

Mathon-Rosa グラフの最大コクリークについて

On the maximum coclique of Mathon-Rosa graph

岡山県立大学 中空 大幸

Hiroyuki Nakasora

Okayama Prefectural University

1 序文

本稿の内容は熊本大学の千吉良教授との共同研究で、論文は準備中である。

$\Gamma = (V, E)$ を、 V を頂点集合 E を辺集合とする完全かつ空でないグラフとする。ここで、 $|V| = v$ で任意の頂点 $x, y \in V$ に対して、 x, y の共通する隣接点の個数が

$$|\Gamma_x \cap \Gamma_y| = \begin{cases} a & x = y \\ c & (x, y) \in E \\ d & (x, y) \notin E \end{cases}$$

(ここで、 Γ_x は x と隣接する Γ の頂点の集合) で与えられるとき、 Γ をパラメータ (v, a, c, d) をもつ強正則グラフ (strongly regular graph) という。

X を n 個の点集合とし、 $\mathcal{B}$ は X の k 点の部分集合の族 (ブロックの集合) で、性質として任意の t 個の点は丁度 λ 個のブロックに含まれるとする。このとき、 $(X, \mathcal{B})$ を t -(n, k, λ) design と呼ぶ。

$\Gamma = (V, E)$ をパラメータ (v, a, c, d) , $a < v/2$ をもつ強正則グラフとする。すると、 Γ の固有値は a と $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(c - d \pm \sqrt{(c - d)^2 + 4(a - d)})$, $(\alpha < \beta)$ で与えられる。 Γ の誘導部分グラフ C と C' は任意の2つの頂点 $x, y \in V(C) (\in V(C'))$ に対して、 $(x, y) \in E (\notin E)$ のとき C (C') をクリーク (コクリーク) という。このクリークとコクリークのサイズの大きさの上限について Delsarte [6] による定理 (Delsarte bound) が知られている。([2, Proposition 1.3.2] も参照)

Theorem 1.1. (*Delsarte*)

- (1) C を Γ の最大サイズのクリークとする。すると、 $|C| \leq 1 - a/\alpha = m$ である。
- (2) C' を Γ の最大サイズのコクリークとする。すると、 $|C'| \leq (1 - a/\alpha)^{-1}v = m'$ である。

この定理より、クリークとコクリークのサイズの大きさの上限は強正則グラフのパラメータから計算できる。

Definition 1.2. $\Gamma = (V, E)$ を強正則グラフとして、 C と C' をそれぞれ Γ のクリークとコクリークとする。そして、結合構造 $D = (C, V \setminus C)$ と $D' = (C', V \setminus C')$ をそれぞれ次のように定義する。

- $p \in C, B \in V \setminus C$ に対して、 $(p, B) \in E \Leftrightarrow pIB$
- $p' \in C', B' \in V \setminus C'$ に対して、 $(p', B') \in E \Leftrightarrow p'IB'$

とする。ここで、 pIB は点 p とブロック B が結合関係にあるという。

この定義と Theorem 1.1 より、次の命題（参照 [3]）を得る。

Proposition 1.3. Γ のクリーク C およびコクリーク C' のサイズが Theorem 1.1 の上限の値をとる時、すなわち

- (1) $|C| = m$ ならば、 $D = (C, V \setminus C)$ は $2-(m, -\beta + m - 1, c - m + 2)$ design である。
- (2) $|C'| = m'$ ならば、 $D' = (C', V \setminus C')$ は $2-(m', -\alpha, d)$ design である。

D と D' をそれぞれ最大クリークデザイン (maximum clique design)、最大コクリークデザイン (maximum coclique design) と呼ぶ。

Remark 1.4. 最大クリークデザインと最大コクリークデザイン D と D' は repeate block を認めたデザインであることを注意しておく。

ここで本稿のタイトルにある Mathon-Rosa グラフ [8] について述べる。 Γ を Mathon-Rosa グラフとする。 Γ はパラメータ $(280, 117, 44, 52)$ を持つ強正則グラフで、固有値 $\alpha = -13, \beta = 5$ を持つ。Brouwer-Maldeghem の本 [4, 10.62] によると、 Γ はサイズ 10 のクリークとサイズ 28 のコクリークを持つ。両方とも Delsarte bound に達していて、さらにサイズ 28 のコクリークは自己同型群の作用を除いて一意であることが知られている。Proposition 1.3 より、Mathon-Rosa グラフ内で同型を除いて唯一の $2-(28, 13, 52)$ design を得る。 $\mathcal{D}$ を Mathon-Rosa グラフの最大コクリークデザインとする。全自己同型群はリー群 $Ree(3)$ で、 $\text{Aut}(\mathcal{D}) = Ree(3) = P\Gamma L_2(8) = L_2(8) : 3$ である。本稿の主目的は $\mathcal{D}$ をリー群 $Ree(3)$ 方面から別構成をすることである。

