研究の流れを整理する．ついで §1.2 では，本稿で扱う分裂型メタサイクル p -群 $G(p, m, n, k) \simeq \mathbb{Z}_{p^m} \rtimes \mathbb{Z}_{p^n}$ を導入し，同型判定や部分群の数え上げに関する先行研究の結果を整理する．最後に §1.3 では，本稿の主定理を提示し，具体例を通じてその有効性を示す．

1.1 群のゼータ関数と背景

部分群の数え上げは，古典的な問題として知られている．(Miller, 1919) をはじめとして，(Hall, 1949), (Dyubyuk, 1950), (Wall, 1961), (Stothers, 1977), (Imrich, 1978) などでは，有限 p -群やモジュラー群に

*Email: h24ms113@hirosaki-u.ac.jp

対し、指数が p の部分群の個数に関する明示計算、公式、および漸近的性質が研究されている。

このような背景のもとで、以下のような有限指数部分群を数え上げるディリクレ級数が (Smith, 1983) によって導入された。

$$\zeta_G^{\text{idx}}(s) := \sum_{\substack{H \leq G \\ [G:H] < \infty}} [G:H]^{-s} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^{\text{idx}}(G)}{n^s}, \quad a_n^{\text{idx}}(G) := \#\{H \leq G \mid [G:H] = n\}.$$

さらに (Grunewald et al., 1988) では、冪零群を含む広いクラスに対して、有限指数部分群の系統的な研究が行われている。

以降、 G は有限群であるとする。 $S(G)$ を G の部分群全体の集合とする。群のゼータ関数は (Hironaka, 2017) に従い、次のように定義する。

$$\zeta_G(s) = \sum_{H \in S(G)} |H|^{-s} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(G)}{n^s}, \quad a_n(G) := \#\{H \in S(G) \mid |H| = n\}.$$

この定義より、 $\zeta_{G_1}(s) = \zeta_{G_2}(s)$ が成り立つことと、任意の $n \geq 1$ に対して $a_n(G_1) = a_n(G_2)$ が成り立つことは同値である。(Hironaka, 2017), Proposition 4.1 では、次の (1.1a) で定義される 2 つの群 G_λ と $\tilde{G}_\lambda$ が $G_\lambda \not\cong \tilde{G}_\lambda$ であるにもかかわらず $\zeta_{G_\lambda}(s) = \zeta_{\tilde{G}_\lambda}(s)$ を満たすことが示されている。

$$G_\lambda = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid |a_i| = p^{\lambda_i}, a_i a_j = a_j a_i \rangle, \quad (1.1a)$$

$$\tilde{G}_\lambda = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid |a_i| = p^{\lambda_i}, a_n a_1 a_n^{-1} = a_1^{1+p^{\lambda_1-1}}, a_i a_j = a_j a_i \text{ unless } (i, j) = (1, n) \rangle. \quad (1.1b)$$

$$G_\lambda \simeq \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p^{\lambda_i}}, \quad \tilde{G}_\lambda \simeq \prod_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{p^{\lambda_i}} \times (\mathbb{Z}_{p^{\lambda_1}} \rtimes \mathbb{Z}_{p^{\lambda_n}}).$$

しかし一般に、非同型であるにもかかわらず群のゼータ関数が一致するための必要十分条件は知られていない。そこで本稿では、巡回 p -群同士の半直積として表されるクラスに対象を限定し、この現象が起こるための具体的な必要十分条件を与えることを目標とする。 p -群に限定する理由は Remark 1.1、巡回 p -群同士の半直積に限定する理由は Remark 1.2 のとおりである。

Remark 1.1 (Hironaka, 2017), Proposition 2.1 によれば、有限群 G, G' が $\gcd(|G|, |G'|) = 1$ を満たすとき、 $\zeta_{G \times G'}(s) = \zeta_G(s) \zeta_{G'}(s)$ が成り立つ。したがって、ある位数の p -群において非同型でありながらゼータ関数が一致する現象が起これば、位数が互いに素な任意の群との直積をとることにより、同様の例を多数構成できる。この理由により、まず p -群の場合に焦点を当てて必要十分条件を特定することは自然である。

Remark 1.2 計算機実験の範囲では、非同型でありながら群のゼータ関数が一致する例は、半直積群 $H \rtimes K$ の形であり、作用を与える準同型写像 $K \rightarrow \text{Aut}(H)$ の違いに起因するものとして多く観察された。また

(Hironaka, 2017) の例 (1.1) においても, $\tilde{G}_\lambda$ は本質的に $\mathbb{Z}_{p^{\lambda_1}} \rtimes \mathbb{Z}_{p^{\lambda_n}}$ という巡回 p -群どうしの半直積を含む形で与えられている. 以上を踏まえ, 本稿では最も基本的な場合として, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定したうえで, §1.2 で説明する $\mathbb{Z}_{p^m} \rtimes \mathbb{Z}_{p^n}$ として表される群のクラスに対象を限定し, この現象が起こるための必要十分条件を解明する.

1.2 本稿で対象とする群

Definition 1.3 有限群 G がメタサイクル群であるとは, ある正規部分群 $H \triangleleft G$ が巡回群であり, かつ商群 G/H も巡回群であることをいう.

