

線形代数の「ポリシー」

早稲田大学グローバル・エデュケーション・センター*

曾布川 拓也

Takuya SOBUKAWA

Global Education Center

Waseda University

1 数学における「ポリシー」

数学の講義を構築するにあたっては、次のことを踏まえなくてはならない。

1. 受講者の持っている知識（予備知識）は何か
2. 全ての内容は何らかの意味で予備知識につながっているか
3. その内容は何のために学ぶのか

これを数学教育における「ポリシー」と呼ぶことにする。

昨今は多様な学生が大学に入学してくる。特に数学についてはその予備知識のばらつきが大きいケースがよく見られる。高等学校の内容で言えば、必修科目である「数学Ⅰ」を前提にすることは認めることにしても、それ以上の内容を前提にできないケースも多い*¹。どんな内容から講義をスタートするかについては無頓着ではいられない。

また数学の世界では、いきなり天下りの定義を与えられても、それを前提に議論することを当然とする風土がある。しかしそれができること、言い換えればそれに耐えられることはかなり特殊な技能であって、誰にでもできるわけではない。実際、少し込み入った議論になると

〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1

*¹ 実際には数学Ⅰの内容を前提とすることが難しいケースも少なくないが、本稿の内容から外れるのでここでは触れない。

「わからないからとりあえず解き方を覚えておこう」

となってしまうケースが多いようである。これを3回やってしまうとその後の内容について行けなくなるという言説を聞いたことがあるが実感としては確かにその通りである。また昨今AIの普及に伴い、記号接地問題というのがクローズアップされている[1]。小学校段階では体験に根ざした形で数・演算・図形などの概念を学ぶが、その段階での感覚的な理解(記号接地)が十分にできていないと、その上に立てるべき中学校段階以上の数学が上手く構築できない。よく言われる「数学嫌い」の原点はそうしたところにあるのではないかと思う。そしてこのことはどこかで卒業できるものではなく、専門家になっても程度は変わっても同じようなことが続くものなのである。

一方で、「数学ができると偉い」といった見方がある。その裏返しとして「数学なんかやっても意味がない」と力強く言い切ってしまう言説も聞く。数学者にとっては数学自体がその目標たり得るわけだが、多くの人にとって数学ができる(問題が解ける)こと自体は目的となりにくい。敢えて言うならば入試となるわけだが、大学においては当然それもない。「単位を取るため」「必修だから」ということは学生の本音はともかく、教育の内容を考えることとは関係ない。

2 線形代数における問題点とその扱い方

大学初年の数学で多く扱われる内容に「微積分」「線形代数」がある。「微積分」についてはある意味で一本道が引かれており、それは中高段階からつながったものである。中学段階で関数概念、1次関数、2次関数が導入され、高校段階では指数・対数関数、三角関数とともに微分概念とその逆演算としての積分が導入される。ある意味でその段階ですでに抽象的なものになってきている。大学において積分をどのように定義するかについては立場によってさまざまな考えがあるだろう。数学科のようなところではリーマン積分と微積分学の基本定理を厳密に扱う必要があるのは言うまでもないが、工学系などではそれよりも微分方程式を自由に扱えることに重きを置くかもしれない。しかしこのことはそれほど大きな問題ではない。むしろその道をどのようにたどるかという問題については深く配慮されるべきである。本稿の目的ではないので詳しくは述べないが、そのひとつの答えとして近年出版された標準教科書[2]を挙げておく。

その一方で「線形代数」についてはかなり検討すべき点があると考えている。高等学校の学習指導要領の改訂が繰り返される中で、「行列」「1次変換」といった内容は隅に追いやられてきた感がある。学生にとってこれらのトピックは大学で初めて出会うものになっ

ている。内容自体は新鮮に映るかも知れないが、そこで天下り式の導入が行われれば興味が失われる可能性が高まることは否定できない。

そしてもう一つ考えなくてはいけない点は、線形代数の「試験に出されそうな問題」を「解いて結果を出す」ことには、AI が非常に大きな力を発揮するということである。そうなると、そもそもなぜ線形代数を学ばなくてはならないのかという問いに対してしっかりと答えることは容易でない。