2 $PG(2, 8)$ からの Ree ユニタルの構成法

ユニタルとは $2-(q^3 + 1, q + 1, 1)$ design のことである。歴史的には $PG(2, q^2)$ のユニタリ空間から作られた古典的な Hermitian unital $H(q)$ が $2-(q^3 + 1, q + 1, 1)$ design の最初に例であり、名前の由来となった。 $q = 3^{2m+1}$ に対する無限系列である Ree ユニタルは Luneburg [7] によって G_2 型の Ree 群の作用の下で発見された。

本稿で用いる Ree ユニタルは $q = 3$ のとき、すなわち $2-(28, 4, 1)$ design である。デザインの結合行列から生成される符号のランクを 2-rank と呼ぶ。 $2-(28, 4, 1)$ designs の分類は 2-rank の低いところ（参照 [11]）でされている。Ree ユニタルは 2-rank の値が 19 で最も小さく（古典的な Hermitian unital は 21）かつ唯一つである。これは Brouwer[1] に予想されて、McGuire, Tonchev, Ward [9] によって解決された。

Ree ユニタル $2-(28, 4, 1)$ design は古典的な Hermitian unital のように $PG(2, 3^2)$ への埋め込みは存在なくて、なぜか $PG(2, 8)$ の埋め込みが存在することが知られている。多数の構成法があるが、本稿では [5, 10] を基にした Ree ユニタルの構成を行う。

まず、 $\text{PG}(2, q)$ での用語であるが、 k -arc とはどの 3 点も一直線上にない k 点の集合で、conic は $(q+1)$ -arc である。以降 $\text{PG}(2, 8)$ の内容である。 $\text{PG}(2, 8)$ 上の点 (x_0, x_1, x_2) を考えて $x_1^2 + x_0x_2 = 0$ を満たす点は conic となり

$$\mathcal{C} = \{(1, t, t^2) \mid t \in \mathbb{F}_8\} \cup \{(0, 0, 1)\}$$

とする。 $\mathcal{C}$ の各点の tangent (交わらない直線) は共通の点 $(0, 1, 0)$ を持つ。集合 $\mathcal{O} = \mathcal{C} \cup \{(0, 1, 0)\}$ は $\text{PG}(2, 8)$ の hyper oval と呼ばれ、点 $(0, 1, 0)$ は $\mathcal{C}$ の核と呼ばれる。 $\text{PG}(2, 8)$ の hyper oval は同型を除いて唯一つであるが、特に $\mathcal{O}$ は regular hyperoval と呼ばれる。

そして、regular hyperoval $\mathcal{O}$ は 10 点の集合で $\text{PG}(2, 8)$ の各直線と 0 または 2 点で交わる。点 p が $p \notin \mathcal{O}$ のとき external と呼び、直線 ℓ が external であるとは $\ell \cap \mathcal{O} = \emptyset$ のときである。 $\mathcal{P}$ を external lines の集合とし、 $\mathcal{Q}$ を external points の集合とすると、 $|\mathcal{P}| = 28$ と $|\mathcal{Q}| = 63$ である。各 external point は 4 本の external lines と incident (結合関係) である。すると、結合構造 $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ は Ree ユニタル $\mathcal{U}$ で 2-(28, 4, 1) design である。すなわち $\text{Aut}(\mathcal{U}) = \text{Ree}(3)$ となっている。

$\mathbb{F}_8$ の計算は根 $w \in \mathbb{F}_8$ を固定して多項式は $X^3 + X + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_8$ を用いる。

$$\begin{aligned} h_1 &= (1, 0, 0), h_2 = (1, 1, 1), h_3 = (1, w, w^2), h_4 = (1, w^2, w^4), h_5 = (1, w^3, w^6), \\ h_6 &= (1, w^4, w), h_7 = (1, w^5, w^3), h_8 = (1, w^6, w^5), h_9 = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