以下, 素数 p と整数 $m, n \geq 1$ を固定し, さらに整数 λ を $0 \leq \lambda \leq m$ とする. (Hempel, 2000) に従い, 次の合同式が成り立つと仮定する.

$$k^{p^n} \equiv 1 \pmod{p^m}, \quad (1.2a)$$

$$p^\lambda(k-1) \equiv 0 \pmod{p^m}. \quad (1.2b)$$

このとき (Hempel, 2000) により, 任意の有限メタサイクル p -群は, (1.2) を満たす範囲で次の表示をもつ.

$$G(p, m, n, \lambda, k) := \langle a, b \mid a^{p^m} = \text{id}, b^{p^n} = a^{p^\lambda}, bab^{-1} = a^k \rangle. \quad (1.3)$$

本稿では, 分裂して半直積として書けるメタサイクル群に対象を限定する. すなわち $b^{p^n} = \text{id}$ を仮定し, 条件 (1.2a) を満たす k に対して, 次の表示で与えられる群を扱う.

$$G(p, m, n, k) := \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = \text{id}, bab^{-1} = a^k \rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^m} \rtimes_\phi \mathbb{Z}_{p^n}.$$

ここで準同型 $\phi: \mathbb{Z}_{p^n} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_{p^m})$ は, $\phi(b)(a) = bab^{-1} = a^k$ で定まる. 以降は $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し, $G(p, m, n, k)$ の中で非同型でありながら群のゼータ関数が一致する k の値を分類する. 同型であるための必要十分条件は Proposition 1.4 で与えられることが知られている.

Proposition 1.4 整数 $m, n \geq 1$ をとり, (1.2a) を満たす整数 k_1, k_2 をとる. このとき $G(p, m, n, k_1) \simeq G(p, m, n, k_2)$ が成り立つための必要十分条件は, 次を満たす $v \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ が存在することである.

$$k_2 \equiv k_1^v \pmod{p^m}. \quad (1.4)$$

この主張は (Humphries and Skabelund, 2015) の同型判定を, 本稿で扱う p -群 $G(p, m, n, k)$ の設定に適用して得られるものである.

一方で、メタサイクル p -群に関しては、部分群の個数分布を与える結果が (Mann, 2010, Berkovich, 2011) により得られている。§1.2.1では、本稿で用いる形でそれらを整理する。

1.2.1 (Mann, 2010) と (Berkovich, 2011) の結果

Definition 1.5 G の部分群 $A \subset G$ と A の正規部分群 $B \triangleleft A$ が存在して $L \simeq A/B$ と書ける群 L を G の section という。

Definition 1.6 次の2つの条件を満たすとき、有限メタサイクル p -群 G は quasi-regular であるという。

(QR1) $p = 2$ のとき、 G は位数 8 の非可換 section をもたない。

(QR2) G の任意の section H に対し、集合 $\{x^p \mid x \in H\}$ が $\cup_1(H) := \langle x^p \mid x \in H \rangle$ に一致する。

(Mann, 2010) によれば、 p が奇数素数であれば、有限メタサイクル p -群は quasi-regular であることが知られている。quasi-regular であるようなメタサイクル p -群に対しては、次のような部分群の数え上げ公式が成立する。

Fact 1.7 (Berkovich, 2011) G を、位数が p^ℓ で quasi-regular であるようなメタサイクル群とする。 $\exp(G) = p^e < p^\ell$ と仮定し、 $0 \leq t \leq \ell$ とする。 $f := \ell - e \geq 1$ とおく。このとき、 $a_{p^t}(G) = \#\{H \leq G \mid |H| = p^t\}$ は次で与えられる。

$$a_{p^t}(G) = \begin{cases} \frac{p^{t+1} - 1}{p - 1} & \text{if } t \leq f, \\ \frac{p^{f+1} - 1}{p - 1} & \text{if } f < t \leq e, \\ \frac{p^{\ell-t+1} - 1}{p - 1} & \text{if } t > e. \end{cases}$$

したがって Fact 1.7により、次の系が成立する。

Corollary 1.8 $p \geq 3$ とし、 $m, n \geq 1$ を固定する。このとき、(1.2a) を満たす任意の整数 k_1, k_2 に対して $\zeta_{G(p,m,n,k_1)}(s) = \zeta_{G(p,m,n,k_2)}(s)$ が成立する。

したがって、本稿の問題設定において本質的に非自明なのは $p = 2$ の場合である。 $p = 2$ の場合についても、メタサイクル 2-群の部分群の個数分布は (Berkovich, 2011) によって、次のように与えられている。

Fact 1.9 (Berkovich, 2011) G を、有限なメタサイクル 2-群とする。各整数 $i \geq 0$ に対し、以下のよう に $\Omega_i(G)$, w , R を定める。

$$\Omega_i(G) := \{x \in G \mid x^{2^i} = \text{id}\}, \quad w := \max\{i \geq 0 \mid |\Omega_i(G)| = 2^{2^i}\}, \quad R := \Omega_w(G).$$

このとき、 G/R は次のいずれかに同型である。

- $\{\text{id}\}$,
- $\mathbb{Z}_{2^c}$ ($c \geq 1$),
- D_{2^c} , Q_{2^c} , または SD_{2^c} ($c \geq 3$).

Fact 1.10 (Berkovich, 2011) 位数 2^ℓ の有限メタサイクル 2-群 G をとる。各整数 t ($0 \leq t \leq \ell$) に対して、 $a_{2^t}(G) = \#\{H \leq G \mid |H| = 2^t\}$ の値は、 w の値及び $G, R, G/R$ の構造により次のように定まる。

- (1) $G \simeq \mathbb{Z}_{2^\ell}$ のとき、任意の $0 \leq t \leq \ell$ に対して $a_{2^t}(G) = 1$ である。
- (2) $w = 0$ かつ $G \simeq D_{2^\ell}$, Q_{2^ℓ} , または SD_{2^ℓ} と仮定する。このとき $a_1(G) = a_{2^\ell}(G) = 1$ が成り立ち、さらに任意の $2 \leq t < \ell$ に対して

$$a_{2^t}(G) = 2^{\ell-t} + 1$$

である。また $t = 1$ のときは以下で与えられる。

$$a_2(D_{2^\ell}) = 2^{\ell-1} + 1, \quad a_2(Q_{2^\ell}) = 1, \quad a_2(\text{SD}_{2^\ell}) = 2^{\ell-2} + 1.$$

- (3) $w > 0$ かつ $R = G$ と仮定する。このとき $|G| = 2^{2w}$ が成り立ち、任意の $0 \leq t \leq 2w$ に対して以下で与えられる。

$$a_{2^t}(G) = \begin{cases} 2^{t+1} - 1 & \text{if } 0 \leq t \leq w, \\ 2^{2w-t+1} - 1 & \text{if } w < t \leq 2w. \end{cases}$$

