

高次群論とその幾何学 IV 群に対するベズーの定理の「高次元化」

高村茂 京都大学理学研究科数学教室

2025 年 12 月 24 日

概要

著者が「高次群論」の構築に着手してから、ようやくそれが理論の体裁を取り始めたのは、基本定理である“群に対するベズーの定理”（ベズー型定理）を確立したときです。この定理は文字通り代数幾何のベズーの定理 ($\mathbb{CP}^2$ 中の 2 つの代数曲線の交わりに関する定理) の群論的類似物です。なお、代数幾何のベズーの定理は高次元化されています ($\mathbb{C}^n$ 中の n 個の超曲面の交わりについての定理へ)。では、群論サイドにベズー型定理の「高次元版」の定理はあるのでしょうか？ 答えはイエスです。“高次元ベズー型定理”を定式化し、示すことができました。本稿では、これを解説します—高次元ベズー型定理が確立したことにより、“群の代数幾何的側面”が一段と浮き彫りになります。

はじめに

伝統的な群論が部分群やコセットを扱うのに対し、高次群論はもっと一般に、部分群積やコセット積をはじめとする「群の“高次の”部分集合」を扱います。著者が高次群論を構築して、「群論から高次群論へ」と歩を進めた目的のひとつは、群論全般（群に制約をつけない）の“幾何学化”です—幾何学化することによって、群論に geometric insight を持ち込む。高次群論は「上部構造（シナジー）」を主軸に据えます。これは、「上部構造（層）」を主軸に据える代数幾何（とくにスキーム論）と思想的に通底します。高次群論では、有限群に対してさえ、その背後に「上部構造（シナジー）」から定まる自然な幾何を構築します—交差理論が構築され、代数幾何のチャウ環の類似物が導入されます。本稿では、その基盤となる“群に対するベズーの定理”の高次元化について解説します。

現代数学のもっとも抽象的な理論として有名なものに、グロタンディックのスキームの理論がありますが、その大きな一部は、有限集合（この場合は有限体上の方程式の零点集合）に対して、なんとか幾何を考えよう、ということが目的です。（注：太字は引用者による）

深谷賢治「これからの幾何学」p.27 日本評論社（1998）

1 序 三つのきっかけ

きっかけは、きっかけにしたからきっかけになった。
きっかけにしなければ、きっかけはきっかけにはならない。

あらゆる理論には源流となる「きっかけ」があります。高次群論の「きっかけ」は、著者が大学生のとき群論を習った際に抱いた“群論の土台に関する三つの疑問”です。それらは次の通り：

- (I) 群は2項演算 $G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ で定義されるが、より高次の3項演算 $G \times G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2, g_3) \mapsto g_1 g_2 g_3$, 4項演算 $G \times G \times G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto g_1 g_2 g_3 g_4$, もっと一般に n 項演算 $G \times G \times \cdots \times G \rightarrow G, (g_1, g_2, \dots, g_n) \mapsto g_1 g_2 \cdots g_n$ を考えることができる。**2項演算だけではなく、3項演算, 4項演算, ..., n 項演算, ... をすべて考えることにより群 G の新たな深い性質を導けないか?**

念頭にあるのは、次の事実：関数 $f(x)$ に対して、一階微分 $f'(x)$ だけでなく、**すべての微分 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を考えることにより、 $f(x)$ の深い性質（テーラー展開など）が導ける。**

- (II) 有限群 G の（真の）部分群の位数は $|G|/2$ 以下である。つまり、部分群は、 G の $|G|/2$ 以下の部分におさまっている。では、 G の $|G|/2$ 以上の部分には**どういう対象があり、その研究で G の新たな深い性質が導けないか?**

- (III) 両側コセットの位数公式 $|H||K| = m|H \cap K|$ ($m := |HK|$) と代数幾何のベズーの定理の特殊な場合 $\deg C \deg D = n|C \cap D|$ は似た形をしている（ここで、 C と D は複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 中の代数曲線で、すべての交点は同じ交差重複度 n をもつとする）。**この類似性はなにゆえか?**

さらに、(III)に関連してさまざまな疑問が派生します。まず、**一般の場合のベズーの定理に対応する群の公式は何であろうか?** また、ベズーの定理の証明では「摂動 (perturbation)」(図1)を使うが、群論で摂動に当たるものは何であろうか? さらに空想を広げると、代数幾何の「交差理論」に対応する群の理論はどのようなものであろうか——とくに、「チャウ環」は群に対してどう定義すればよいのだろうか? 高次群論はこれら**すべて**に対して答えてくれます。

