

メビウスジャイロベクトル空間の間の写像 のジャイロ和について

新潟大学・自然科学系 渡邊 恵一

Keiichi Watanabe,
Institute of Science and Technology,
Niigata University

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP21K03288. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

1 Introduction

これはおもに [8] の結果のアナウンスである。

2つの距離空間 (X, d_X) , (Y, d_Y) の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ が Lipschitz 連続であるとは、ある定数 C が存在して

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq C d_X(x, x')$$

がすべての $x, x' \in X$ に対して成り立つことであり、このとき

$$L(f) = \sup_{x, x' \in X, x \neq x'} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')}$$

が $f : X \rightarrow Y$ の Lipschitz 定数といわれることは解析学や幾何学における最も基礎的な事項のひとつである。

2つのノルム空間 E, F の間の有界線形作用素 $T : E \rightarrow F$ がそれぞれのベクトルの引き算のノルムで定められる距離に関して Lipschitz 連続でありその Lipschitz 定数が作用素ノルムと一致することは関数解析における最も基礎的な事項のひとつである。

$$L(T) = \sup_{x \neq x'} \frac{\|Tx - Tx'\|}{\|x - x'\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|.$$

さらに、2つの有界線形作用素 $T, S : E \rightarrow F$ に対して、各点の演算

$$(T + S)(\mathbf{x}) = T\mathbf{x} + S\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in E)$$

によって写像 $T + S : E \rightarrow F$ が定義され、 $T + S$ は線形かつ有界で

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

が成り立ち、 E から F への有界線形作用素全体 $\mathcal{B}(E, F)$ が作用素ノルムでノルム空間をなすことも容易に分かるのだった。

簡単のため、以下では $\|T\| \leq 1$ とする。2つの内積空間 $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ の間のノルム 1 以下の有界線形作用素 $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ を原点を中心とする開球がなす Möbius gyrovector space に制限した写像は、Möbius の引き算のノルムから定まる Poincaré distance (あるいは Möbius metric) に関して Lipschitz 連続であり、その Lipschitz 定数が作用素ノルムと一致することが知られている ([7] を参照)。

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| < s, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{h_M(T\mathbf{x}, T\mathbf{y})}{h_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \|T\|.$$

ここで、 $h_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の定義は次節で説明する。

すると、「作用素が 2 つになったらどうだろうか？」と考えることは、結果として上手くいかないかもしれないが、ある種当然のことである。

$T, S : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ を実内積空間の間の線形作用素とし、 $\|T\|, \|S\| \leq 1$ とする。

$$(T \overset{\text{pt}}{\oplus} S)(\mathbf{x}) = T\mathbf{x} \oplus_M S\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{U}_s).$$

によって写像 $T \overset{\text{pt}}{\oplus} S : \mathbb{U}_s \rightarrow \mathbb{V}_s$ を定義できる。 $T\mathbf{x} \oplus_M S\mathbf{x}$ の定義は次節で説明する。

- $\overset{\text{pt}}{\oplus}$ が記号としてよいかどうかは疑問だが、通常の直和や、gyro の文脈でも $\oplus_M, \oplus_E$ などと明確に区別する必要があるため、ここではやむなく導入して使うことにする。各点での演算によって定義していることを表すため pointwise の pt を $\oplus$ の真上に書いている。
- 上記の定義は誰でも考えるようなものではあるが、筆者が公的な場で見聞きしたのは [1], [2] が最初だったと思う。そこではより一般的な設定で導入されていた。

暫定的な問. $T \overset{\text{pt}}{\oplus} S$ は距離 h_M に関して Lipschitz 連続か??

もしそうなら, $T \overset{\text{pt}}{\oplus} S$ の Lipschitz 定数を作用素ノルム $\|T\|, \|S\|$ を用いて評価できるか?? 例えば $L(T \overset{\text{pt}}{\oplus} S) \leq \|T\| + \|S\|$ が成り立つか??