- (4) $w > 0$, $R \subsetneq G$, およびある $c \geq 1$ に対して $G/R \simeq \mathbb{Z}_{2^c}$ と仮定する。このとき $|G| = 2^{2w+c}$ が成り立ち、任意の $0 \leq t \leq 2w+c$ に対して以下で与えられる。

$$a_{2^t}(G) = \begin{cases} 2^{t+1} - 1 & \text{if } 0 \leq t \leq w, \\ 2^{w+1} - 1 & \text{if } w < t < w+c, \\ 2^{2w+c-t+1} - 1 & \text{if } w+c \leq t \leq 2w+c. \end{cases}$$

- (5) $w > 0$, $R \subsetneq G$, およびある $c \geq 3$ に対して $G/R \simeq D_{2^c}$, Q_{2^c} , または SD_{2^c} と仮定する。このとき $|G| = 2^{2w+c}$ が成り立つ。 $0 \leq t \leq 2w+c$ に対する $a_{2^t}(G)$ は (Berkovich, 2011) において明示的な公式で与えられている。ここでは公式の全体が長くなるため省略し、参照箇所のみを挙げる。

- $G/R \simeq Q_{2^c}$ の場合は (Berkovich, 2011), Theorem 3.9 と Supplements 1–2 を参照。

- $G/R \simeq D_{2^c}$ の場合は (Berkovich, 2011), Theorem 3.11 と Supplements 1–3 を参照.
- $G/R \simeq SD_{2^c}$ の場合は (Berkovich, 2011), Theorem 3.12 と Supplements 1–2 を参照.

よって部分群の個数分布は Fact 1.10 の枠組みで得られる. しかし w , R , G/R による場合分けが多く, 非同型でありながらゼータ関数が一致するペアがどの程度存在するかは, これらの一般公式からは直ちには見通すことが難しい. 本稿では, 分裂型のクラス $G(p, m, n, k)$ に対象を限定し, 必要十分条件として記述することを目標とする.

1.3 主定理とその例

本研究の主結果は次の通りである.

Theorem 1.11 素数 p と整数 $m, n \geq 1$ をとる. $H := \mathbb{Z}_{p^m} = \langle a \rangle$ および $K := \mathbb{Z}_{p^n} = \langle b \rangle$ とおく. 次で定まる分裂型メタサイクル群を考える.

$$G(p, m, n, k) := \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = \text{id}, bab^{-1} = a^k \rangle.$$

(1.2a) を満たす整数 k_1, k_2 をとる. このとき

$$\zeta_{G(p, m, n, k_1)}(s) = \zeta_{G(p, m, n, k_2)}(s) \quad (1.5)$$

が成り立つための必要十分条件は次の通りである. ここで v_2 は 2 進付値を表す.

(1) p が奇素数のとき, (1.2a) を満たす任意の k_1, k_2 に対して (1.5) が成り立つ.

(2) $p = 2$ かつ $n < m$ のとき, (1.2a) を満たす任意の k_1, k_2 に対して (1.5) が成り立つための必要十分条件は, 次のいずれかが成り立つことである.

$$\begin{cases} \text{(A)} & v_2(k_1 + 1) = v_2(k_2 + 1) \leq m - n, \\ \text{(B)} & \min\{v_2(k_1 + 1), v_2(k_2 + 1)\} > m - n. \end{cases}$$

(3) $p = 2$ かつ $n \geq m$ のとき, (1.2a) を満たす任意の k_1, k_2 に対して (1.5) が成り立つ.

よって, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定したうえで, Proposition 1.4 により互いに非同型な $G(p, m, n, k_i)$ を分類し, Theorem 1.11 を適用することにより, 非同型でありながら群のゼータ関数が一致するペアがどの程度存在するかを確認できる.

Example 1.12 $(p, m, n) = (2, 5, 3)$ の場合を考え, *Theorem 1.11* を適用する. (1.2a) を満たす k は次で与えられる.

$$k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}. \quad (1.6)$$

さらに (1.4) より, 同型に関して以下の必要十分が成立する.

$$G(2, 5, 3, k_1) \simeq G(2, 5, 3, k_2) \iff \exists v \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \text{ s.t. } k_2 \equiv k_1^v \pmod{32}.$$

(1.6) に現れる k について, 同型類は次で与えられる.

$$\{1\}, \{3, 11, 19, 27\}, \{5, 13, 21, 29\}, \{7, 23\}, \{9, 25\}, \{15\}, \{17\}, \{31\}. \quad (1.7)$$

したがって代表元として $k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 17, 31\}$ を取る. これらの k について

$$v_2(k+1) = 1 \text{ for } k \in \{1, 5, 9, 17\}, \quad v_2(k+1) = 2 \text{ for } k = 3, \quad v_2(k+1) \geq 3 \text{ for } k \in \{7, 15, 31\}$$

が成り立つ. *Theorem 1.11* より, $G(2, 5, 3, k)$ の群のゼータ関数の一致は $v_2(k+1)$ としきい値 $m-n+1=3$ によって生じる. したがって, 上の代表元は次の 3 つの群のゼータ関数が一致する類に分かれる.

$$\{1, 5, 9, 17\}, \quad \{3\}, \quad \{7, 15, 31\}. \quad (1.8)$$

同じ類の中で相異なる k_1, k_2 をとる. このとき $G(2, 5, 3, k_1)$ と $G(2, 5, 3, k_2)$ は互いに非同型である. 一方で *Theorem 1.11* より, これらは同じ群のゼータ関数をもつ.