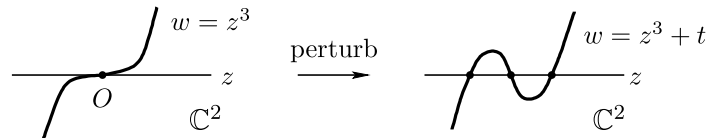


図1: $\mathbb{C}^2$ 中の $w = z^3$ と z 軸の交点 O (交差重複度3) は、摂動により3つの単純点 (交差重複度が1) に分裂する。

上の疑問 (I),(II),(III) を考察することを通じて、著者は高次群論を構築してきました。高次群論では (I),(II),(III) を “single framework” で扱うことができます。まず、(II) について、たとえば群 G の部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ を取り、「積」

$$H_1 H_2 \cdots H_n := \{h_1 h_2 \cdots h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\} \quad (1.1)$$

を考えます。この位数 $|H_1 H_2 \cdots H_n|$ は一般に $|G|/2$ 以上です。次に、(I) については、 n 項演算 $G \times G \times \cdots \times G \rightarrow G$ の制限 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ やその亜種が、高次群論で重要な役割を果たします。これらは**シナジー**と呼ばれます。後で説明するように、シナジーは (III) にも深く関連しています——これを見抜くのが、高次群論の初期の展開の核心部分でした。

さらに、ここでは次に注意しておきます：

ポイント 高次群論では、「拡大」ではなく「部分への制限」を考えることが本質的である。つまり、 n 項演算 $G \times G \times \cdots \times G \rightarrow G$ の制限、たとえば $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$. これはガロア理論や代数的整数論で「体の拡大」を考えるのと真逆である。

また、次に注意しておきます：

- シナジーの底空間である部分群積（セクト） $H_1 H_2 \cdots H_n$ は多項式 $x_1 x_2 \cdots x_n$ のアナロジーであり、コセット積（クラン） $c_1 H_1 c_2 H_2 \cdots c_n H_n$ は多項式 $c_1 x_1 c_2 x_2 \cdots c_n x_n$ (c_i : スカラー) のアナロジーです。とくに、部分群 H やコセット aH は「一変数の一次式」のアナロジーです。そして、セクトやクランはこれらの「高次版」とみなせます。
- $\mathbb{C}$ は一次元ですが、 $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ ($n \geq 2$) はその高次元化です。この観点から、部分群 H は「一次元」であり、シナジーの‘全空間’ $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ ($n \geq 2$) はその「高次元化」とみなせます。ここで、直積 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ の部分群は直積部分群とは限らないことに注意。一般に、直積部分群ではない部分群が新たに生じます (図 2 参照)。なお、こういった状況は、一変数複素解析から多変数複素解析へ移行するときにも生じます—直積領域（‘長方形’）だけではなく、本質的に新たな領域が出現します (図 3 参照)。このとき、さまざまな困難が生じますが、これは悪いことではなく、むしろ「困難」が理論の“ゆりかご”になります—困難を逆手に取る。

ポイント 部分群の積（セクト） $H_1 H_2 \cdots H_n$ や直積 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ は、部分群の「高次元化」—これにより情報が“真に”「増加」する（実際、直積群 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ の部分群は直積とは限らない）。注：しかし、このナイーブな「高次元化」ではうまく行かないこともある。より精密な「高次元化」は後で導入される。

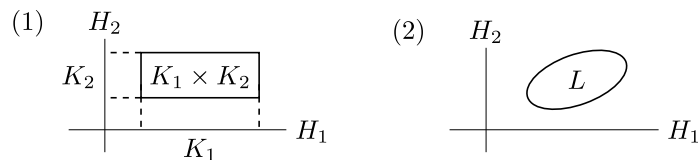


図 2: $H_1 \times H_2$ の部分群は (1) のような直積 $K_1 \times K_2$ (K_i は H_i の部分群) の形とは限らず、一般には (2) のような直積ではない部分群 L をもつ。