2.1 線形代数への準備

大学初年の学生のもつ「線形代数」に関する予備知識は何であると考えらるべきであろうか。もっとも重要なトピックは「(連立)1 次方程式」であろう。未知数が 1 つである 1 次方程式の大元は小学校段階にすでにかなり導入されている。例えば「あまりのある割り算の検算」である。逆演算の概念は方程式の解法につながる内容であり、かなり多くの学生に馴染みのあるものである。中学校においては未知数が 2 つの連立方程式、高等学校では未知数 3 つのものが扱われる。これらを予備知識とすることには不自然とは思われない。そこで強調しておかなくてはならないのは、数学における基本的に重要なスタンスは**知っている形に持ち込むこと**だということである。

そもそもの準備として、**1 元 1 次方程式は解ける**ことを確認する^{*2} 未知数が複数である連立 1 次方程式の解法は、加減法などを用いて 1 元 1 次方程式に帰着することを目指すわけだが、ここで学生に十分に習得させなくてはならないのは、**解に自由度がある**ケースである。自由度がなく、解が 1 組に決まるようなものについてはそれこそ AI がすぐに解く。自由度があって解が無数にあるケースの扱い、そのためにはそもそも**解とは何か**を議論する必要がある。実際講義をしてみると、「解き方」は知っていても「解とは何か？」と問われると答えられない学生が多いことに気付く。

2.2 行列の導入

これらを予備知識として行列を導入するために、筆者はまず始めに 1 次変換を考えさせることにしている。これならば具体的な問題から導入することも可能であり、学生にとって入りやすい内容だと考える ([3] 第 0 章)。そして 1 次変換の表現行列という形で行列を

^{*2} 2 次以上の方程式は因数分解と実数が零因子を持たないことを用いて 1 次方程式に帰着できる。後述のように線形代数の内容においても 3 次以上の方程式を解く必要が出てくるので、準備段階でひとまとめに「復習」としておいた方が良いかもしれない。

導入する。この方法の利点は、1 次変換の合成を計算させることにより自然に行列の積が定まること、また逆変換の概念と逆行列を結びつけられることである。一方で行列の和・差、スカラ倍については行列を演算子とみるこの見方では議論がしにくい。この点について筆者たちは、行列が被演算子とも見られることを検討した上で和・差、スカラ倍の定義を具体例とともにやっている ([4] 第 1 章)。具体例をもって議論することで、型が違う行列の和を定義しないことにも妥当性が生まれる。いずれにせよ天下り式の導入は極力避けるべきである。

2.3 行列式の導入

ところが行列式の導入についてはこうした配慮が行われているケースはほとんど見かけない。多く採られているのは、大まかに言えば

1. 置換群を導入
2. 偶順列・奇順列を定義
3. 行列式の定義を与える

という順である。この方法が講義を進める上で最も簡素に進むので、教える側はこのルートを通りたがる^{*3}。しかしいきなり定義が与えられ、さらに行列式の導入が終わったあと(少なくとも線形代数の講義の中では)2 度と出てこない置換群の議論は、多くの学習者にとって違和感以外の何物でもないだろう^{*4}。

また多くの場合、行列を学んだあとで行列式を学ぶ。それ自体に問題があるとは言えないが、行列の性質と行列式の性質は似ているようでも異なる部分もあって初学者は混乱することもあるのではないだろうか。さらに言えばそれは我々の大先達・関孝和によるものが最初であるとされ ([6])、歴史的に言えば行列の概念よりも先にもたらされたものである^{*5}。このことを考えれば、行列式の導入は行列を学んだ後である必要は無く、行列とは独立に議論されても良いと思われるのだが、そうしたテキストをほとんど見かけたことがない^{*6}。

このようなことを踏まえて筆者は

1. 行列とは独立に
2. 連立 1 次方程式だけを予備知識として

次のような行列式の導入を提案したい。

^{*3} 例えば拙著 [3] 第 3 章。ここでは 1 ページで偶順列・奇順列の導入から行列式の定義まで到達している。

^{*4} 線形代数における古典的な名著 [5] では置換群について 8 ページが割かれ、群論の入り口に到達し、また例として基本対称式についても述べられている。もちろん大学初年のテキストとするには格調が高すぎる。

^{*5} 広田 ([7]) の議論は面白い。

^{*6} そもそも「行列式」という用語が適切かという問題もある。

Step 1. 2 次の行列式

x, y を未知数とする 2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

の解の公式（いわゆるクラメールの公式）を求める．

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{aq - pc}{ad - bc} \quad (2)$$