2 証明の概要

任意の半直積 $G := V \rtimes_\phi U$ は, 自然な射影 $\pi: G \rightarrow U$ と $\pi \circ s = \text{id}_U$ を満たす準同型 $s: U \rightarrow G$ をもち,

$$1 \rightarrow V \rightarrow G \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{s} \end{smallmatrix} U \rightarrow 1$$

という分裂する短完全系列に入る. 部分群 $W \subset V$ と $L \subset U$ に対して, 次の集合を定義する.

$$S_{W,L}(G) := \{H \leq G \mid H \cap V = W, \pi(H) = L\}.$$

任意の部分群 $H \subset G$ に対し $W := H \cap V$ および $L := \pi(H)$ とおくと、短完全系列 $1 \rightarrow W \rightarrow H \xrightarrow{\pi|_H} L \rightarrow 1$ を得る.

$W \subset V$ と $L \subset U$ を任意にとる. このとき $W \triangleleft \pi^{-1}(L)$ が成り立つための必要十分条件は、 $W \triangleleft V$ が成り立ち、かつ任意の $\ell \in L$ に対して $\phi(\ell)(W) = W$ が成り立つことである. 以下 $W \triangleleft \pi^{-1}(L)$ を仮定する. $\tilde{V} := V/W$ および $\tilde{G} := \pi^{-1}(L)/W$ とおくと、 W で割ることにより短完全系列

$$1 \rightarrow \tilde{V} \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\tilde{\pi}} L \rightarrow 1$$

を得る. (Robinson, 1996) によれば、次の全単射が存在する.

$$S_{\{\text{id}\}, L}(\tilde{G}) := \{ \tilde{H} \leq \tilde{G} \mid \tilde{H} \cap \tilde{V} = \{\text{id}\}, \tilde{\pi}(\tilde{H}) = L \} \longleftrightarrow Z^1(L, \tilde{V}) = \{ f : L \rightarrow \tilde{V} \mid f(\ell_1 \ell_2) = f(\ell_1) + \ell_1 \cdot f(\ell_2) \}. \quad (2.1)$$

さらに写像 $H \mapsto H/W$ によって以下の全単射が成立する.

$$S_{W, L}(G) \longleftrightarrow S_{\{\text{id}\}, L}(\tilde{G}) \quad (2.2)$$

以下ではこれを本稿の状況に適用する. 以降 $G := G(p, m, n, k)$ と書き,

$$G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \quad (H := \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^m}, K := \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^n})$$

とおく. $H \simeq \mathbb{Z}_{p^m}$ は巡回群であるから、任意の部分群 $A \subset H$ は H の特性部分群である. $H \triangleleft G$ より $A \triangleleft G$ が従う. したがって任意の部分群 $B \subset K$ に対して A は B -不変である. (2.1), (2.2) を適用することによって以下の全単射を得る.

$$S_{A, B}(G) := \left\{ T \leq G \mid T \cap H = A, \pi(T) = B \right\} \longleftrightarrow Z^1(B, H/A). \quad (2.3)$$

特に $S(G) = \bigsqcup_{A \subset H, B \subset K} S_{A, B}(G)$ が成り立つ. 任意の部分群 $T \subset G$ に対し、ペア (A, B) は $A = T \cap H$ と $B = \pi(T)$ により一意に定まる. これと (2.3) を合わせると

$$|S(G)| = \sum_{A \subset H, B \subset K} |Z^1(B, H/A)|$$

を得る. 各 $0 \leq i \leq m$ および $0 \leq j \leq n$ に対し、 $|A_i| = p^i$ かつ $|B_j| = p^j$ を満たす部分群はそれぞれ一意に

定まるので、これを $A_i \subset H$, $B_j \subset K$ とする．位数 p^t の部分群の個数に制限すると

$$a_{p^t}(G) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ i+j=t}} \left| Z^1(B_j, H/A_i) \right| \quad (2.4)$$

を得る． $j = t - i$ とおくと $0 \leq j \leq n$ より $t - n \leq i \leq t$ である．したがって $\max\{0, t - n\} \leq i \leq \min\{t, m\}$ となり, (2.4) は

$$a_{p^t}(G) = \sum_{i=\max\{0, t-n\}}^{\min\{t, m\}} \left| Z^1(B_{t-i}, H/A_i) \right| \quad (2.5)$$

と書き直せる．各 $0 \leq i \leq m$ および $0 \leq j \leq n$ に対し $t = i + j$ とし,

$$A_i := \langle a^{p^{m-i}} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^i} \subset H, \quad B_j := \langle b^{p^{n-j}} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^j} \subset K, \quad M_i := H/A_i \simeq \mathbb{Z}_{p^{m-i}}$$

とおく．

Fact 2.1 c.f. (Robinson, 1996), Chap. 3 M_i を $\mathbb{Z}/p^{m-i}\mathbb{Z}$ と同一視し, 加法的に書く． ϕ の制限により B_j が M_i に作用するので, その作用が誘導する自己準同型を $T_{i,j} \in \text{End}(M_i)$ と書く．このとき

$$T_{i,j}(x) = u_{i,j} x \quad (x \in \mathbb{Z}/p^{m-i}\mathbb{Z}), \quad u_{i,j} \equiv k^{p^{n-j}} \pmod{p^{m-i}} \quad (2.6)$$

が成り立つ．さらに

$$N_{i,j} := \text{id}_{M_i} + T_{i,j} + T_{i,j}^2 + \cdots + T_{i,j}^{p^j-1} \quad (2.7)$$

と定める．この定義のもとで, 以下の全単射が成立する．

$$Z^1(B_j, M_i) \longleftrightarrow \text{Ker}(N_{i,j}) = \{x \in M_i \mid N_{i,j}(x) = 0\}. \quad (2.8)$$

Corollary 2.2 (2.5) と (2.8) を合わせることで, $a_{p^t}(G)$ に関して次の等式を得る．

$$a_{p^t}(G) = \sum_{i=\max\{0, t-n\}}^{\min\{t, m\}} \left| \text{Ker}(N_{i, t-i}) \right|.$$