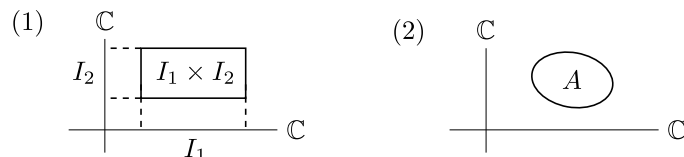


図 3: $\mathbb{C}^2$ の領域は (1) のような直積 $I_1 \times I_2$ ($I_i \subset \mathbb{C}$) の形とは限らず、(2) のような直積ではない領域 A をもつ。

補足 1.1. 群 G の分類空間の構成においても、直積は「高次元化」とみなせます。実際、その構成に現れる simplicial set では、 $\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n+1}$ の元 $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ を n 次元単体とみなします ([Ch] p.3)。ここで n 次元単体は、もちろん n が大きくなるにつれて次元が上がります。よって、「群の直積 = 高次元化」とみなせます。(分類空間の構成で重要な役割を果たす (semi)simplicial set については、[Fr] や [Br] p.42 Part II §1 参照。)

2 群に対するベズーの定理

この節では、著者が示した「群に対するベズーの定理」(ベズー型定理)を復習します。まず、ベズー型定理の“原型”から始めます。これは、両側コセットの位数公式です。代数幾何のベズーの定理の特殊な場合と並べて書くと、その類似性が一目瞭然です(下の X, Y は複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 中の代数曲線で、 X と Y のすべての交点と同じ交差重複度 n をもつとする)：

代数幾何	群論
特殊な場合のベズーの定理 $\deg X \deg Y = n X \cap Y $ (n : すべての交点に共通の 交差重複度)	両側コセット $HeK (= HK)$ の位数公式 $ H K = \ell H \cap K $ ($\ell := HK $) より一般に、両側コセット HaK に対し $ H K = m H \cap K^a $ ($m := HaK , K^a := aKa^{-1}$)

表 1:

上のように、“特殊な場合”のベズーの定理に対応するのが、両側コセット HaK の位数公式です。では、

一般の場合のベズーの定理に対応する群サイドの公式は何でしょうか？

これは、著者が [Ta11] で示したベズー型定理です。まず、設定から始めます。群 G の両側コセット HaK の $a \in G$ を G の任意の部分集合 A に取りかえて得られる HAK (単純ギルド)を考えます。ここで、 HAK は G の部分集合ですが、単なる部分集合ではなく、 H が左から、 K が右から作用します：

$$H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K, \quad hak \mapsto uhakv \quad (u \in H, v \in K). \quad (2.1)$$

この両側作用の軌道分解は HAK の両側コセット分解を与えます：

$$HAK = \coprod_{i \in I} H\alpha^{(i)}K. \quad (2.2)$$

このとき、次が成り立ちます：

群に対するベズーの定理 (ベズー型定理 [Ta11])

$$|H||A||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \quad (2.3)$$

ここで $K^{\alpha^{(i)}} := \alpha^{(i)}K\alpha^{(i)-1}$. また、 $m^{(i)}$ は $H \cap K^{\alpha^{(i)}}$ の交差重複度 ([Ta11] 参照)。

ベズー型定理 (2.3) と代数幾何のベズーの定理を並べて書くと、類似性が一目瞭然です：

代数幾何	高次群論
ベズーの定理	ベズー型定理 [Ta11]
$\deg X \deg Y = \sum_{j=1}^k n_j X \cap Y _j$	$ H A K = \sum_{i \in I} m^{(i)} H \cap K^{a^{(i)}} $

表 2: 左側のベズーの定理において、 X, Y は $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線、 $\{n_j : j = 1, 2, \dots, k\}$ は $X \cap Y$ の点の交差重複度たちの集合、 $|X \cap Y|_j$ は $X \cap Y$ の点のうち、交差重複度が n_j である点の個数。

