

応用の文脈を通して教える大学数学 (II): 統計と接 続する文系向け線形代数 *

大阪公立大学・国際基幹教育機構[†] 川添 充

Mitsuru Kawazoe

Faculty of Liberal Arts, Sciences and Global Education,
Osaka Metropolitan University

§1. はじめに

本稿は、「応用の文脈を通して教える大学数学 (I): UCLA の微積分改革の紹介」([6]) に続く後編である。[6] では、カリフォルニア大学ロサンゼルス校 (UCLA) での生命科学系向けの微積分コースの改革 ([2], [3]) を紹介した。本稿では、この UCLA の事例も参考にしながら開発した、統計学の文脈を用いた文系向け線形代数コースについて報告する。

[6] では、UCLA で開発されたコース「生命科学者のための数学 (LS30)」の特徴を次のように紹介した。

1. **応用から始まる構成:** 生命科学分野のトピックから始まり、その数理モデリングという文脈が中心に据えられている。
2. **モデリング・プロセスに沿った内容構成:** 数学の学習内容は、モデリング・プロセスの中で必要なものが、その必要性を認識してから学ばれるという順序で構成されている。
3. **応用トピックによる一貫したストーリー:** 生命科学分野での応用トピックが章全体や複数の章を貫く大きな学習のストーリーの核となっている。

* 本稿は、Earcome9 での講演 [5] の一部を元に、それをさらに発展させて大幅に加筆したものである。

[†] 〒536-8525 大阪市城東区森之宮 2 丁目 1 番 132 号

そして、これに基づいて、UCLA のような改革を他の科目や他の分野の学生向けに適用しようとする場合のポイントを次のようにまとめた。

- I. コースのなるべく広い範囲で一貫して学習の文脈の核として使える応用トピックを見つける。
- II. そのような応用トピックを必要ならば複数組み合わせることでコース全体をカバーできるようにする。
- III. 各回の授業はモデリングを中心に展開するようにし、モデリングの中で数学の新しい概念に出会うようにする。

筆者が開発に携わった文系向け線形代数コースは、このポイントを意識して設計され、授業実践を重ねながら現在も改良が続けられている。以下、このコースについて、開発の経緯・方法も含めて報告する。

§2. コース開発の経緯

文系向け線形代数コースの開発は、筆者の所属する大学の学部・学域の一つである「現代システム科学域」（高校の文系コース出身者が多い文理融合の学域）からの依頼に応える形で行われた。筆者の所属する大学は 2022 年度に大阪府立大学と大阪市立大学が統合されてできた大学だが、この新大学のカリキュラムを検討する中で、現代システム科学域から、心理学類など向けに統計学の理解につながる線形代数コースの開発依頼があったのである。現代システム科学域向けの数学コースとしては、大阪府立大学時代に、数学の活用を学ぶ数学コース「基礎数学 I, II」（大阪公立大学でも「数学リテラシー 1, 2」として開講を継続）を 1 年次の必修科目として開発していたが（[4], [7] 参照）、新大学の新しいカリキュラムでは、数学が得意な層向けに線形代数を設置し、数学リテラシーと線形代数を選択必修で履修させたいということであった。筆者は 1～2 年次の基礎教育の数学科目の運営責任者という立場であったため、コース開発に取り組むこととなった。

§3. コース開発手順

開発すべきコースは、前期 1 コマ（1 回 90 分 × 15 週 + 定期試験）と後期 1 コマ（1 回 90 分 × 15 週 + 定期試験）の線形代数コースであった。統計学への接続が求められていたことから、UCLA の LS30 のような応用の文脈を用いた設計が適していると考えた。コース開発は、§1 で述べた I～III のポイントに沿って次の手順で行なわれた。

- (i) 線形代数で学ぶ各概念が統計学やデータ処理においてどのような文脈で現れるかを網羅的に調べる.
- (ii) (i) で見出された統計学やデータ処理のトピックから, コースのなるべく広い範囲にわたって使える学習の文脈を構築する. 一つの文脈だけで全体をカバーできない場合は, 複数の文脈を構築して全体をカバーするようにする.
- (iii) (ii) の文脈に沿って授業でモデリング課題として提示できるような具体的な問題を開発する.