Proposition 2.3 (2.7) で定めた $N_{i,j}$ に対して, $|\text{Ker}(N_{i,j})|$ は次のように与えられる．証明は (Nogata, 2025), Proposition 3.3 を参照されたい．

1. p が奇素数のとき

$$|\text{Ker}(N_{i,j})| = p^{\min\{m-i, j\}}.$$

2. $p = 2$ のとき

$$|\mathrm{Ker}(N_{i,j})| = \begin{cases} 2^{\min\{m-i, j\}} & \text{if } u_{i,j} \equiv 1 \pmod{2^{m-i}}, \\ 2^{\min\{m-i, v_2(u_{i,j}+1)+j-1\}} & \text{if } u_{i,j} \not\equiv 1 \pmod{2^{m-i}}. \end{cases}$$

以上より, p が奇素数の場合には $|\mathrm{Ker}(N_{i,j})|$ が k に依存しない形で与えられる. したがって $a_{p^t}(G)$ も k に依存せずに定まり, Corollary 1.8 と同様の結論が得られる.

一方で $p = 2$ の場合には $|\mathrm{Ker}(N_{i,j})|$ を具体的に評価することにより, Theorem 1.11 の (2), (3) が得られる. 計算の詳細については (Nogata, 2025) の Theorem 3.6 を参照されたい.

Remark 2.4 RIMS の講演では, Theorem 1.11 の (2) とは異なる形で, 以下のように主定理を紹介していた.

(2) $p = 2$ かつ $n < m$ の場合: $\zeta_{G_1}(s) = \zeta_{G_2}(s)$ が成り立つことと, (1.2a) を満たす k_1, k_2 が次のいずれかを満たすことは同値である.

$$(A) \quad v_2(k_1 + 1) = v_2(k_2 + 1) = 1,$$

$$(B) \quad 1 < v_2(k_1 + 1) = v_2(k_2 + 1) < m - n + 1 \text{ かつ } \min\{m, v_2(k_1 - 1)\} = \min\{m, v_2(k_2 - 1)\},$$

$$(C) \quad v_2(k_1 + 1), v_2(k_2 + 1) \geq m - n + 1 \text{ かつ } \min\{m, v_2(k_1 - 1)\} = \min\{m, v_2(k_2 - 1)\}.$$

しかし, $v_2(k + 1) > 1$ が成り立つ場合には常に $v_2(k - 1) = 1$ が成り立つ. したがって (B), (C) に現れる

$$\min\{m, v_2(k_1 - 1)\} = \min\{m, v_2(k_2 - 1)\}$$

という条件は自明に満たされる. この理由により, 主定理は最終的に Theorem 1.11 の形へと書き直すことができた. 詳細は (Nogata, 2025) の Lemma 3.5 を参照されたい.

3 新たな問題と展望

本研究に付随して未解決の問題が存在する. 本節では, 以下の Remark 3.1 にまとめた問題を (A) から (E) に整理し, 以降の §3.1–3.5 でその背景と計算実験の結果, および考察を述べる.

Remark 3.1

- (A) $G(p, m, n, k)$ という群のクラスにおいて, (m, n) を固定せず, $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ かつ $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ を満たす場合に, 非同型でありながら群のゼータ関数が一致する例がどの程度存在するかは未解決である.

(B) 群のゼータ関数を正規部分群に対して次のように拡張して定義する.

$$\zeta_G^{\triangleleft}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^{\triangleleft}(G)}{n^s}, \quad a_n^{\triangleleft}(G) := \#\{H \triangleleft G \mid |H| = n\}.$$

この場合に関しても, 非同型でありながら $\zeta_{G_1}^{\triangleleft}(s) = \zeta_{G_2}^{\triangleleft}(s)$ が起こるための必要十分条件は未解決である. 特に, 固定した $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対する $G(p, m, n, k)$ のクラスにおいても未解決である.

(C) 本研究は分裂型メタサイクル群 $G(p, m, n, k)$ を対象とした. 非分裂拡大を含む一般のメタサイクル p -群 $G(p, m, n, \lambda, k)$ の場合での一般論は構築できていない.

(D) 任意の p -群 P_1, P_2 に対する半直積群 $P_1 \rtimes P_2$ や, より一般の場合の有限群に対して, 非同型だが群のゼータ関数が一致するための必要十分条件は知られていない.

(E) $L(G)$ を G の部分群からなる束と定義する. 同位数の有限 p -群 G_1, G_2 に対して $L(G_1) \simeq L(G_2)$ ならば $\zeta_{G_1}(s) = \zeta_{G_2}(s)$ が成り立つが, 逆は一般に成り立たない. $G(p, m, n, k)$ というクラスの中で, 束同型性とゼータ一致の間にあるギャップは特定できていない.

3.1 問題 (A) について

(A): $G(p, m, n, k)$ のクラスにおいて, (m, n) を固定せず, $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ かつ $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ を満たす場合に, 非同型だが群のゼータ関数が一致する必要十分条件は何か?

本稿では (m, n) を固定し, $G(p, m, n, k) = H \rtimes K$ に対して H と K の部分群が一意に定まることを用いて, (2.5) の形に数え上げを帰着した. しかし問題 (A) の状況では, §2 で用いた短完全系列に基づく枠組みをそのまま用いることができない.

なお $p = 2$ で $m + n = 7$ の範囲について, GAP により, 異なる (m, n) に対しても非同型であるが群のゼータ関数が一致する例が確認できる.

以下では, $[a_0, a_1, \dots, a_7]$ を, $G(2, m, n, k)$ の位数が 2^t である部分群の個数 a_t ($0 \leq t \leq 7$) を並べたリストとする.

