

作用素の対数表現と δ -正則化による 分数冪作用素の構成

大阪経済法科大学・岩田順敬 *

Yoritaka Iwata

Osaka University of Economics and Law,
Gakuonji 6-10, Yao, Osaka 581-8511, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010 : 26A33, 30H25. 47A60, 47D60

Abstract

本稿では、Banach空間上の抽象発展方程式の解表現である C^0 半群に基づき、無限小生成作用素の対数表現 D を介して分数冪作用素 D^δ を構築する新たな手法を提示する。従来のV. Balakrishnanによる分数冪の定式化は、生成作用素の正値性や角域条件（解析的半群の生成）を本質的な仮定としていたが、本手法はこれら幾何学的な制約を、有界作用素の代数的な δ -正則化によって回避する。具体的には、半群のレゾルベントから導かれる有界作用素の族に対し、複素解析的な対数表現を適用することで、可逆性に関する仮定をおくものの、より一般の C^0 半群の生成作用素に対する分数冪が、正則化パラメータ δ の選択に依存せず、一意かつ厳密に定義可能（well-defined）であることを数学的に証明する。本稿で提案された理論は、非解析的半群や非自律系（無限小生成作用素が時間変数に依存する場合）の正則性評価など、広範な応用可能性を持つ。

1 序論

分数冪作用素は、通常の整数冪では捉えきれない複雑な現象を解析し、抽象発展方程式の解の正則性を論じる上で不可欠な道具である。半群理論の枠組みにおける分数冪作用素の端緒は、V. Balakrishnan [1]によって導入され、吉田 [15]によって体系化された次式に求められる。

$$(-A)^\alpha \bar{u} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (U(t) - I) \bar{u} \, dt \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

ここで α は実数（特に $0 < \alpha < 1$ ）で、 $\bar{u}$ は $D(A) \subset X$ の元を表している。 A はBanach空間 X 上の C^0 半群 $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ の無限小生成作用素であり、 X 上の抽象発展方程式 $du/dt = Au$ の解表現となる。しかし、式(1)が成立するためには、作用素 $-A$ が正値性（positivity）を持つこと、すなわちレゾルベント集合が右半平面を含み、

$$\sup_{\operatorname{Re}(\lambda) > 0} |\operatorname{Re}(\lambda)| \cdot \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$$

を満たすことが本質的な仮定となる。この条件は、 $-A$ のスペクトルが原点を頂点とする複素平面上の扇形領域（sector）に包含されることを意味しており（角域条件）、従来の理

*E-mail address: y-iwata@s.keiho-u.ac.jp

論が解析的半群の枠組みへの限定を余儀なくされてきた主因である。理論的な背景を辿ると、式(1)の定式化は、本質的に複素関数論におけるCauchyの積分公式に起源を持つ。すなわち、

$$\frac{d^n f(z_0)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

である。ここで階乗 $n!$ はガンマ関数を用いて $\Gamma(n+1)$ として一般化され、整数 n を実数 α へ拡張する理論的な道が拓かれた。一方、関数解析の枠組みにおいて、この概念を抽象発展方程式 $dU(t)/dt = AU(t)$ の生成作用素 A に適用するためには、作用素に対する関数表現（Riesz–Dunford積分）が必要となる。Balakrishnanの定式化は、ガンマ関数による連続化のアイデアと、半群 $U(t)$ がレゾルベント作用素 $(zI - A)^{-1}$ とラプラス変換を介して結びつく性質を統合することで、作用素の分数冪表現を導き出したものである。V. Balakrishnanによる古典的な定式化は半群理論に立脚した美しい表式である一方で、次のような理論的・実用的制約を内包している。

1. 幾何学的制約: スペクトルが特定の扇形領域に制限される必要があり、非解析的半群への適用が困難である。
2. 定義域の制約: 非有界作用素の定義域（domain）の扱いに起因し、Kato理論 [7, 10]やそれらを体系化した Tanabe [14]に詳述されているような非自律系（無限小生成作用素が時間変数に依存する場合）への拡張において多大な解析的労力を要する。
3. 計算上の複雑性: 無限積分を含む形式は、数値解析や作用素の代数的な積（BCH公式等）の安定的な取り扱いを妨げる要因となる。