この分母に現れる式が (1) の左辺の係数のみで表されることから、それをこの順通りに並べた書式を用いて

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (3)$$

と「書く」ことにする．これを用いると、分子に現れる式が同様に

$$\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq, \quad \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - bp \quad (4)$$

と表せることから、この「書き方」は妥当である*7．文字係数の整式の計算になれていない学生もいるかもしれないが、ここでは中学数学のレベルの予備知識だけで十分である．

またこの段階で行列式の性質（行・列に関する斉次性、行・列の交換と正負、転置行列式など）を直接的に計算することで準備しておく．

Step 2. 3 次の行列式

x, y, z を未知数とする 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \quad (a, b, c, d, e, f, g, h, i, p, q, r \in \mathbb{R}) \quad (5)$$

の解の公式を導く．当然加減法を用いることになる．本来は 3 つある未知数のうち 1 つを減らした式を 2 本作り、それらからまた未知数を 1 つ減らすというステップが常套であるが、例えば (5) の第 1 式と第 2 式から y を消去した

$$(ae - db)x + (ce - fb)z = pe - bq \quad (6)$$

*7 あくまでも「書き方」であるとすべきである．これは「わかる・わからない」の話ではなく単に表現に過ぎないのに、何か権威が主張されているように思ってしまう、「わからない」と言う学生が多い．

と, (5) の第 1 式と第 2 式から y を消去した

$$(dh - ge)x + (fh - ie)z = qh - re \quad (7)$$

からさらに z を消去する計算はかなりハードルが高い. ここでもう一つ工夫して, (5) の第 3 式と第 1 式から y を消去した^{*8}

$$(bg - ah)x + (bi - ch)z = rb - ph \quad (8)$$

を用意する. これら 3 つの式の z の係数を比較, (5) における z の係数 c, f, i がどのように現れるかを見ながら (6) $\times i$ + (7) $\times c$ + (8) $\times f$ を計算すると

$$(aei - dbi + dhc - ceg + bfg - fha)x = pei - qbi + qhc - cer + bfr - fhp$$

と z が消去できることから,

$$x = \frac{pei - qbi + qhc - cer + bfr - fhp}{aei - dbi + dhc - ceg + bfg - fha} \quad (9)$$

という公式が得られる^{*9}. この段階で 2 次の行列式にならって「分母は (5) の左辺の係数のみで表されるから」同様に

$$\text{分母: } aei - dbi + dhc - ceg + bfg - fha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (10)$$

と「書くことに」するのである. もちろんこの定義を覚えることは容易ではないので, いわゆる「サラスの方法」をここで「定義の覚え方」として導入する.

後のためにこれを用いて転置行列式の計算をしておく.

Step 3. ハイパー加減法と 3 次の行列式の余因子展開

行列式を使うためには, 定義 (およびサラスの方法) だけでは十分ではない. 行列式の性質やいろいろな計算方法を考えるために, 余因子展開を導入したい^{*10}. そのために, Step2 で用いたものよりさらに一般的な加減法を導入する^{*11}. すなわち (5) において第 1 式 $\times K$ + 第 2 式 $\times L$ + 第 3 式 $\times M$ を計算して整理すると

$$(aK + dL + gM)x + (bK + eL + hM)y + (cK + fL + iM)z = pK + qL + rM \quad (11)$$

^{*8} 第 3 式 $\times b$ - 第 1 式 $\times h$ で求める. 順序が大切になる.

^{*9} もちろんこれも加減法の一つである.

^{*10} 広く使われてきた [8] では, 天下りに余因子展開をもって 3 次の行列式を定義している. 順列の偶奇を用いた定義はここから導かれ, その類推ということで 4 次以上の行列式が議論されているが, 天下りから始まっていることには違いない.

^{*11} [9], p.20. 本稿ではこれをハイパー加減法と呼ぶ.