と置いて、次の補題を与える。

Lemma 2.1. $\mathcal{U} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ を regular hyperoval $\mathcal{O}$ から得られる Ree ユニタルとする。すると $\mathcal{U}$ は 9 個の平行類

$$H_i = \{h_i + t(0, 1, 0) \mid t \in \mathbb{F}_8, t \neq 0\}$$

を持つ。

3 Ree ユニタルから構成される 2-designs

前節で構成した Ree ユニタル $\mathcal{U} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ から複数の 2-design をさらに構成する。前節では $\text{PG}(2, 8)$ から作るとき最後に点集合と直線集合を入れ替えたので、 $\mathcal{U}$ は $\mathcal{P}$ が点集合で $\mathcal{Q}$ がブロック集合のデザインであることを注意しておく。異なる 2 点 x, y を含むブロックを $\langle x, y \rangle$ と表わす。 $\mathcal{U}$ は 2-(28, 4, 1) design で $\lambda = 1$ であることから、任意の異なる 2 点 $p, p' \in \mathcal{P}$ に対して、唯一つのブロック $B = \langle p, p' \rangle$ が定まる。

Lemma 2.1 より、このブロック B は、ある平行類 H_j ($1 \leq j \leq 9$) に含まれる。 $R \in H_j$ を B と異なるブロックとし、 r_1, r_2, r_3, r_4 を R の 4 点とする。

$$L_{p,p'}(R) = \{\langle p, r_i \rangle : 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\langle p', r_i \rangle : 1 \leq i \leq 4\}$$

として、 $N_{L_{p,p'}(R)}$ を $L_{p,p'}(R)$ の 8 個のブロックに含まれる異なる平行類の個数とする。すると、次の補題を得る。

Lemma 3.1. $N_{L_{p,p'}(R)} = 4$ または 8 である。

Proof. ユニタル $\mathcal{U}$ の自己同型群 $\text{Aut}(\mathcal{U})$ はブロック $\mathcal{Q}$ 上 transitive なので、一般性を失うことなく 2 点 $p = (1, 1, 1), p' = (1, 1, w^3)$ に対して調べる。 $(p$ と p' を含む唯一つに定まるブロックは $B = [1, 1, 0] = \langle p, p' \rangle$)

Lemma 2.1 より、 $R \in H_1$ よって、 $R_h = [1, w^h, 0] (1 \leq h \leq 6)$ を B と異なる H_1 の 6 個のブロック集合とする。直接的な計算により次の表を得る。

R_h	$L_{p,p'}(R_h)$	$N_{L_{p,p'}(R_h)}$
R_1	$[1, w^2, w^6], [1, w^3, w], [1, w^5, w^4], [1, w^4, w^5],$ $[1, w^5, w], [1, w^6, w^6], [1, w^3, w^5], [1, 0, w^4]$	4
R_2	$[1, w^6, w^2], [1, w, w^3], [1, w^3, w], [1, w^4, w^5],$ $[1, 0, w^4], [1, w^6, w^6], [1, w, 1], [0, 1, w^4]$	8
R_3	$[1, w^6, w^2], [0, 1, 1], [1, w, w^3], [1, 0, 1],$ $[1, w^2, w^3], [1, w, 1], [1, w^4, w^2], [0, 1, w^4]$	4
R_4	$[1, w^6, w^2], [1, w^2, w^6], [1, w, w^3], [1, w^5, w^4],$ $[1, w^3, w^5], [1, w, 1], [1, w^5, w], [0, 1, w^4]$	8
R_5	$[1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, w^4, w^5], [1, w^3, w],$ $[1, w^4, w^2], [1, w^2, w^3], [1, w^6, w^6], [1, 0, w^4]$	8
R_6	$[1, w^5, w^4], [1, w^2, w^6], [1, 0, 1], [0, 1, 1],$ $[1, w^2, w^3], [1, w^4, w^2], [1, w^3, w^5], [1, w^5, w]$	8

ゆえに、 $N_{L_{p,p'}(R)} = 4$ または 8 である。 □

$N_{L_{p,p'}(R)} = 4$ を満たす 2 個のブロックの区別として、次の補題を得る。

Lemma 3.2. R', R'' を $N_{L_{p,p'}(R)} = 4$ を満たす異なる 2 個のブロックとする。

(1) 次の条件を満たす R' の異なる 2 点 a, b が存在する。

$$\langle p, a \rangle \cap \langle p', b \rangle \neq \emptyset \text{ かつ } \langle p, b \rangle \cap \langle p', a \rangle \neq \emptyset$$