ここでは, 一般の T, S では難しそう(?)なので, 以下のようなたいへん特殊なものに限って考える. I を $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ 上の恒等写像とする. 実数 $0 \leq a, b \leq 1$ に対して

$$(aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI)(x) = ax \oplus_M bx \quad (x \in \mathbb{V}_1)$$

によって定義される写像 $aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_1$ を扱うが, それでも今回分かったことは, より限定的なものである。

2 Preliminaries

Gyrogroup や一般の real inner product gyrovector space の定義などについては Ungar[6] を参照していただきたい。Möbius gyrovector space とその最小限の事項を思い出そう。 $\mathbb{V}$ は実内積空間, $\mathbb{V}_s$ は原点を中心とする半径 s の開球 $\{a \in \mathbb{V} : \|a\| < s\}$.

定義. [6, Definition 3.40, Definition 6.83] Möbius の和 $\oplus_M$ と Möbius のスカラー倍 $\otimes_M$ は

$$a \oplus_M b = \frac{\left(1 + \frac{2}{s^2} a \cdot b + \frac{1}{s^2} \|b\|^2\right) a + \left(1 - \frac{1}{s^2} \|a\|^2\right) b}{1 + \frac{2}{s^2} a \cdot b + \frac{1}{s^4} \|a\|^2 \|b\|^2}$$

$$r \otimes_M a = s \tanh \left(r \tanh^{-1} \frac{\|a\|}{s} \right) \frac{a}{\|a\|} \quad (\text{if } a \neq 0), \quad r \otimes_M 0 = 0$$

によって, 任意の $a, b \in \mathbb{V}_s, r \in \mathbb{R}$ に対して定義される。

同じ記号を用いるが, (上記とは別の) 和 $\oplus_M$ とスカラー倍 $\otimes_M$ が

$$a \oplus_M b = \frac{a + b}{1 + \frac{1}{s^2} ab}$$

$$r \otimes_M a = s \tanh \left(r \tanh^{-1} \frac{a}{s} \right)$$

によって, 任意の $a, b \in (-s, s), r \in \mathbb{R}$ に対して定義される。 $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ の場合, これらとベクトルに対するものは一致する。

$\oplus_M, \otimes_M$ の定義に現れている s は, 不要なときは記号から省かれている。

$\dim \mathbb{V} \geq 2$ ならば, Möbius の演算は一般に可換でも結合的でも分配的でもない:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{b} &\neq \mathbf{b} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} (\mathbf{b} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{c}) &\neq (\mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{b}) \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{c} \\ r \otimes_{\mathbf{M}} (\mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{b}) &\neq (r \otimes_{\mathbf{M}} \mathbf{a}) \oplus_{\mathbf{M}} (r \otimes_{\mathbf{M}} \mathbf{b}) \\ t(\mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{b}) &\neq (t\mathbf{a}) \oplus_{\mathbf{M}} (t\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M},s} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &\neq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \oplus_{\mathbf{M},s^2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

次の命題は, 線型解析の結果がジャイロ線型解析の対応物から復元され得ることを示唆している。

命題. [6, after Remark 3.41], [5, p.1054]

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{b} &\rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (s \rightarrow \infty) \\ r \otimes_{\mathbf{M}} \mathbf{a} &\rightarrow r\mathbf{a} \quad (s \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$, $r \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。

定義. [6, Definition 2.7, (2.1), (6.286), (6.293)] $\oplus_{\mathbf{M}}$ に関する $\mathbf{a}$ の逆元はベクトルの和 $+$ に関する逆元 $-\mathbf{a}$ であることに注意しておく。通常のベクトル空間のように記号

$$\mathbf{a} \ominus_{\mathbf{M}} \mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus_{\mathbf{M}} (-\mathbf{b})$$

を用いる。さらに, Möbius gyrodistance function $d_{\mathbf{M}}$ と Poincaré distance function または Möbius metric $h_{\mathbf{M}}$ が

$$d_{\mathbf{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} \ominus_{\mathbf{M}} \mathbf{a}\|, \quad h_{\mathbf{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tanh^{-1} \frac{d_{\mathbf{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{s}$$

