

Generalization for the Poincaré–Sobolev inequality with weights

大阪大学大学院・情報科学研究科 波多野 修也 *

Naoya Hatano

Machine Learning & Systems Laboratory,
The University of Osaka

1 導入

次の不等式を Poincaré(–Sobolev) の不等式という：もし

$$1 \leq p, q < \infty, \quad \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

ならば、任意の立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ と関数 $f \in C^1(Q)$ に対して

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \ell_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ。ここで、 Q は $\mathbb{R}^n$ 上の立方体、 ℓ_Q は Q の辺長、 f_Q は f の Q 上の積分平均 $|Q|^{-1} \int_Q f(x) dx$ を表す。また、不等号 $\lesssim$ に含まれる定数は関数 f と立方体 Q には依存しない。Hölder の不等式によると、この不等式は

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

を満たすときが最も鋭い。このような指数 q を p の Sobolev 共役指数といい、 p^* と表す。

Poincaré–Sobolev の不等式の応用例として、次の Harnack の不等式が導かれることがよく知られている：楕円型偏微分方程式 $\operatorname{div}[A(x)\nabla u(x)] = 0$ の正值弱解 u に対して

$$\sup_{x \in Q} u(x) \lesssim \inf_{x \in Q} u(x)$$

が任意の立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。さらに、Sobolev の埋め込み定理も次のようにして得ることができる。 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ とする。任意の立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f\|_{L^{p^*}(Q)} \leq \|f - f_Q\|_{L^p(Q)} + |Q|^{\frac{1}{p^*}} |f_Q| \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(Q)} + |Q|^{\frac{1}{p^*}-1} \|f\|_{L^1(Q)}$$

* n.hatano,chuo@gmail.com

Graduate School of Information Science and Technology, the University of Osaka, 1-5, Yamadaoka, Suita-shi, Osaka 565-0871, Japan

が成り立つ. よって, $Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ の拡大を極限を取れば

$$\|f\|_{L^{p^*}} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p} + \lim_{|Q| \rightarrow \infty} |Q|^{\frac{1}{p^*}-1} \|f\|_{L^1(\text{supp} f)} = \|\nabla f\|_{L^p}$$

が得られる. 以上を踏まえて, Poincaré–Sobolev の不等式に荷重を付け加えることを考える. 例えば, 左辺にべき乗型荷重 $|x|^{-\alpha}$ ($\alpha \geq 0$) を Hölder の不等式を用いて付け加えることによって

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{|f(x) - f_Q|^q}{|x|^{\alpha q}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \ell_Q^{1-\alpha} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

のような不等式を得ることができる. さらに, この不等式に Sobolev の埋め込み定理を導いたときと同様の議論を行うことにより, Hardy の不等式

$$\left\| \frac{f}{|\cdot|^\alpha} \right\|_{L^q} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p}$$

を導くことができる. 本研究では, べき乗型荷重に限らず一般の荷重に対する Poincaré–Sobolev の不等式を得ることを目的とする.

一方で, 両辺に同じ Muckenhoupt 荷重を加えた一般化

$$\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \ell_Q \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |\nabla f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

については, 次のような結果が知られている: Fabes, Kenig, Serapioni [2] によって, $q = p$ かつ $w \in A_p$ の場合が示された. その後, Pérez と Rela [6] によって改良され, $q = p_w^*$ かつ $w \in A_r$ の場合が示された. ここで

$$\frac{1}{p_w^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{nr}, \quad r \leq p$$

とする. 本講演では, 左辺にのみ荷重を付け加えた一般化を紹介したが, 同様の方法により右辺にも荷重を加えることができる. さらに, 立方体 Q に制限された局所的な Muckenhoupt クラスを用いることで, この結果のさらなる改良版を得ることができた.

2 主結果

次のような二進立方体の族を考える.

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \equiv \{2^{-j}(m + [0, 1)^n) : (j, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n\}$.
- 各 $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\mathcal{D}(Q) \equiv \{R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : R \subset Q\}$.

また荷重の族として, 以下のような Morrey 空間の局所版を用いる.

定義 2.1. $1 \leq p < r \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ とする. このとき, 各 $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対して次を定める.

$$(1) \|f\|_{\mathcal{M}_q^p(Q)} \equiv \sup_{R \in \mathcal{D}(Q)} |R|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(R)} = \left\| |R|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(R)} \right\|_{\ell_R^\infty(\mathcal{D}(Q))}.$$

$$(2) \|f\|_{\mathcal{M}_{q,r}^p(Q)} \equiv \begin{cases} \left(\sum_{R \in \mathcal{D}(Q)} \left[|R|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(R)} \right]^r \right)^{\frac{1}{r}} & (r < \infty), \\ \|f\|_{\mathcal{M}_q^p(Q)} & (r = \infty). \end{cases}$$

これらには, Hölder の不等式から示される次のノルム評価が成り立つ.