線形代数の学習に適切なモデリングの文脈を与えること自体は, 線形代数のコース開発の 10 年前に携わった「基礎数学 I, II」(数学的な内容としては高校数学から大学初年次の数学までを含み, 大学数学の内容はモデリングの文脈を通して新しい概念を学ぶ) の開発でも取り入れていた ([4], [8]). しかし, 「基礎数学 I, II」で扱う線形代数の内容は, 通常の 1 年間の線形代数コースの中のごく一部に限られていて, 1 年間のコース内容をカバーするものではなかったし, 統計学やデータ処理の文脈に特化していたわけでもなかった. また, いくつかの例外を除いて各週の授業が独立した構成になっており, UCLA のコースのような広範囲に渡る大きな文脈のもとでのコース設計とはなっていなかった. このため, とくに上記の (ii) が重要であった.

§4. 統計学に接続する線形代数コース

筆者に課せられたのは, 「線形代数 1」(前期開講) と「線形代数 2A」(後期開講)*¹ という 2 科目からなる理工系向けコースを文系向けに調整することであった. 内容は理学部・工学部に準じるため, 表 1 の内容を含むという制約のもとでの作業となった.

表 1 線形代数 1・2A の単元構成

線形代数 1	線形代数 2A
高校のベクトルの復習	ベクトル空間
数ベクトルと行列	基底と次元
連立一次方程式 (掃き出し法)	線形写像
正則性と逆行列	計量ベクトル空間
行列式	行列の対角化

*¹ 他に工学部の一部の学科向けの週 2 コマ開講科目「線形代数 2B」がある

コース設計にあたり、このコースの例や演習で扱うベクトルは**数ベクトルに限る**という基本方針を立てた。統計学への接続を考えるにあたり、**ベクトルや行列を、複数の量を組にして扱うためのデータの表現形式と捉え、これらに関する演算（和やスカラー倍、ベクトルの内積や行列の積）をデータ処理に関する演算と捉える見方を身につけさせることが重要と考えた**からである。抽象ベクトル空間も含めて線形代数の概念は一通り紹介はするが、数ベクトル空間 ($\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$) 以外のベクトル空間の例（関数の空間など）は修得目標には含めないこととした。

上記の基本方針のもとで、まずは (i) から取り掛かった。その結果を表 2 に示す。

表 2 線形代数の概念の統計・データ処理の視点からの意味付け

線形代数の概念	統計・データ処理からの意味付け
数ベクトル（和，スカラー倍，線形結合）	データの組（データに関する計算）
内積	重み付きの和，共分散
ベクトル空間 ($\mathbb{R}^n$)	データ空間
行列（和，スカラー倍）	データの表（表に関する計算）
行列の積（行列とベクトルの積含む）	二つの表から集計表を作る
対角行列	表の数値を行または列ごとに定数倍する
行列の冪乗	推移行列（マルコフ連鎖等）
連立一次方程式	与えられた条件を満たすデータをみつける
正則性と逆行列	推移行列による推移を逆に戻す，偏相関係数の計算
行列式	推移行列の固有値を求める，変数変換のヤコビアン
基底，次元	座標系と空間の自由度
線形写像	別のデータ空間へのマッピング，統計での座標変換
線形写像の像	入力データを動かしたときの出力データが動く範囲
線形写像の核	出力値を変えずに入力を変化させられる範囲
正射影	主成分得点（主成分分析），線形回帰モデル
固有値・固有ベクトル・対角化	推移行列でモデル化される現象の分析
対称行列の直交行列による対角化	主成分分析

表 2 の右欄には、主成分分析や回帰モデルのように統計学の内容に直接対応するものもあるが、多くは基礎的なデータ処理に関する内容となっている。推移行列が関係する箇所は、統計というより数理モデリングのトピックであるが、データを元にした分析として文系でもよく使われることから統計・データ処理のトピックに含めている。

(ii) の作業では、以下の互いに関連のある五つの文脈が構成された。

①**データ処理の基本操作**：表 2 の数ベクトルから行列の冪乗までに対しては、ベクトルや行列で表されるデータの組に対する基本的なデータ処理の計算という文脈でほぼカバーすることができる。これが第一の文脈として機能する。行列の冪乗だけが推移行列を用いる特殊な文脈になるが、推移行列によるモデル化は行列とベクトルの積が意味付けられる文脈の一つとして重要であるだけでなく、その後の対角化へとつながる文脈でもあるため、この第一の文脈に含める。

②**行列とベクトルの積から連立一次方程式へ**：第一の文脈の行列とベクトルの積から連立一次方程式を学習する文脈が生じる。第一の文脈では、行列 A とベクトル $\mathbf{a}$ に対して $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ を求める計算が扱われるが、 A と $\mathbf{b}$ が与えられた状況で $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ となる $\mathbf{a}$ を求める逆問題を考えることで、必要性の実感を伴った連立一次方程式の学習の文脈となる。