(2) R'' の 4 点 r_1, r_2, r_3, r_4 が

$$\langle p, r_1 \rangle \cap \langle p', r_2 \rangle \neq \emptyset \text{ かつ } \langle p, r_3 \rangle \cap \langle p', r_4 \rangle \neq \emptyset$$

を満たすように取れる。

Definition 3.3. 任意の 2 点 $p, p' \in \mathcal{P}$ に対して、 $a(p, p'), b(p, p')$ を Lemma 3.2 (1) を満たす 2 点とする。 $a(p, p'), b(p, p')$ に対して三角形ブロックをそれぞれ

$$\mathcal{T}_{a(p,p')} = \langle p, p' \rangle \cup \langle p, a(p, p') \rangle \cup \langle p', a(p, p') \rangle,$$

$$\mathcal{T}_{b(p,p')} = \langle p, p' \rangle \cup \langle p, b(p, p') \rangle \cup \langle p', b(p, p') \rangle.$$

とする。

三角形ブロックにおいて $p, p', a(p, p')$ を $\mathcal{T}_{a(p,p')}$ の頂点と呼ぶ。(同様に $p, p', b(p, p')$ も $\mathcal{T}_{b(p,p')}$ の頂点と呼ぶ。)

$\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_{a(p,p')}, \mathcal{T}_{b(p,p')} \mid p, p' \in \mathcal{P}\}$ と置く。すると $\mathcal{T}$ の元の個数は簡単な計算で $|\mathcal{T}| = \frac{\binom{28}{2}}{3} \times 2 = 252$ である。証明は本稿では省略するが次の命題のように 2-design を得る。

Proposition 3.4. $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ は 2-(28, 9, 24) design である。

4 Mathon-Rosa グラフの最大コクリークデザイン

3 辺 $\ell_{i_j} \in H_{i_j}$ ($j = 1, 2, 3$) で三角形ブロックを表すと $B = \ell_{i_1} \cup \ell_{i_2} \cup \ell_{i_3}$ である。そこで、 H_{i_j} は Lemma 2.1 の平行類である。 $B' = m_{i_1} \cup m_{i_2} \cup m_{i_3}$ が三角形ブロックになるような 3 辺 $m_{i_j} \in H_{i_j}$ ($j = 1, 2, 3$) が存在するとき、 B' を B の平行三角形ブロックと呼ぶ。

Lemma 4.1. 任意の 2 点 $p, p' \in \mathcal{P}$ に対して、 $a(p, p')$, $b(p, p')$ を Lemma 3.2 (1) を満たす 2 点として、 $c_1(p, p')$, $c_2(p, p') \in \langle a(p, p'), b(p, p') \rangle$ とする。

(1) 三角形ブロック $T_{a(p, p')}$ に対して、 $|T_{a(p, p')} \cup U \cup U'| = 27$ を満たし、 $b(p, p')$ が U の頂点の 1 つで $c_1(p, p')$ が U' の頂点の 1 つであるような平行三角形ブロックの組 (U, U') が唯一つ存在する。

(2) 三角形ブロック $T_{b(p, p')}$ に対して、 $|T_{b(p, p')} \cup W \cup W'| = 27$ を満たし、 $a(p, p')$ が W の頂点の 1 つで $c_2(p, p')$ が W' の頂点の 1 つであるような平行三角形ブロックの組 (W, W') が唯一つ存在する。

Lemma 4.1 (1) の $c_2(p, p')$ と (2) の $c_1(p, p')$ を孤立点と呼ぶ。Proposition 3.4 で得た 2-(28, 9, 24) design $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ に対して、 $\mathcal{T}$ の各ブロックに孤立点を付け加えたデザインを考える。よって、

$$\mathcal{W} = \{T_{a(p, p')} \cup \{c_2(p, p')\}, T_{b(p, p')} \cup \{c_1(p, p')\} \mid p, p' \in \mathcal{P}\}$$

とする。 $|\mathcal{W}|/|\mathcal{P}| = 9$ と Lemma 4.1 より、各孤立点 p に対して、 $\mathcal{W}$ の (p を除いた) 排反する 3 個のブロックの組が 3 個ある。 λ_2 を $\mathcal{P}$ の任意の 2 点を含む $\mathcal{W}$ のブロックの個数とすると、 $\lambda_2 = 24 + 3 + 3 = 30$ より、容易に次の命題を得る。