となる．このうち y と z の係数が 0 となるように，すなわち

$$\begin{cases} bK + eL + hM = 0 \\ cK + fL + iM = 0 \end{cases} \quad (12)$$

を満たすように K, L, M を選べば，

$$x = \frac{pK + qL + rM}{aK + dL + gM} \quad (13)$$

と解の公式が得られることになる．

(12) から K, L, M を一意的に求めることはできないので，とりあえず M を定数と見なし，

$$\begin{cases} bK + eL = -hM \\ cK + fL = -iM \end{cases} \quad (14)$$

と変形し，未知数 2 つのクラメールの公式を使う．2 次の行列式の性質を使えば

$$K = -\frac{\begin{vmatrix} -hM & e \\ -iM & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}} M \quad (15)$$

となる． M は任意なので，計算がしやすいように

$$M = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad (16)$$

とおけば

$$K = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \quad (17)$$

さらにこのとき（同様の計算をすることによって）

$$L = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \quad (18)$$

となる．(13) の分母にこれらを代入して展開してみると (10) と一致する．すなわち第 1 列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad (19)$$

が得られることになる．

他の列についても同様に計算すれば得られるが、「同様なので結果だけ」という扱いでも講義としては十分成立する。当然符号については丁寧に計算しなくてはならないが、これもすこしだけやって見せた上で

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

を強調しながら具体例の計算を行うのが講義の進め方としてはよいであろう。行に関する余因子展開は Step2 で計算した転置行列式の議論を使うことにして、これも「類推で」でよいのではないかと考える。

Step 4. 4 次の行列式の定義

4 次の行列式については、2 次や 3 次と違って直接的に展開式を与えることはかなり困難であり、覚えることはほとんど不可能である。そこで Step3 のようにハイパー加減法をもちいる。今度は (12) に相当するものが未知数 4 つで方程式が 3 本になり、やはり解に自由度がある。その解を上手く決めてやることで 4 次の行列式の余因子展開の形が得られるので、ここではそれを定義とする。あくまで行列式の定義は「書き方」に過ぎないことと、3 次の場合の余因子展開の類推と見ることができるので、それほど違和感なく受け入れられると考えている^{*12}。

Step 5. 5 次以上の行列式の定義

「同様に」「類推で」というかたちで、余因子展開を用いたものとすればよい。さらに言えば、AI、または表計算ソフトなどでも行列式の値自体は得られるので、その仕組みを理解するだけで十分であると考えている。

2.4 行列の固有値

前節までは線形代数に関するいくつかの基本的な概念の導入について、その問題点と方法について提案を行った。本節では講義を展開するに当たっての、その目的について考える。線形代数を学ぶ目的については、それこそ多岐にわたると言える。人によってどういう学問・ジャンルを専攻しているかによってその考え方は違ってくる。

線形代数は

- 文字通り「代数学の基本」である

^{*12} 筆者はこの講義をフルオンデマンド型の授業で行っている。講義は全てスライドを使ったビデオ講義である。他のところはビデオを止めて計算するように促す設計をしているが、この内容は逆に、ひと通り説明するものの、「納得できるならばは早送りして良い」という指示を出している。信頼できる気持ちになることと計算できることの方を重視する。

- 図形の問題への応用が豊かなので「幾何学の基本である」
- 情報・統計データなどの基本である
- 線形作用素 (変換) の性質を扱うことから、関数解析学の初歩である

というように、多様な意見がある^{*13}。その授業が展開される学部・学科によって異なるであろうし、担当する教員の好みも当然反映されるであろう。そんななかで、工学系などにおいては長らく、「行列の n 乗を計算すること」が1つの目標（目的？）になっていたのではないかと見ている。確かに行列の積は複雑な構造になるので累乗を計算することはそれほど容易ではない。固有値・固有ベクトルを求めてこの計算を容易に行えるようになることは、少なくとも筆者が最初に出会ったときには大いに驚きであったし、理論を考えるモチベーションになったことは間違いない。しかし昨今は、単に与えられた行列に対してその n 乗の公式を作ること自体は AI が簡単に結果を出してくれるようになった。そうすると、これまで多くの学生が取り組んできた

1. なんだかよくわからないけれど、固有方程式というのを作って解く
2. それを代入した式を適当に変形して固有ベクトルというのを求める
3. 固有ベクトルを並べて変換行列 P を組み立てる
4. 作った変換行列の逆行列を求める
5. 固有値を並べた対角行列をつくって n 乗し、変換行列とその逆を掛けて公式を作る

という作業はそれこそ単位を取るためだけに覚える瞬間芸ということになってしまう。

計算して結果を出すこと自体が目的にならないとすれば、何か応用を考える必要があるだろう。その1つとして大学初年次に扱うことが可能なものとして、マルコフ連鎖およびその平衡状態（無限時間経過後の極限）が挙げられる。とりあえずこれを目標にすると学習内容を考えなおしてみる。