③**行列とベクトルの積の写像としての解釈**：行列 A とベクトル $\mathbf{a}$ の積 $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ を、この計算がデータに関する演算として現れる現実場面で、 $\mathbf{a}$ の属するデータ空間から、 $\mathbf{b}$ の属する別のデータ空間への写像と見ることで、線形写像を学習する文脈が生じる。この文脈のもとで、 $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ の状況から $\mathbf{a}$ を動かすとき $\mathbf{b}$ が動く範囲を考えたり、 $\mathbf{b}$ を固定したまま $\mathbf{a}$ を動かすことができる範囲を考えたりすることで、線形写像の像 (image) や核 (kernel) の学習が意味付けられる。また、どのくらいの範囲を動かすのかという問題設定は基底と次元を学習する文脈も与える。

④**推移行列によるモデルの挙動解析**：第一の文脈において、推移行列 A が正方行列のときに n ステップ後を求める計算として $A^n \mathbf{a}$ が意味付けられるが、ここから $A^n \mathbf{a}$ の挙動を分析するためのツールとして固有値・固有ベクトル・対角化を学習する文脈が生じる。

⑤**ベクトルの内積から主成分分析へ**：主成分分析には座標系の回転という考え方が含まれており、回転後の座標系での座標は回転後の座標軸への正射影で与えられる。主成分分析で用いる分散共分散行列は応用場面に現れる対称行列の重要な例であり、主成分分析での座標系の回転は直交行列を用いて tTAT (A は分散共分散行列、 T は直交行列) で得られ、主成分 (第一主成分や第二主成分) を求める計算は分散共分散行列の直交行列による対角化に他ならない。これらのことから、主成分分析は正射影から対称行列の直交行列による対角化までの学習の文脈を与える。

(iii) では、①～⑤の複数にまたがって使えるものが望ましいという考えに基づいて具体

的な問題を検討した。結果得られたのが以下の問題である。

②**野菜ジュース作り（①～③で使用）**：野菜ジュースの材料となる野菜の種類・量と、できあがる野菜ジュースに含まれる各栄養成分の量の関係を考えることで、①～③の文脈で使える問題群が得られる。各野菜の単位量あたり（食品成分表にもとづけば 100g あたり）に含まれる各栄養成分のデータを野菜ごとにベクトルで表すと、ベクトルの和・スカラー倍・線形結合が、複数の野菜を材料とする野菜ジュースに含まれる各栄養成分の量を求める計算として現れる。内積については、一つの成分（たとえばエネルギー）に着目して、各野菜の使用量から野菜ジュース一杯あたりのエネルギー（kcal）を求める計算を考えると、エネルギーのベクトルと使用量のベクトルの内積として現れる。

上述の線形結合として現れる計算は、各野菜の栄養成分のデータを表すベクトルを列として並べた行列と各野菜の使用量を縦に並べたベクトルとの積として表すこともできる。複数のレシピを考えれば、レシピごとの野菜の使用量を列ベクトルとして並べた行列をつくることで、行列同士の積も現れる。

各野菜のデータを表すベクトルを列として並べて作った行列と各野菜の使用量を縦に並べたベクトルとの積から、連立一次方程式や線形写像の問題を野菜ジュースの問題の文脈で与えることができる。栄養成分の量の条件を先に与えて、それを満たすような材料の組み合わせと量を考えれば連立一次方程式となる。あるレシピから、材料の条件を変えるとき栄養成分はどれくらい変わりうるかを考えれば線形写像の像の問題になるし、栄養成分を変えずに材料の組み合わせ・量を変えるパターンはどれくらいあるかを考えれば線形写像の核の問題になる。野菜ジュース作りの問題は、上の文脈①～③の広範囲にわたって核となる問題として使用できる。なお、野菜ジュースの問題は、数理モデリング教育の教材としてよく知られている「グラノーラ作り」([1])の問題から着想を得たものである。グラノーラ作りの問題は、グラノーラの原料となる麦や種子、ドライフルーツの栄養成分表が与えられて、グラノーラの商品開発をするという設定のモデリング課題となっていて、連立一次方程式や連立一次不等式によるモデル化が想定されている。グラノーラから野菜ジュースに変えたのは、日本の学生には野菜ジュースのほうがなじみがあると考えたことと、ジュースのほうが数値が連続的になるため $\mathbb{R}^n$ のイメージにより適していると考えたことによる。

UCLA の LS30 でもされているように、中心となる問題と合わせて文脈の異なる類題も多く示すことが重要である。そこで、たとえば、行列同士の積のところでは、複数店舗をもつチェーン店で複数の商品の売り上げや利益を店ごとにまとめて集計したりする計算などを含めるようにした。文脈①で使える問題は「数学リテラシー」([4], [8])で使っているものが共通して使える。