3 “群に対するベズーの定理” の高次元化

代数幾何のベズーの定理は高次元化されています。まず、設定は次の通り： $X_1, X_2, \dots, X_n$ は n 次元複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の中の超曲面とします（したがって $\dim X_i = n-1$ ）。ただし $X_1, X_2, \dots, X_n$ の交点は高々有限個の孤立点とします。また、 X_i の定義多項式の次数を $\deg(X_i)$ と書きます。このとき、 $\deg(X_1) \deg(X_2) \cdots \deg(X_n)$ は $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$ の（重複度も込めた）交点数の和—つまり交差重複度の和—と等しくなる、というのが高次元ベズーの定理です。具体的には、 $\{n_j\}_{j \in J}$ を $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$ の交点たちの交差重複度の集合とし、交差重複度が n_j である交点の個数を $|X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n|_j$ と表すと、次が成り立ちます ([Fu] 参照)：

$$\text{高次元ベズーの定理} \quad \deg(X_1) \deg(X_2) \cdots \deg(X_n) = \sum_{j \in J} n_j |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n|_j.$$

では、

“群に対するベズーの定理” (2.3) の高次元版はあるのでしょうか？

もちろん、群の場合、一般にその次元は意味をもたないので、“高次元” はそのままでは意味をもちません。そこで、**ナイーブな** 試みから始めます。まずは HAK を一般化することを考えます。 HAK の A を “factorization” $A_1 A_2 \cdots A_l$ (ここで $A_1, A_2, \dots, A_l$ は G の任意の部分集合) に置き換えた $HA_1 A_2 \cdots A_l K$ (**ギルド**) を考えます：

$$HA_1 A_2 \cdots A_l K = \{ha_1 a_2 \cdots a_l k : h \in H, a_i \in A_i, k \in K \ (i = 1, 2, \dots, l)\}. \quad (3.1)$$

HAK と同様に、 $HA_1 A_2 \cdots A_l K$ には H が左から、 K が右から作用します：

$$H \curvearrowright HA_1 A_2 \cdots A_l K \curvearrowleft K, \quad ha_1 a_2 \cdots a_l k \mapsto uha_1 a_2 \cdots a_l kv \ (u \in H, v \in K). \quad (3.2)$$

この両側作用の軌道分解は $HA_1 A_2 \cdots A_l K$ の**両側コセット分解**を与えます：

$$HA_1 A_2 \cdots A_l K = \coprod_{j \in J} H\alpha^{(j)}K, \quad (\alpha^{(j)} \in A_1 A_2 \cdots A_l \ (j \in J)). \quad (3.3)$$

ここで、 $H, A_1, A_2, \dots, A_l, K$ が有限のとき、次が成り立ちます：

一般化されたベズー型定理 [Ta12]

$$|H||A_1||A_2| \cdots |A_l||K| = \sum_{j \in J} m^{(j)} |H \cap K^{\alpha^{(j)}}|. \quad (3.4)$$

ここで、 $K^{\alpha^{(j)}} := \alpha^{(j)} K \alpha^{(j)-1}$. また、 $m^{(j)}$ は $H \cap K^{\alpha^{(j)}}$ の‘交差重複度’—より正確には、シナジー $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_l \times K \rightarrow HA_1A_2 \cdots A_lK$, $(h, a_1, a_2, \dots, a_l, k) \mapsto ha_1a_2 \cdots a_lk$ に関する $H\alpha^{(j)}K$ の重複度 ([Ta12] 参照)。

定義 3.1. 上の $m^{(j)}, \alpha^{(j)}$ ($j \in J$) をギルド $HA_1A_2 \cdots A_lK$ の**基本データ**という。

余談 3.2. ベズー型定理の式 (3.4) に “ $H \cap K^{\alpha^{(j)}}$ の交差重複度 (交点数)” が出てきますが、数理解の位相的場の理論においても、交点数は重要な役割を果たします—2つの部分多様体の交点数の物理的解釈は、「2つの物体の間に働く力」です ([深谷] p.26 §1.38 “2つの物の間に働く力と交点数—古典的な状況” で素描されています)。この^{ひそ}な^{なら}に倣えば、ベズー型定理に現れる $H \cap K^{\alpha^{(j)}}$ は次のように「物理的に解釈」できます：

物理的に言うと、 $HA_1A_2 \cdots A_lK$ の中で、 H と K が「媒質」 $A_1A_2 \cdots A_l$ を通じて「相互作用」したときに働く「力」が交差 $\coprod_{j \in J} H \cap K^{\alpha^{(j)}}$ である。

さて、「一般化されたベズー型定理」は、「ベズー型定理の高次元化」ではありません—(3.4) の右辺に出てくるのは “2つの” 交わり $H \cap K^{\alpha^{(j)}}$ ” なので、依然として「2次元版」のベズー型定理です。それでは、そもそも高次元版はないのでしょうか？ 実は「あります」。ただし、前にも述べたように一般には群に対して “次元” は意味をもたないので、これを何とかしないといけません。そこで次に着目します：