Table 1: $G(2, m, n, k)$ ($m + n = 7$) における部分群の個数分布

(m, n, k)	SmallGroup(128, id)	部分群個数分布 $[a_0, a_1, \dots, a_7]$
(1, 6, 1)	(128, 159)	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1]
(6, 1, 33)	(128, 160)	
(2, 5, 1)	(128, 128)	[1, 3, 7, 7, 7, 7, 3, 1]
(2, 5, 3)	(128, 153)	

(5, 2, 9)	(128, 130)	
(5, 2, 17)	(128, 129)	
(3, 4, 1)	(128, 42)	
(3, 4, 3)	(128, 99)	
(3, 4, 5)	(128, 44)	
(3, 4, 7)	(128, 102)	[1, 3, 7, 15, 15, 7, 3, 1]
(4, 3, 5)	(128, 45)	
(4, 3, 9)	(128, 43)	
(4, 3, 3)	(128, 100)	
(4, 3, 7)	(128, 104)	
(4, 3, 15)	(128, 103)	[1, 3, 7, 23, 15, 7, 3, 1]
(5, 2, 7)	(128, 158)	
(5, 2, 15)	(128, 156)	
(5, 2, 31)	(128, 155)	
(6, 1, 31)	(128, 162)	
(6, 1, 63)	(128, 161)	[1, 3, 19, 19, 11, 7, 3, 1]
		[1, 3, 35, 19, 11, 7, 3, 1]
		[1, 33, 33, 17, 9, 5, 3, 1]
		[1, 65, 33, 17, 9, 5, 3, 1]

したがって, (m, n) を固定しない状況でも, 非同型でゼータ一致となる例が存在し得ることがわかる.

3.2 問題 (B) について

(B): 正規部分群のゼータ関数 $\zeta_G^\triangleleft(s)$ に対して, 非同型だが $\zeta_{G_1}^\triangleleft(s) = \zeta_{G_2}^\triangleleft(s)$ となる必要十分条件は?

問題 (B) として, 正規部分群の個数分布 $[b_0, b_1, \dots, b_7]$ を

$$b_t := \#\{ H \triangleleft G(2, m, n, k) \mid |H| = 2^t \} \quad (0 \leq t \leq 7)$$

で定める. この分布が一致するための一般的な判定条件は得られていない. 一方で, $p = 2$ で $m + n = 7$ の範囲では, 異なる (m, n) に対しても正規部分群の個数分布が一致する例が, GAP により確認できる.

Table 2: 位数 2^7 の群 $G(2, m, n, k)$ ($m + n = 7$) における正規部分群個数分布の一致類

(m, n, k)	SmallGroup(128, id)	正規部分群個数分布 $[b_0, b_1, \dots, b_7]$
(1, 6, 1)	(128, 159)	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1]
(5, 2, 15)	(128, 156)	

(5, 2, 31)	(128, 155)	
(2, 5, 1)	(128, 128)	[1, 3, 7, 7, 7, 7, 3, 1]
(2, 5, 3)	(128, 153)	[1, 3, 5, 5, 5, 3, 3, 1]
(4, 3, 7)	(128, 104)	
(4, 3, 15)	(128, 103)	
(3, 4, 1)	(128, 42)	[1, 3, 7, 15, 15, 7, 3, 1]
(3, 4, 3)	(128, 99)	[1, 3, 5, 7, 5, 3, 3, 1]
(3, 4, 7)	(128, 102)	
(3, 4, 5)	(128, 44)	[1, 3, 7, 11, 7, 7, 3, 1]
(4, 3, 3)	(128, 100)	[1, 3, 3, 5, 5, 3, 3, 1]
(4, 3, 5)	(128, 45)	[1, 3, 3, 7, 7, 7, 3, 1]
(5, 2, 17)	(128, 129)	
(4, 3, 9)	(128, 43)	[1, 3, 7, 7, 15, 7, 3, 1]
(5, 2, 7)	(128, 158)	[1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 1]
(6, 1, 33)	(128, 160)	
(5, 2, 9)	(128, 130)	[1, 1, 3, 3, 7, 7, 3, 1]
(6, 1, 31)	(128, 162)	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1]
(6, 1, 63)	(128, 161)	

3.3 問題 (C) について

(C): $G(p, m, n, \lambda, k)$ のクラスに対して、非同型だが $\zeta_{G_1}(s) = \zeta_{G_2}(s)$ となる必要十分条件は何か？

問題 (C) は、非分裂拡大を含む一般のメタサイクル p -群を、本稿の枠組みに統合できるかという点にある。(2.1) の一対一対応は、分裂する短完全系列の場合にのみ与えられる。したがって、非分裂拡大を含む一般のメタサイクル p -群には、この方法をそのまま適用できない。

参考として、(1.3) の表示を用い、Example 1.12 の $(p, m, n) = (2, 5, 3)$ を非分裂の場合も含めて GAP で検証すると、以下の表を得る。この範囲では、分裂型の同型類と非分裂型の同型類の間に、非同型かつゼータ一致となる例は現れない。

Table 3: $(p, m, n) = (2, 5, 3)$ における分裂型・非分裂型の部分群個数分布

パラメータ	SmallGroup(256, id)	部分群個数分布 $[a_0, a_1, \dots, a_8]$
分裂型 $G(2, 5, 3, k)$ の代表		
$k = 1$	SmallGroup(256, 316)	$[1, 3, 7, 15, 15, 15, 7, 3, 1]$
$k = 5$	SmallGroup(256, 321)	
$k = 9$	SmallGroup(256, 318)	
$k = 17$	SmallGroup(256, 317)	
$k = 3$	SmallGroup(256, 445)	$[1, 3, 7, 23, 23, 15, 7, 3, 1]$
$k = 7$	SmallGroup(256, 451)	$[1, 3, 7, 39, 23, 15, 7, 3, 1]$
$k = 15$	SmallGroup(256, 449)	
$k = 31$	SmallGroup(256, 448)	
非分裂型		
$(k, \lambda) = (1, 0)$	SmallGroup(256, 1)	$[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$
$(k, \lambda) = (1, 1)$	SmallGroup(256, 537)	$[1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1]$
$(k, \lambda) = (17, 1)$	SmallGroup(256, 538)	
$(k, \lambda) = (1, 2)$	SmallGroup(256, 497)	$[1, 3, 7, 7, 7, 7, 7, 3, 1]$
$(k, \lambda) = (9, 2)$	SmallGroup(256, 499)	
$(k, \lambda) = (17, 2)$	SmallGroup(256, 498)	
$(k, \lambda) = (7, 4)$	SmallGroup(256, 452)	$[1, 3, 7, 7, 23, 15, 7, 3, 1]$
$(k, \lambda) = (15, 4)$	SmallGroup(256, 450)	