⑥**レンタルサイクルの最適配置（④で使用）**：レンタルサイクルの問題は「数学リテラシー」の教材としてすでに使用している問題である（[4], [7], [8]）。図 1 は典型的なマルコフ連鎖の問題であり，固有値・固有ベクトルを発見的に学習することができる教材として 10 年以上の使用実績がある．駐輪場を 2 箇所とすることによって，推移行列による変化を座標平面上にプロットすることができ，その点の動きによって固有値・固有ベクトルが視覚化されるという利点がこの教材にはある．「数学リテラシー」では固有値・固有ベクトルまでの学習にとどめているが，対角化までをこの問題で学ぶことができる（この問題を使った固有値・固有ベクトルまでの学習の流れは [7], [8] を参照）．類題としては，生物の個体数動態を推移行列で考える問題など，現実のデータを使った問題を多数つくることができる（[4], [8] 参照）．

問題. 某 O 大学 N キャンパスでは，キャンパスが広大であることからレンタルサイクルサービスを開始することにした．正門脇とキャンパス奥の図書館前の 2 箇所に指定駐輪場を設置し，相互に乗り捨て自由としてサービスを開始する．事前のモニター調査の結果から，各駐輪場の自転車の 1 週間後の移動の状況が次のようになると予想された．

元の場所\移動先	正門脇	図書館前
正門脇	70%	30%
図書館前	20%	80%

自転車を 100 台以上用意して本格サービスを開始するにあたり，二つの駐輪場にどう配分するのがよいか．次の三つのうちから選んで，その理由も書いてみよう．

- (1) 正門脇に多く配分した方がよい．
- (2) 正門脇と図書館前を同じくらいの台数にしたほうがよい．
- (3) 図書館前に多く配分した方がよい．

図 1 レンタルサイクル問題

⑦**うどん店の総合評価（⑤で使用）**：うどん店の総合評価の評価軸を考える問題（図 2）も「数学リテラシー」の教材として 10 年以上使用している問題である（[8]）．典型的な主成分分析の問題であるが，評価の観点を二つに絞っているため，散布図が 2 次元になり，主成分分析での座標変換（回転変換）や主成分（第一主成分は直感的には散布図がもっとも伸びている方向）を幾何的に捉えられる利点がある．「数学リテラシー」では主成分分

析の数学的な手続きには深く立ち入らないような使い方をしているため、対称行列の対角化と結びつけた教材とはしておらず、回転させた座標軸上での座標も内積を使った正射影の計算とは結びつけていないが、線形代数では、正射影の計算や対称行列の対角化をこの問題で学ぶ教材として使える。

問題. S市にラーメン横町ならぬ「うどん横町」ができた。うどん横町には、10軒のさぬきうどん店が出店し、来客アンケートの結果でのランキングを競っている。来客アンケートで、各店は「めん」のおいしさと「ダシ」のおいしさで5段階評価(1点～5点で評価)される。10店のこれまでの評価(回答者のつけた点数の平均)は下の表のようになっている。このとき、二つの評価ポイントから「おいしい店総合ランキング」をつくることを考えてみよう。

店名	めん	ダシ	店名	めん	ダシ
①谷越うどん	4.1	3.4	⑥うどんの山本	3.6	3.0
②道草製麺	3.3	4.5	⑦剛麺亭	3.2	3.4
③大釜うどん	3.0	2.8	⑧うどん明星亭	2.8	3.8
④元祖うどん帝国	2.4	2.1	⑨手打ちうどん布袋	3.0	1.5
⑤うどん本舗	3.8	4.2	⑩麺通本店	3.3	2.2

図2 うどん店の総合評価問題

§5. 授業実践の現状と課題

文系向け線形代数コースは、§4の文脈①～⑤と問題a～cを用いて授業設計がなされ、2022年度から開講されている。本稿執筆時点で開講5年目となっている。1クラスのみの開講であり、筆者が開講当初から継続して担当して改良を続けている。本節では、これまでの授業実践も踏まえた課題について述べ、まとめとしたい。

まず、§4の文脈①～⑤と問題a～cについてであるが、実は表2の内容を網羅することはできていない。逆行列と行列式に対応するものが欠けているのである。これは、表1による内容構成の縛りが影響している。表2の右欄で与えている意味付けが、表1の構成に合わないのである。表1の構成では、連立一次方程式の掃き出し法による解法を学んだ後、正則性と逆行列、行列式という順序となっている。正則性と逆行列は、推移行列による推移を逆向きに遡るという文脈で教えているが、少々苦し紛れな感がある。なお、推移を過去に遡る問題としては、対角化で中心的に使用しているレンタルサイクルの問題では