観察 3.3. ベズー型定理 (3.4) が “double” intersection (2つの交わり) $H \cap K^{\alpha^{(j)}}$ に関する公式であることに基いて、“高次元” は “higher” intersection に置き換えたものであるべきでしょう。ここで、“higher” intersection とは triple intersection (3つの交わり), quadruple intersection (4つの交わり), ..., 一般に n -tuple intersection (n 個の交わり; ただし $n \geq 3$) を意味します。

観察 3.3 を念頭に置いて、

「高次元化」を「高次交差 (higher intersection) 化」と解釈します。

高次交差版のベズー型定理を述べるために、記号の準備から始めます。まず $\mathcal{A} = A_1A_2 \cdots A_l$ とおき、ギルド $HA_1A_2 \cdots A_lK$ を HAK と表します。また、 $\|\mathcal{A}\| := |A_1||A_2| \cdots |A_l|$ とおくと、(3.4) は次のように表せます：

$$|H| \|\mathcal{A}\| |K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \quad (3.5)$$

以上を念頭に置いて、ギルド HAK を次のように一般化します—これを**ポリギルド** (polyguild) と言います：

$$H_1A_1H_2A_2H_3A_3 \cdots H_{n-1}A_{n-1}H_n. \quad (3.6)$$

ここで、 H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は G の部分群、 $\mathcal{A}_j := A_{j,1}A_{j,2} \cdots A_{j,l^{(j)}}$ (各 $A_{j,k}$ ($k = 1, 2, \dots, l^{(j)}$) は G の任意の部分集合)。ポリギルド (3.6) は $H_1, H_2, \dots, H_n$ の “ambient n -dimensional space” の役割を果たします—高次元ベズーの定理において $\mathbb{CP}^n$ が超曲面 $X_1, X_2, \dots, X_n$ たちの ambient

space であることに対応。実際、次のような対応があります ($\alpha_1^{(i_1)}, \alpha_2^{(i_2)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}$ はあとで導入):

代数幾何	高次群論
$\mathbb{CP}^n$: 複素射影空間	$H_1 \mathcal{A}_1 H_2 \mathcal{A}_2 H_3 \mathcal{A}_3 \cdots H_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} H_n$: ポリギルド
$X_1, X_2, \dots, X_n$: 超曲面	$H_1, H_2, \dots, H_n$: 部分群
$X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$:	$H_1 \cap H_2^{\alpha_1^{(i_1)}} \cap H_3^{\alpha_2^{(i_2)}} \cap \cdots \cap H_n^{\alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}}$:
$X_1, X_2, \dots, X_n$ の交差	$H_1, H_2, \dots, H_n$ の “ひねり” 交差

表 3:

ポリギルド $H_1 \mathcal{A}_1 H_2 \mathcal{A}_2 H_3 \mathcal{A}_3 \cdots H_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} H_n$ は “部分ギルド” $H_i \mathcal{A}_i H_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) を含むことに注意しておきます—この事実は、これから定式化するベズー型定理の「高次元化」で使います。以下では、ポリギルドは有限とします（このとき、以下に現れる交差重複度は有限となります）。

定義 3.4. ポリギルド $H_1 \mathcal{A}_1 H_2 \mathcal{A}_2 H_3 \mathcal{A}_3 \cdots H_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} H_n$ に対し、各 “部分ギルド” $H_j \mathcal{A}_j H_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) の基本データ $\alpha_j^{(i_j)}, m_j^{(i_j)}$ ($i_j \in I_j$) を取る (定義 3.1)。これらの集まり

$$\alpha_j^{(i_j)} \in \mathcal{A}_j, m_j^{(i_j)} \quad (i_j \in I_j, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.7)$$

をポリギルド $H_1 \mathcal{A}_1 H_2 \mathcal{A}_2 H_3 \mathcal{A}_3 \cdots H_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} H_n$ の**基本データ**と言う。

次に、各 $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n-1}$ に対し、

$$n^{(\mathbf{i})} := m_1^{(i_1)} m_2^{(i_2)} \cdots m_{n-1}^{(i_{n-1})} \quad (3.8)$$