Proposition 4.2. $(\mathcal{P}, \mathcal{W})$ は 2-(28, 10, 30) design である。

さらに、 $\mathcal{W}$ の各ブロックに平行三角形ブロックの 3 頂点ずつ付け加えてブロックサイズが 13 のデザインを考える。

Proposition 4.3. Lemma 4.1 (1) において、 $u_1(p, p')$, $u_2(p, p')$ を U の 2 頂点 ($b(p, p')$ 以外) で $u'_1(p, p')$, $u'_2(p, p')$ を U' の 2 頂点 ($c_1(p, p')$ 以外) とする。同様に、Lemma 4.1 (2) において、 $w_1(p, p')$, $w_2(p, p')$ を W の 2 頂点 ($a(p, p')$ 以外) で $w'_1(p, p')$, $w'_2(p, p')$ を W' の 2 頂点 ($c_2(p, p')$ 以外) とする。

(1)

$$\begin{aligned} Y_{a(p, p')} &= T_{a(p, p')} \cup \{b(p, p'), c_2(p, p'), u_1(p, p'), u_2(p, p')\} \\ Y_{b(p, p')} &= T_{b(p, p')} \cup \{a(p, p'), c_1(p, p'), w_1(p, p'), w_2(p, p')\} \end{aligned}$$

として、 $\mathcal{Y} = \{Y_{a(p, p')}, Y_{b(p, p')} \mid p, p' \in \mathcal{P}\}$ とする。

すると、 $(\mathcal{P}, \mathcal{Y})$ は 2-(28, 13, 52) design である。

(2)

$$\begin{aligned} Z_{a(p, p')} &= T_{a(p, p')} \cup \{c_1(p, p'), c_2(p, p'), u'_1(p, p'), u'_2(p, p')\} \\ Z_{b(p, p')} &= T_{b(p, p')} \cup \{c_1(p, p'), c_2(p, p'), w'_1(p, p'), w'_2(p, p')\} \end{aligned}$$

として、 $\mathcal{Z} = \{Z_{a(p, p')}, Z_{b(p, p')} \mid p, p' \in \mathcal{P}\}$ とする。

すると、 $(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$ は 2-(28, 13, 52) design である。

(3) $(\mathcal{P}, \mathcal{Y})$ と $(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$ は同型でない。

$(\mathcal{P}, \mathcal{Y})$ と $(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$ が非同型であることは Magma での同型判定やブロックインターセクションの分布で確認できる。命題 4.3 の 13 点の取り方以外でも、千吉良氏により非同型な $2-(28, 13, 52)$ design を複数確認している。本稿の主結果は次の定理である。

Theorem 4.4. $(\mathcal{P}, \mathcal{Z})$ が Mathon-Rosa グラフの最大コクリークデザインである。

Ree ユニタルから複数の $2-(28, 13, 52)$ design が構成されるが、Mathon-Rosa グラフの最大コクリークデザインとなる一意的なデザインを特定し、特徴付けを行った。

参考文献

- [1] A. E. Brouwer, Some unitals on 28 points and their embeddings in projective planes of order 9, In: Aigner, M., Jungnickel, D. (eds.) *Geometries and Groups*, pp. 183–188. Springer, Berlin (1981)
- [2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, 18, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [3] A. E. Brouwer, N. Horiguchi, M. Kitazume and H. Nakasora, A construction of the sporadic Suzuki graph from $U_3(4)$, *J. Combin. Theory Ser. A*, **116** (2009), 1056–1062.
- [4] A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge Univ. Press, (2022).
- [5] M. Brown, (Hyper)ovals and ovoids in projective spaces, *Finite Geometry and its Applications*, Socrates Intensive Course, 2000.
- [6] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, *Philips Res. Rep. Suppl.*, **10** (1973).
- [7] H. Lüneburg, Some remarks concerning the Reed groups of type (G_2) , *J. Algebra*, **3** (1966), 256–259.
- [8] R. Mathon and A. Rosa, A new strongly regular graph, *J. Combin. Theory Ser. A* **38** (1985), 84–86.
- [9] G. McGuire, V.D. Tonchev, H.N. Ward, Characterizing the Hermitian and Ree unitals on 28 points, *Des. Codes Cryptogr.* **13** (1998), no. 1, 57–61.
- [10] G. P. Nagy, Embeddings of Ree unitals in a projective plane over a field, *Finite Fields Appl.*, **74** (2021), Paper No.101875, 11 pp.
- [11] V.D. Tonchev, A. Wassermann, On the classification of unitals on 28 points of low rank, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **33** (2022), no. 6, 903–913.