問題点 1：「行列の」固有値なのか

まず最初に行き当たったのが、「固有値とは何なのか」である。2.2 節で述べたように、そもそも行列とは何かというとき、**演算子**としての行列と**被演算子**としての行列が考えられる。もちろん数学の世界ではそれを区別しないことも多い。しかし敢えて言うならば、被演算子たる行列に固有値というものはそもそも存在しない。あくまでも行列の固有値というのは仮称であって、本来はその行列が**表現行列となる 1 次変換の固有値**であるはずである。状況が良く理解できていれば、変換とその表現行列を同一視するということは行っ

^{*13} 拙著 [3] まえがき より引用。

て良いのかもしれないが（行うべきなのかもしれないが）、元来の意味からするとこれらは別のものであって、「行列の固有値」ではなく「1 次変換の固有値」と呼ぶべきである。

問題点 2：1 次変換に行列は必要なのか

本来の形で言えば、1 次変換は

$$\text{変換 } T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad (20)$$

というものである。1 次変換というのはこの連立方程式が 1 次斉次であるという意味であって、行列は必要ない。もちろん状況が良く理解できている人にとっては 1 次変換を行列で表すことは簡便であり扱いやすいと言えるかもしれない。しかし「変換」という概念を表しているのは (20) の前半である。高等学校において変換の概念の扱いが薄くなり、また中学校段階でも計算の習熟だけに目が行って関数概念の習得ができているか懸念を感じざるを得ない現状では、行列表現をしない方が良いのではないかとさえ思われる。

問題点 3：「変換行列」の意味は何なのか

対角化の操作において、「変換行列 P およびその逆行列を掛ける」というのはどういう意味なのか明確に述べられた教科書がどのくらいあるのだろうか。基底の変換を表しているということがすっぱり抜け落ちているのではないだろうか。実はこの説明は意外に手間がかかり、理解するのが大変である。そうすると「意味はよくわからないがとにかく計算方法として覚える」ということになってしまう。

このような状況に鑑み、本稿では次のような展開を提案したい。

1. 被変換子としての列ベクトルは用いるが、行列は原則として用いない
2. 1 次変換の固有値・固有ベクトルは常に連立方程式表現において考える
3. 固有方程式という用語を避け、1 次斉次連立方程式が自明でない解を持つための判別式とする
4. 与えられた被変換子ベクトルを、固有ベクトルの和に分解する（変換に対する固有分解と呼ぶ）
5. 変換を n 回施すことを、固有分解の上で具体的に見ることにする

具体例を挙げる。

例： 変換 $T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ が $\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}y \\ y' = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y \end{cases}$ で与えられているとする。この変換

の固有値は $1, \frac{11}{20}$ であり, それらに対する固有空間は

$$E_1 = \left\{ m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{R} \right\} \quad E_{\frac{11}{20}} = \left\{ n \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{R} \right\}$$

である. このときベクトル $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \in E_1$ および $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \in E_{\frac{11}{20}}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (21)$$

と T -固有分解される. これを用いると, ベクトル $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} 1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{11}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} 1^2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \left(\frac{11}{20}\right)^2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{T} \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} \xrightarrow{T} 1^n \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \left(\frac{11}{20}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 従って $n \rightarrow \infty$ のとき, $T^n \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ となる.

行列の n 乗を求めるよりも本質がわかりやすいのではないかという提案である.

参考文献

- [1] 今井むつみ, 秋田喜美, 「言語の本質」, 中央公論新社, 2023.
- [2] 藤本一郎ほか「Standard Calculus-スタンダード微分積分-」, 大学教育出版, 2024.
- [3] 坂田 ひろし, 曾布川拓也, 「基本 線形代数」, サイエンス社, 2005.
- [4] 高木悟, 曾布川拓也, 「線形の世界」, 早稲田大学全学基盤教育シリーズ, 2023.
- [5] 佐竹一郎, 「線形代数学」, 裳華房, 1958.
- [6] 特集「関孝和 250 年祭」, 数学, 第 10 巻第 3 号, 岩波書店, 1959.
- [7] 広田良吾, 行列式とパフィアン (1), 応用数理, 14-1, pp.62-66, 2004.
- [8] S. Lang, Linear Algebra, 2nd Ed., Addison-Wesley, 1970.
- [9] 穂刈四三二, 「行列式」, 数学ワンポイント双書 13, 共立出版, 1977.
- [10] 渡部隆一, 「マルコフ・チェーン」, 数学ワンポイント双書 31, 共立出版, 1979.