とおき、これを、 $H_1 \cap H_2^{\alpha_1^{(i_1)}} \cap H_3^{\alpha_2^{(i_2)}} \cap \cdots \cap H_n^{\alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}}$ の**交差重複度**と言う。

このとき、ベズー型定理は次のように一般化されます：

高次元ベズー型定理 [Ta13] 有限ポリギルド $H_1 \mathcal{A}_1 H_2 \mathcal{A}_2 H_3 \mathcal{A}_3 \cdots H_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} H_n$ に対し、 $\|\mathcal{A}_j\| := |A_{j,1}| |A_{j,2}| \cdots |A_{j,I(j)}|$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) とおくと、次が成り立つ ($n^{(\mathbf{i})}$ は $H_1 \cap H_2^{\alpha_1^{(i_1)}} \cap H_3^{\alpha_2^{(i_2)}} \cap \cdots \cap H_n^{\alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}}$ の交差重複度; (3.8) 参照)：

$$\begin{aligned} & |H_1| \|\mathcal{A}_1\| |H_2| \|\mathcal{A}_2\| |H_3| \|\mathcal{A}_3\| \cdots |H_{n-1}| \|\mathcal{A}_{n-1}\| |H_n| \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{i}=(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}) \\ \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n-1}}} n^{(\mathbf{i})} |H_1 \cap H_2^{\alpha_1^{(i_1)}} \cap H_3^{\alpha_2^{(i_2)}} \cap \cdots \cap H_n^{\alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}}|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

余談 3.5. 余談 3.2 の^{ひそ} ^{なら} 顰みに倣って物理的に言うと、公式 (3.9) の $H_1 \cap H_2^{\alpha_1^{(i_1)}} \cap H_3^{\alpha_2^{(i_2)}} \cap \cdots \cap H_n^{\alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}}$ は、ポリギルド $H_1 \mathcal{A}_1 H_2 \mathcal{A}_2 H_3 \mathcal{A}_3 \cdots H_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} H_n$ の中で、‘媒質’ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n-1}$ を通じて n 個の ‘物体’ $H_1, H_2, \dots, H_n$ のあいだに働く ‘力’ です（これは n 体問題の状況）。

(3.9) は、代数幾何的にはベズー型定理 (3.4) の「高次元化」に相当します。しかし、代数幾何の高次元ベズーの定理では超曲面 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の次元が上がるのに対し、

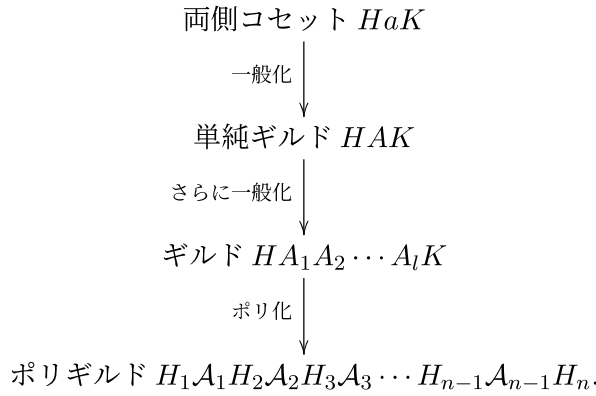
高次元ベズー型定理では部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の次元は変わりません（と言うより、次元という概念自体がない）。したがって、「高次元化」と言うより、むしろ物理的に「多体問題化」と言ったほうがしっくりきます。