命題 2.2. もし $q_1 \leq q_2$ ならば

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q_1,r}^p(Q)} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{q_2,r}^p(Q)}$$

が成り立つ. 特に, $p \geq q$ ならば

$$\|f\|_{L^p(Q)} = \|f\|_{\mathcal{M}_p^p(Q)} \geq \|f\|_{\mathcal{M}_q^p(Q)}$$

が成り立つ.

このとき, 本研究の主結果は次の 2 つである.

定理 2.3 ($p \leq q$ の場合). $1 < p < \infty$ と $1 < q < r < \infty$, $1 \leq s < \infty$ に対し,

$$p \leq q, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - \frac{1}{n}$$

と仮定する. このとき, 任意の $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ と $f \in C^1(Q)$ に対し,

$$\|g(f - f_Q)\|_{L^q(Q)} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_r^s(Q)} \|\nabla f\|_{L^p(Q)}$$

が成り立つ.

定理 2.4 ($p > q$ の場合). $1 < p < \infty$ と $1 \leq q \leq r < \infty$, $1 \leq s < \rho < \infty$ に対し,

$$p > q, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - \frac{1}{n}$$

と仮定する. このとき, もし

$$(i) \ q > 1, \ q < r, \quad \text{または} \quad (ii) \ q = 1, \ q \leq r$$

ならば, 任意の $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ と $f \in C^1(Q)$ に対し,

$$\|g(f - f_Q)\|_{L^q(Q)} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_{r,\rho}^s(Q)} \|\nabla f\|_{L^p(Q)}$$

が成り立つ.

ここで, 条件

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - \frac{1}{n}$$

を仮定することは自然である. 実際, Hölder の不等式と荷重を持たない (通常の) Poincaré–Sobolev の不等式によって

$$\|g(f - f_Q)\|_{L^q(Q)} \leq \|g\|_{L^s(Q)} \|f - f_Q\|_{L^{p^*}(Q)} \lesssim \|g\|_{L^s(Q)} \|\nabla f\|_{L^p(Q)}$$

が得られるからである。特に, 埋め込み評価

$$\|g\|_{\mathcal{M}_{r,\rho}^s(Q)} \leq \|g\|_{L^s(Q)}$$

が知られている (cf. [5, Proposition A.1]) ため, 本結果は荷重の族を改良した結果である。

3 主定理の証明

主定理の証明のために, Lerner ら [4] によって与えられた次の補題を用いる: $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ がスパース族であるとは, 各 $Q \in \mathcal{S}$ に対してある $E_Q \subset Q$ が存在して

- $|Q| \leq 2|E_Q|$;
- $\{E_Q\}_{Q \in \mathcal{S}}$ は互いに素

が成り立つことをいう。このとき, 次の補題が成り立つ。

補題 3.1. $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき, あるスパース族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(Q)$ が存在して

$$|f(x) - f_Q| \lesssim \sum_{R \in \mathcal{S}} \frac{\chi_R(x)}{|R|} \int_R |f(y) - f_R| dy \quad a.e. \ x \in Q$$

が成り立つ。

主定理は次の 2 つの場合に分けて証明する:

- [I] $q = 1$ (定理 2.4 の一部).
- [II] $q > 1$ (定理 2.3 と定理 2.4 の一部).

3.1 [I] の証明

命題 2.2 より, $r = 1$ の場合のみを示せば十分である。結論を得るために, Q に制限された Hardy–Littlewood の極大作用素 M_Q , すなわち

$$M_Q f(x) = \sup_{R \in \mathcal{D}(Q)} \frac{\chi_R(x)}{|R|} \int_R |f(y)| dy$$

を導入し, 有界性 $M_Q : L^p(Q) \rightarrow L^p(Q)$ を用いる。補題 3.1 より,

$$\|g(f - f_Q)\|_{L^1(Q)} \lesssim \sum_{R \in \mathcal{S}} \frac{\|g\|_{L^1(R)}}{|R|} \int_R |f(y) - f_R| dy$$

が成り立つ。ここで, 平均値の定理と Fubini の定理より

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f(y) - f_R| dy \lesssim \frac{\ell_R}{|R|} \int_R |\nabla f(y)| dy \lesssim \ell_R \frac{\|M_Q[|\nabla f|]\|_{L^p(E_R)}}{|R|^{\frac{1}{p}}}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\|g(f - f_Q)\|_{L^1(Q)} &\lesssim \sum_{R \in \mathcal{S}} \|g\|_{L^1(R)} \cdot \ell_R \frac{\|M_Q[|\nabla f|]\|_{L^p(E_R)}}{|R|^{\frac{1}{p}}} \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{M}_{1,p'}^s} \left(\sum_{R \in \mathcal{S}} \|M_Q[|\nabla f|]\|_{L^p(E_R)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{M}_{1,p'}^s} \|M_Q[|\nabla f|]\|_{L^p(Q)} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_{1,p'}^s} \|\nabla f\|_{L^p(Q)}.
\end{aligned}$$