なく、マーケティングに関するシェア推移の問題を使用している。行列式は、固有値計算での利用を考えると対角化のところで教える方がよいかもしれないが、現状では前期の学習内容となっているため、前期の学習の文脈の繋がりの中で教えるしかない。係数行列が正方行列である連立一次方程式の解の公式という数学的な問題設定で教えざるを得ないというのが実情である。表 1 による縛りは、理工系用の線形代数コースから内容・順序を大きく変えることができないという制約に由来するもので、このため、UCLA のように大胆な再構成ができないという事情がある。理工系に準じていることから基礎的な計算内容も含む必要があり、UCLA のようにコンピュータによる演習を入れる代わりに手計算の習熟については内容から外すということもできない。理工系の線形代数コースに「準じる」という縛りを外すことでしか解決しないと思われるが、これには提供先の部局との調整や全体の科目運営上の調整も必要になるので解決はなかなか難しい。

構成上の課題以外に、問題①～③の授業での使い方の課題もある。現状では、授業時間に余裕がないこともあって、UCLA のように問題①～③を中心に展開するほどまでにはなっていない授業が多い。数ベクトルや行列およびその演算を導入するところは①の問題を中心に展開するような授業になっているが、とくに後期の、基底や次元を導入する回や計量ベクトル空間（一般の内積や正射影などを学ぶ）では、①や③の問題を中心とする展開にできていない。今後さらなる改善が必要である。

ここまで述べてきたように、「応用を通して教える」という観点からは、授業設計が不十分な点が多々あるが、後期の対角化の部分も含めて、受講生からは線形代数の内容について「難しすぎてわからない」という声はほぼなく、高校の文系コース出身者でも学べる線形代数コースにはなっているといえる。授業で使用している応用トピックについても、後期終了時に実施しているアンケートの「線形代数を学ぶ意味の理解に役立ったか」「面白かったか」の 2 項目に対して、大多数の学生が肯定的な反応を返している ([5])。しかし、一方で、統計学の応用トピックについては多くの受講生が「難しい」と回答している。興味を引くことはできているが、線形代数コースの先にある統計学の学習につながる学びを提供できているかという点に関しては不十分といわざるをえないだろう。今後の改善が必要である。

以上、開発した「統計と接続する文系向け線形代数」コースの課題を大きく三つ指摘した。最初の一つについては上にも述べたとおり、理工系に「準じる」という縛りが影響しており、解決のハードルは高い。しかし、後者二つは理工系に「準じる」という縛りとは直接関係ないため、担当者（筆者）個人の努力で改善は可能である。今後 1～2 年かけて後者二つを改善することが当面の目標である。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP23K22337 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Cristóbal-Escalante, C. & Vargas-Alejo, V. (2013). The development of mathematical concept knowledge and of the ability to use this concept to create model, In: G.A.Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.) *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp.517–526), Springer.
- [2] Garfinkel, A., Bennoun, S., Deeds, E., & Van Valkenburgh, B. (2022). Teaching dynamics to biology undergraduates: the UCLA Experience. *Bulletin in Mathematical Biology*, **84**, article number 43. <https://doi.org/10.1007/s11538-022-00999-4>
- [3] Garfinkel, A., Shevtsov, J., & Guo, Y. (2017). *Modeling life: The mathematics of biological systems*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-59731-7>
- [4] Kawazoe, M. (2022). A Practice Report on Mathematical Modelling Education for Humanities and Social Sciences Students. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, **15** (2), 141–153. <https://doi.org/10.24529/hjme.1512>
- [5] Kawazoe, M. (2025). Teaching mathematics through applications: A case of mathematics education for non-STEM undergraduate students. In O. Kwon, B. Kaur, J. Pang, J. Noh, S. Lee, S. Han, S. Yeo, & M. Lim (Eds.), *Proceedings of the 9th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 1) (pp.223–242). Seoul National University, Siheung Campus, Korea: EARCOME9.
- [6] 川添充 (2026). 応用の文脈を通して教える大学数学 (I): UCLA の微積分改革の紹介. 数理解析研究所講究録. 本巻に掲載.
- [7] 川添充・岡本真彦 (2017). 文系学生のための数学活用力を育む授業デザインとその実践. 水町龍一 (編著). 大学教育の数学リテラシー (pp. 184–194). 東信堂.
- [8] 川添充・岡本真彦 (2021). 思考ツールとしての数学 第2版. 共立出版.