によって定義される。

Ungar はジャイロ群や実内積ジャイロベクトル空間についてのいろいろな結果の中で次の定理を示した。

定理. [6, (6.294)] 三角不等式

$$h_{\mathbf{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq h_{\mathbf{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + h_{\mathbf{M}}(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

が任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_s$ に対して成り立ち, $(\mathbb{V}_s, h_{\mathbf{M}})$ は距離空間である。 $\mathbb{V}$ が実ヒルベルト空間ならば $(\mathbb{V}_s, h_{\mathbf{M}})$ は距離空間として完備である。

次の公式は定義からの容易な帰結である。これによって、 $s = 1$ の Möbius gyrovector space に対して得られた結果の多くが一般の $s > 0$ に対する結果に容易に拡張される。

補題. $s > 0$ とする。

$$(i) \quad \|a \oplus_M b\|^2 = \frac{\|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2}{1 + \frac{2}{s^2} a \cdot b + \frac{1}{s^4} \|a\|^2 \|b\|^2}$$

$$(ii) \quad \frac{a}{s} \oplus_{M,1} \frac{b}{s} = \frac{a \oplus_{M,s} b}{s}$$

$$(iii) \quad r \otimes_{M,1} \frac{a}{s} = \frac{r \otimes_{M,s} a}{s}$$

が任意の $a, b \in \mathbb{V}_s$, $r \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。

3 今回の結果

3.1 $aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI$ の Lipschitz 定数の下からの評価

Theorem.[8] Let $\dim \mathbb{V} \geq 2$, $0 \leq a, b \leq 1$.

(i) If $a^2 + ab + b^2 \leq 1$, then $L(aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI) \geq a + b$.

(ii) If $a \neq b$ and $a^2 + ab + b^2 > 1$, then

$$L(aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI) \geq \left(\frac{\sqrt{a(1-b^2)} - \sqrt{b(1-a^2)}}{a-b} \right)^2.$$

(iii) If $a = b$ and $3a^2 > 1$, then

$$L(aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI) \geq \frac{(1+a^2)^2}{4a(1-a^2)}.$$

Corollary. If $\dim \mathbb{V} \geq 2$, then $I \overset{\text{pt}}{\oplus} I$ is not Lipschitz continuous.

3.2 $aI \overset{\text{pt}}{\oplus} (1-a)I$ の Lipschitz 定数はちょうど 1

Theorem.[8] Let $0 \leq a, b \leq 1$.

(i) $L(aI \overset{\text{pt}}{\oplus} (1-a)I) = 1$.

(ii) If $\dim \mathbb{V} = 1$, then $L(aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI) = a + b$.

暫定的な問に対する答えは、 $aI \overset{\text{pt}}{\oplus} bI$ 型の写像に限定して、 $a = b = 1$ では否定的、 $a + b = 1$ では肯定的だった。

問. (2026 年 3 月)

- セクション 3.1 の定理で等号が成り立つのではないか？
- もっと広いクラスの有界線形作用素に対して $T \overset{\text{pt}}{\oplus} S$ の Lipschitz 定数を T と S の作用素論的量で評価せよ。

参考文献

- [1] T. Abe, Spaces of functions whose range is the Poincaré disk and their duals (oral presentation), Conference on Function Algebras 2023.
- [2] H. Koshimizu and T. Abe, Isometries on function spaces that are gyrolinear spaces (oral presentation), Conference on Function Algebras 2023.
- [3] A. A. Ungar, Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, *Found. Phys. Lett.* **1**, no. 1, 57–89 (1988).
- [4] A. A. Ungar, Group-like structure underlying the unit ball in real inner product spaces, *Results Math.* **18**, no. 3–4, 355–364 (1990).
- [5] A. A. Ungar, Extension of the unit disk gyrogroup into the unit ball of any real inner product space, *J. Math. Anal. Appl.* **202**, no. 3, 1040–1057 (1996).
- [6] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.
- [7] K. Watanabe, On Lipschitz continuity with respect to the Poincaré metric of linear contractions between Möbius gyrovector spaces, *J. Inequal. Appl.* Vol.2021, Paper No. 166.
- [8] K. Watanabe, On Lipschitz constant of mappings between Möbius gyrovector spaces, preprint.