ここで, $q = 1$ のときは $\rho = p'$ であるため, 題意が示された. $\square$

3.2 [II] の証明

$q > 1$ の場合は双対性を用いて示すことができる. $h \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\int_Q |h(x)g(x)(f(x) - f_Q)| \, dx \lesssim \|h\|_{L^{q'}} \|g\|_{\mathcal{M}_{r,\rho}^s(Q)} \|\nabla f\|_{L^p(Q)}$$

を示せばよい. 補題 3.1 より

$$\int_Q |h(x)g(x)(f(x) - f_Q)| \, dx \lesssim \sum_{R \in \mathcal{S}} \frac{1}{|R|} \int_R |h(x)g(x)| \, dx \cdot \frac{1}{|R|} \int_R |f(y) - f_R| \, dy \cdot |R|$$

が成り立つので, 次の 2 つの量

$$\frac{1}{|R|} \int_R |h(x)g(x)| \, dx, \quad \frac{1}{|R|} \int_R |f(y) - f_R| \, dy$$

に対して, [I] の証明と同様の評価を行うことで題意が示される. $\square$

4 応用例

第 1 節で述べたような方法を主定理にも適用することにより, Sobolev の埋め込み定理に一般の荷重を付け加えることができる. ここで, 次の大域版のノルム

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q,r}^p} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{D}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q,r}^p(Q)} \approx \begin{cases} \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}} \left[|Q|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(Q)} \right]^r \right)^{\frac{1}{r}} & (r < \infty), \\ \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(Q)} & (r = \infty) \end{cases}$$

を持つ関数空間である Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}_{q,r}^p(\mathbb{R}^n)$ [1, 5] を用いる. このとき, 次が得られる.

系 4.1. $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq r < s < \rho \leq \infty$ に対し,

$$\frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - \frac{1}{n}$$

と仮定する. このとき, もし

(i) $q > 1, q < r$ または (ii) $q = 1, q \leq r$

ならば, 各 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|gf\|_{L^q} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_{r,\rho}^s} \|\nabla f\|_{L^p}$$

が成り立つ.

さらに, この系の (ii) における $q = r = 1$ の場合

$$\|gf\|_{L^1} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_{1,\rho}^s} \|\nabla f\|_{L^p} = \|g\|_{\mathcal{M}_{1,\rho}^s} \|f\|_{\dot{W}^{1,p}}$$

に双対性を用いると

$$\|g\|_{\mathcal{M}_{1,\rho}^s} \gtrsim \|g\|_{(\dot{W}^{1,p})^*} \approx \|g\|_{\dot{W}^{-1,p'}}$$

が得られる. ここで,

$$\dot{W}^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{W}^{-1,p'}} = \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f \right\|_{L^{p'}} < \infty \right\}$$

と定めたときの双対性 $(\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n))^* \cong \dot{W}^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ を用いた. したがって, $C_c^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{1,\rho}^s(\mathbb{R}^n)$ の稠密性 (cf. [3, Corollary 2.21]) から, Sobolev の埋め込み定理の次のような改良版が得られる.

系 4.2. $1 < p < \infty$ に対して, 埋め込み

$$\mathcal{M}_{1,p^*}^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{W}^{-1,p^*}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

実は Lorentz 空間を用いると, シャープな Sobolev の埋め込み定理

$$L^{p,p^*}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{W}^{-1,p^*}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことが知られている. しかし, 真の埋め込み $L^{p,p^*}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{1,p^*}^p(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ (cf. [3, Corollary 2.16 and Theorem 3.18]) ため, この系はさらなる改良となっていることがわかる.

参考文献

- [1] J. Bourgain, On the restriction and multiplier problems in $\mathbb{R}^3$, in: Geometric Aspects of Functional Analysis (1989–90), in: Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, pp.179–191.
- [2] E. B. Fabes, C. E. Kenig and R. P. Serapioni, The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), no. 1, 77–116.
- [3] N. Hatano, T. Nogayama, Y. Sawano and D. I. Hakim, Bourgain–Morrey spaces and their applications to boundedness of operators, J. Funct. Anal. **284** (2023), no. 1, Paper No. 109720, 52 pp.

- [4] A. K. Lerner, S. Ombrosi and I. P. Rivera-Ríos, On pointwise and weighted estimates for commutators of Calderón-Zygmund operators, *Adv. Math.* **319** (2017), 153–181.
- [5] S. Masaki, J. Segata, Existence of a minimal non-scattering solution to the mass-subcritical generalized Korteweg–de Vries equation, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **35** (2) (2018) 283–326.
- [6] C. Pérez and E. Rela, Degenerate Poincaré–Sobolev inequalities, *Transactions of the American Mathematical Society*, **372**, No. 9 (2019), 6087–6133.