3.4 問題 (D) について

(D): 任意の p -群で構成される半直積群 $P_1 \rtimes P_2$ や、 任意の有限群に対して、非同型だが

$$\zeta_{G_1}(s) = \zeta_{G_2}(s) \text{ となる必要十分条件は何か?}$$

本稿で扱った $G(p, m, n, k)$ では、巡回群の部分群が一意に定まり、その結果として (2.5) のような明示的な和の形に還元できた。一般の半直積 $P_1 \rtimes P_2$ では部分群の分岐が増大するため、同程度に単純な公式へ還元できるとは限らない。したがって、本稿の主結果は、分裂型メタサイクル群がもつ構造の良さに強く依存している。

現在は、位数が 2 の冪である一般化四元数群どうしの半直積 $Q_{2^m} \rtimes Q_{2^n}$ に対して、非同型でありながら群のゼータ関数が一致するための必要十分条件の特定を試みている。

このクラスの同型類分類は一般には未解決である。非同型であるが群のゼータ関数が一致するペアを系統

的に調べるには、同型類の分類が不可欠である．本稿では $m = 3$ の場合に限り、任意の $n \geq 3$ に対して分類が完了しているため、その概略を述べる．

ただし、この範囲で群のゼータ関数が一致するペアがどの程度存在するかについては、現時点では計算機実験の範囲でしか確認できておらず、統一的な理論的枠組みは得られていない．計算結果は $(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5)$ の場合について、Table 4, 5, 6 にまとめる．

3.4.1 $Q_{2^m} \rtimes Q_{2^n}$ のクラスの同型類分類に関する考察

一般に以下のような群の表示を考える．

$$Q_{2^m} \rtimes_{\phi} Q_{2^n} = \left\langle a, b, x, y \left| \begin{array}{l} a^{2^{m-1}} = 1, a^{2^{m-2}} = b^2, bab^{-1} = a^{-1}, x^{2^{n-1}} = 1, x^{2^{n-2}} = y^2, yxy^{-1} = x^{-1}, \\ \phi(x)(a) = t_1, \phi(x)(b) = t_2, \phi(y)(a) = r_1, \phi(y)(b) = r_2 \end{array} \right. \right\rangle. \quad (3.1)$$

$m = 3$ の場合に限れば、任意の $n \geq 3$ に対して同型類の分類が完了している．ここではそのアウトラインを述べる．

$m = 3$ の場合、準同型 $\phi: Q_{2^n} \rightarrow \text{Aut}(Q_8)$ に対して $\Im(\phi) \subset \text{Syl}_2(\text{Aut}(Q_8)) \simeq D_8$ が成り立つ．このとき $D_8 = \langle r, s \rangle$ を

$$r: \begin{cases} a \mapsto b, \\ b \mapsto a^{-1}, \end{cases} \quad s: \begin{cases} a \mapsto a^{-1}, \\ b \mapsto b \end{cases}$$

で固定しても一般性を失わない．特に $\Im(\phi) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$ は $\{\text{id}\}, \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_2)^2, D_8$ のいずれかに同型である．これに基づき、 $(\phi(x), \phi(y))$ の代表を絞ることで次を得る．

Proposition 3.2 $Q_8 \rtimes Q_{2^n}$ は、以下の $\mathcal{T}_n$ に属する作用 ψ で構成される群のいずれかに必ず同型である．また $\mathcal{T}_n$ に属する作用 ψ で構成される群はすべて非同型である．候補集合 $\mathcal{T}_n$ は次の通りである．

(1) $(m, n) = (3, 3)$ のとき

$$\mathcal{T}_3 = \{(\text{id}, \text{id}), (s, \text{id}), (rs, \text{id}), (r^2, rs)\}. \quad (3.2)$$

(2) $(m, n) = (3, 4)$ のとき

$$\mathcal{T}_4 = \{(\text{id}, \text{id}), (s, \text{id}), (rs, \text{id}), (\text{id}, s), (\text{id}, rs), (rs, r^2), (r, s)\}. \quad (3.3)$$

(3) $(m, n) = (3, n)$ かつ $n \geq 5$ のとき

$$\mathcal{T}_n = \{(\text{id}, \text{id}), (s, \text{id}), (rs, \text{id}), (\text{id}, s), (\text{id}, rs), (r, s)\}. \quad (3.4)$$

各 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_n$ に対し

$$G_{(3,n)}^{(\alpha,\beta)} := Q_8 \rtimes_{\psi} Q_{2^n} \quad (\psi(x) = \alpha, \psi(y) = \beta)$$

とおくと, $Q_8 \rtimes Q_{2^n}$ の形で書ける群は, (3.2), (3.3), (3.4) に対応する $\mathcal{T}_n$ を用いて得られる群で尽きる.
 $(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5)$ の場合でこの群の表示から構成される群の, 部分群の個数分布に関しては以下の通りになる.