まとめておくと、

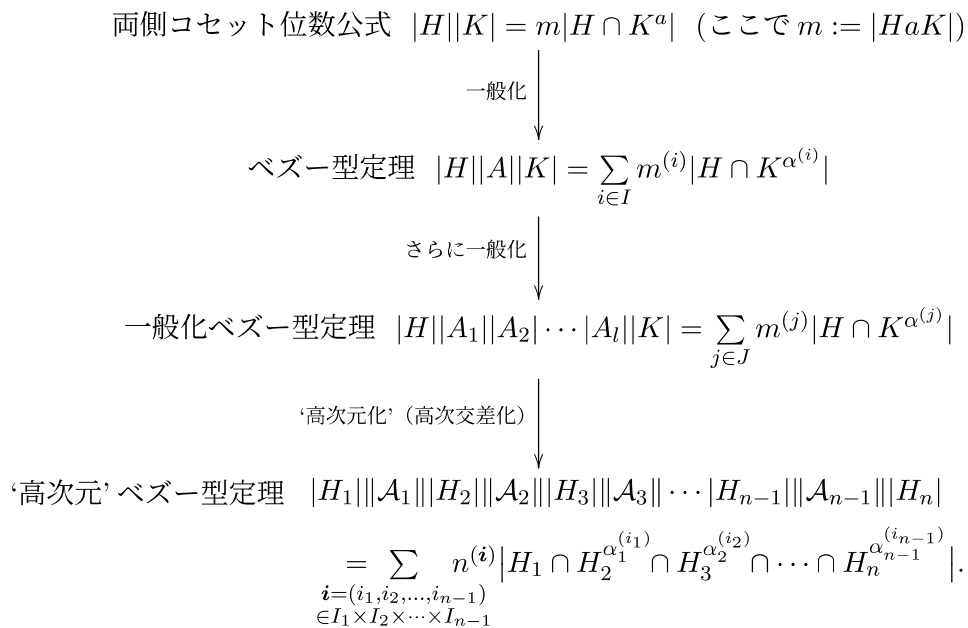
- ベズー型定理の式 (3.4) の二重交差 $H \cap K^{\alpha^{(i)}}$ から高次元ベズー型定理の式 (3.9) の多重交差 $H_1 \cap H_2^{\alpha_1^{(i_1)}} \cap H_3^{\alpha_2^{(i_2)}} \cap \dots \cap H_n^{\alpha_{n-1}^{(i_{n-1})}}$ への一般化は「高次交差化」である。
- 「高次交差化」は、物理的に言うと「多体問題化」である。

要約 「概念の変遷」と「位数公式の変遷」

著者がおこなった「概念の変遷（一般化）」について、図式でまとめておくと次のようになります：



これらに対して著者が導出した位数公式の変遷は、次の通りです：



参考文献

- [Br] S. Buoncrisiano, *Fragments of geometric topology from the sixties*, (2003)
<https://ftp.icm.edu.pl/packages/EMIS/journals/UW/gt/ftp/main/m6/m6-main.pdf>
- [Ch] T. Church, *Classifying spaces of topological groups*, (2010)
<https://math.stanford.edu/~church/notes/Church%20-%20Stable%20Homology,%20Lecture%202.pdf>
- [EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes*, Springer-Verlag (1999)
- [Fa] H. Fausk, *Survey on the burnside ring of compact lie groups*, Journal of Lie Theory **18** (2008), 351–368
- [Fr] G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, (2008)
<https://faculty.tcu.edu/gfriedman/papers/simp.pdf>
- [深谷] 深谷賢治, “1997.10 「位相的場の理論」 集中講義ノート”, 2000 年 10 月 15 日 ver. 2.72
 講義録作成: 横山美佐子 <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/shzuok.pdf>
- [Fu] W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, AMS. (1984)
- [Hi] R. Hirakawa, *Stabilizer posets and the local moduli of Fermat curves*, Tokyo J. Math. **46**, (2) (2023), 425–463
- [HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups*, Int. J. Group Theory **13** (2) (2024), 133–160
https://ijgt.ui.ac.ir/article_27671_bbd77513b3fce38eba531a046c3e215f.pdf
- [HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball*, J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233
<https://projecteuclid.org/journalArticle/Download?urlId=10.2969%2Fjmsj%2F06931213>
- [HiTa2] ———, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups*, Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367
<https://ems.press/content/serial-article-files/41339>
- [HiTa3] ———, *Linear quotient families and stabilizer posets*, Kodai Math. J. **48** (2025), 145–177
<https://projecteuclid.org/journals/kodai-mathematical-journal/volume-48/issue-2/Linear-quotient-families-and-stabilizer-posets/10.2996/kmj48201.short>
- [HiTa4] ———, *Atlas for Moduli Geometry of Riemann Surfaces*, Preprint, (2025)

- [齋藤] 齋藤利弥, “力学系以前 ポアンカレを読む”, 数セミ・ブックス 日本評論社 (1984)
- [高村 1] 高村茂, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese), Symposium on topology of manifolds (2014), 7 ページ
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf>
- [高村 2] ———, “商族の幾何学 (有限群の作用と表現, ファイブレーション, モジュライ空間)”, 『第 14 回 城崎新人セミナー』 (2017 年 2 月), 13 ページ
<https://drive.google.com/file/d/1ieFR4Cof5Rb69nUutaRxYoxUEHIAB8hC/view>
- [高村 3] ———, “群の高次構造とその同伴ファイブレーション—高次群論とその幾何学事始め”, 研究集会『変換群の幾何とトポロジー』 (2023 年 6 月), 数理研講究録 2276 (2024), pp.94–117
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2276-11.pdf>
- [高村 4] ———, “高次群論とその幾何学”, 研究集会『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』 (2023 年 12 月), 数理研講究録 2287 (2024), pp.105–119
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2287-14.pdf>
- [高村 5] ———, *On higher group theory and its geometry* (in Japanese), 松本幸夫先生 80 歳記念研究集会『多様体のトポロジーの進展』 (2024 年 11 月), 10 ページ
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/progress/takamura.pdf>
- [高村 6] ———, “群の高次構造とその幾何学”, 研究集会『有限群のコホモロジー論とその周辺』 (2024 年 2 月), 数理研講究録 2306 (2025), pp.86–101
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2306-13.pdf>
- [高村 7] ———, “高次群論とその幾何学 II さまざまな分野との照応&群論版双曲線の変形論”, 研究集会『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』 (2024 年 12 月), 数理研講究録 2329 (2025), pp.95–121
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2329-12.pdf>
- [高村 8] ———, “高次群論とその幾何学 III 交点理論と退化理論”, 研究集会『変換群論の新しい展開』 (2025 年 5 月), 数理研講究録 2325 (2025), pp.122–136
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2325-17.pdf>
- [高村 9] ———, “高次群論と代数曲線”, 研究集会『代数曲線論』 (2025 年 12 月)
<https://jxiv.jst.go.jp/index.php/jxiv/preprint/view/1740/4446>
- [Ta1] Shigeru Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, I, (Splitting criteria via configurations of singular fibers)*, J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004) 115–145
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jmath1948/56/1/56_1_115/_pdf/-char/ja
- [Ta2] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, II, (Quotient Singularities and Degenerations of Riemann Surfaces)*, RIMS Preprint 1344 (2001), Revised and ex-

panded version (2026)

<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1344-revision.pdf>

- [Ta3] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III, (Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves)*, Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-33364-7>

- [Ta4] ———, *Linearization of quotient families*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/26-3-3.pdf>

- [Ta5] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams*, Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897

<https://www.i-repository.net/contents/osakacu/sugaku/00306126-58-4-885.pdf>

- [Ta6] ———, *Blowdown maps between subgroup posets*, Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499

<https://projecteuclid.org/journals/tokyo-journal-of-mathematics/volume-45/issue-2/Blowdown-Maps-between-Subgroup-Posets/10.3836/tjm/1502179359.full>

- [Ta7] ———, *Prime factorizations of finite groups, I*, Advances in Group Theory and Applications **19** (2024) 1–55

<https://www.advgrouptheory.com/journal/Volumes/19/Takamura.pdf>

- [Ta8] ———, *Prime factorizations of finite groups, II*, Advances in Group Theory and Applications **21** (2025) 11–109

<https://www.advgrouptheory.com/journal/Volumes/21/Takamura.pdf>

- [Ta9] ———, *Prime factorizations of finite groups, III*, Advances in Group Theory and Applications **22** (2025) 1–26

<https://www.advgrouptheory.com/journal/Volumes/22/Takamura.pdf>

- [Ta10] ———, *The orders of subgroup products and coset products*, Transactions on Combinatorics **14** (2025) 223–250

https://toc.ui.ac.ir/article_28670_ebc3ac219eb683b98452f6d44ee439b0.pdf

- [Ta11] ———, *Bézout type theorem for higher order objects of groups*, (2024), to appear in Osaka J. Math.

- [Ta12] ———, *Bézout theorem for groups*, (2025) Preprint

- [Ta13] ———, *Higher Bézout theorem for groups*, (2025) Preprint

- [上野] 上野健爾, “現代数学の歩み 60 年 代数幾何学の歩みを中心にして”,

科学基礎論研究 43 巻 1・2 号特集「数学と論理学の 60 年」(2016) p.3–15

https://www.jstage.jst.go.jp/article/kisoron/43/1-2/43_KJ00010256962/_pdf/-char/ja