Table 4: $(m, n)=(3,3)$ における $Q_8 \rtimes Q_{2^3}$ の smallgroupID と部分群個数分布

(α, β)	smallgroupID	部分群個数分布 $[a_0, \dots, a_6]$
(id, id)	(64, 239)	[1, 3, 31, 47, 35, 15, 1]
(s, id)	(64, 238)	[1, 3, 31, 31, 35, 15, 1]
(rs, id)	(64, 156)	[1, 3, 23, 27, 15, 7, 1]
(r ² , rs)	(64, 158)	

Table 5: $(m, n)=(3,4)$ における $Q_8 \rtimes Q_{2^4}$ の smallgroupID と部分群個数分布

(α, β)	smallgroupID	部分群個数分布 $[a_0, \dots, a_7]$
(id, id)	(128, 2114)	[1, 3, 47, 91, 71, 51, 15, 1]
(s, id)	(128, 2095)	[1, 3, 47, 75, 79, 51, 15, 1]
(rs, id)	(128, 377)	[1, 3, 39, 71, 55, 31, 7, 1]
(id, s)	(128, 2127)	[1, 3, 47, 59, 103, 51, 15, 1]
(id, rs)	(128, 402)	[1, 3, 31, 51, 43, 23, 7, 1]
(rs, r ²)	(128, 380)	[1, 3, 39, 55, 55, 31, 7, 1]
(r, s)	(128, 365)	[1, 3, 39, 71, 63, 31, 7, 1]

Table 6: $(m, n)=(3,5)$ における $Q_8 \rtimes Q_{2^5}$ の smallgroupID と部分群個数分布

(α, β)	smallgroupID	部分群個数分布 $[a_0, \dots, a_8]$
(id, id)	(256, 26937)	[1, 3, 79, 163, 139, 103, 51, 15, 1]
(s, id)	(256, 26918)	[1, 3, 79, 131, 171, 111, 51, 15, 1]
(rs, id)	(256, 5346)	[1, 3, 63, 123, 111, 79, 31, 7, 1]
(id, s)	(256, 26950)	[1, 3, 79, 99, 203, 135, 51, 15, 1]
(id, rs)	(256, 5428)	[1, 3, 47, 83, 83, 59, 23, 7, 1]

(r, s)	$(256, 5322)$	$[1, 3, 63, 91, 143, 95, 31, 7, 1]$
----------	---------------	-------------------------------------

$m \geq 4$ の場合は, $\text{Aut}(Q_{2^m}) \simeq \mathbb{Z}/2^{m-1}\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2^{m-1}\mathbb{Z})^\times$ となり, $m = 3$ の場合とは議論が異なる. 同様の枠組みで $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle$ の形までは特定しているが, $(\phi(x), \phi(y))$ の代表の決定には至っていない.

3.5 問題 (E) について

(E): $G(p, m, n, k)$ のクラスにおいて, 群のゼータ関数の一致と部分群束の同型の間にあるギャップは何か?

G_1, G_2 がともに同位数の p -群である場合には, 部分群束の同型性がゼータ関数の一致を導く. しかし一般に逆は成立しない. 詳細は (Nogata, 2025) の Lemma 3.10 と Corollary 3.12 を参照されたい.

(1.8) によれば $(p, m, n) = (2, 5, 3)$ の場合, 群のゼータ関数が一致する類は以下のように定まる.

$$\{1, 5, 9, 17\}, \quad \{3\}, \quad \{7, 15, 31\}$$

この範囲で部分群束の同型性を検証すると, GAP により次が得られる.

$$\{1, 5, 9, 17\}, \{3\}, \{7\}, \{15\}, \{31\}. \quad (3.5)$$

したがって, 群のゼータ関数が一致する場合に, 部分群の束が同型である場合とそうで無い場合の両方が存在する. 特に $\{7, 15, 31\}$ に対応する 3 つの群は互いに部分群束が同型ではない. 他の $(2, m, n)$ でも同様の検証を行った結果, 束同型性は $v_2(k+1)$ の一致によって定まることが予測されるが, 理論的証明には至っていない.

References

- (Berkovich, 2011) Y. Berkovich, The number of subgroups of given order in a metacyclic p -group. *Glasnik matematički* **46**(66) (2011), no. 1, 79–101.
- (Dyubyuk, 1950) P. E. Dyubyuk, On the number of subgroups of given index of a finite p -group. *Mat. Sb. (N.S.)* **27**(69) (1950), no. 1, 129–138.
- (Grunewald et al., 1988) F. J. Grunewald, D. Segal, and G. C. Smith, Subgroups of finite index in nilpotent groups. *Inventiones Mathematicae* **93** (1988), no. 1, 185–223.
- (Hall, 1949) M. Hall, Jr., Subgroups of finite index in free groups. *Canadian Journal of Mathematics* **1** (1949), 187–190.

- (Hempel, 2000) C. E. Hempel, Metacyclic groups. *Communications in Algebra* **28** (2000), no. 8, 3865–3897.
- (Hironaka, 2017) Y. Hironaka, Zeta functions of finite groups by enumerating subgroups. *Communications in Algebra* **45** (2017), no. 8, 3365–3376.
- (Humphries and Skabelund, 2015) S. P. Humphries and D. C. Skabelund, Character tables of metacyclic groups. *Glasgow Mathematical Journal* **57** (2015), no. 2, 387–400.
- (Imrich, 1978) W. Imrich, On the number of subgroups of given index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *Archiv der Mathematik* **31** (1978), 224–231.
- (Mann, 2010) A. Mann, The number of subgroups of metacyclic groups. In *Character Theory of Finite Groups*, Contemp. Math., vol. 524, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 93–95.
- (Miller, 1919) G. A. Miller, Form of the number of subgroups of prime power groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **26** (1919), no. 2, 66–72.
- (Nogata, 2025) Y. Nogata, Non-isomorphic metacyclic p -groups of split type with the same group zeta function. *arXiv preprint* arXiv:2512.24546 (2025).
- (Robinson, 1996) D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer, 1996.
- (Smith, 1983) G. C. Smith, *Zeta functions of torsion free finitely generated nilpotent groups*. Ph.D. thesis, Manchester (UMIST), 1983.
- (Stothers, 1977) W. W. Stothers, The number of subgroups of given index in the modular group. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics* **78** 1977, no. 1–2, 105–112.
- (Wall, 1961) G. E. Wall, Some applications of the Eulerian functions of a finite group. *Journal of the Australian Mathematical Society* **2** (1961), 35–59.