また、対数作用素を介した分数冪の構成については、Okazawa [12, 13]による先駆的な研究が存在する。そこでは、角域作用素（sectorial作用素）や増大作用素（accretive作用素）のクラスにおいて分数冪と対数表現の密接な関係が論じられている。しかし、これらの理論においてもスペクトルに対する幾何学的な角域条件が解析の基盤となっており、本稿が目指す「一般の C^0 半群への適用」という課題には依然として隔たりがある。これらの課題を克服するため、本稿では作用素対数表現理論 [4]を導入する。本アプローチの核心は、本来非有界である生成作用素 D を、半群のレゾルベントを介して定義される一族の「有界作用素 $\mathcal{D}$ 」へと写像することにある。この手法により、角域条件という幾何学的制約を、有界作用素の代数的なシフト（ δ -正則化）によって回避することが可能となる。本稿の目的は、無限小生成作用素の対数表現 $\mathcal{D}$ を基盤として、より広範なクラスの C^0 半群に適用可能な分数冪作用素 D^k の新たな定義を提示し、そのwell-defined性およびパラメータ依存性からの独立性を数学的に厳密に証明することにある。

2 数学的設定

空間 X をBanach空間とし、その一般論から議論を開始する。 X における一階の斉次抽象発展方程式（homogeneous abstract evolution equation）を次のように考える。

$$\begin{aligned} du/d\lambda - Du &= 0, & \lambda \in (a, b], \\ u(a) &= u_a \end{aligned} \tag{2}$$

ここで λ は分数冪作用素を定義するために導入された発展パラメータを表す。また、 D は λ に依存しない、Banach空間 X 上の無限小生成作用素である。本論において、 D は C^0 -半群（ C^0 semigroup）の生成素ではあるものの、必ずしも解析的半群（analytic semigroup）の生成作用素であるとは限らないものとする。この設定は、解の正則性が制限されるような、より広範かつ複雑な物理現象を記述するための一般的な枠組みを提供するものである。式(2)で示された方程式は、一般に双曲型抽象発展方程式（hyperbolic evolution equation）と呼ばれ

る [8, 9]。 D によって生成される発展作用素（作用素の半群）を $U(\lambda)$ と表すことにすれば、これは

$$U(\lambda) : X \rightarrow X$$

として定式化され、Banach空間 X 上の1パラメータの有界線形作用素族となる。この発展作用素を用いることで、方程式(2)の解は $u(\lambda) = U(\lambda - a)u_a$ と表現される。

$U(\lambda)$ は X 上の有界線形作用素であるため、空集合ではないレゾルベント集合を持つ。この有界作用素 $U(\lambda)$ に対し、次節で述べる生成作用素の対数表現を構築するための基盤となる作用素族 $I_\eta(\lambda)$ を次のように定義する。

$$I_\eta(\lambda) = (I - \eta^{-1}U(\lambda))^{-1}$$

ここで、 I は X 上の恒等作用素であり、 η は $I_\eta(\lambda)$ が有界作用素として存在し、かつその対数が構成可能となるような適切な複素パラメータである。この $I_\eta(\lambda)$ は、定数倍という意味で、実質的に $U(\lambda)$ に対するレゾルベント作用素を表している。

3 補題

本節では、次節の主定理を導出するための準備として、Banach空間上の作用素に対する対数表現に関する既存の成果を概観する。本稿の主な対象はBanach空間上の有界作用素 $U(\lambda)$ であるが、これを含むより一般的な非有界作用素族に対しても、対数表現を用いた体系的な理論が既に確立されている [3, 4]。したがって、本節で述べる諸結果は、包含関係に基づき有界作用素 $U(\lambda)$ に対してもそのまま適用可能である。そこで、Banach空間 X における有界作用素 $U(\lambda)$ と有界作用素 $I_\eta(\lambda)$ を用いて、定義域 $D(D) \subset X$ を持つ X 上の非有界作用素

$$D : D(D) \rightarrow X$$

に対して、対数関数を用いた表現を与える。これにより、生成作用素の特性をより広範な作用素族の枠組みの中で再定義することが可能となる。Iwata [3, 4] の手法に基づき、無限小生成作用素 D をレゾルベント作用素族 $I_\eta(\lambda)$ の対数関数を用いて次のように再定義する。

$$D = \lambda^{-1} (\text{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \text{Log}(I_\eta)) \quad (3)$$

ここで、 Log は主値を取る作用素対数を表す。この表現は、有界作用素 $I_\eta(\lambda)$ の λ に依存した挙動から、元の非有界作用素 D の定常的な性質を記述するものである。式(3)の右辺が作用素の等価性の意味において λ に依存しないことについては、Iwata [6] を参照されたい。補題としてまとめると次のようになる。

Lemma 3.1 (1パラメータ半群の無限小生成作用素の表現). Banach空間 X 上で定義された、空でないレゾルベント集合を持つ1パラメータ非有界作用素族 $\{U(\lambda)\}_{\lambda \in [a, b]}$ を考える。このとき、作用素 D を次のように構成する：

$$\mathcal{D} := \lambda^{-1} (\text{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \text{Log}[I_\eta]) \quad (4)$$

ここで、 η は適切な複素数、 $I_\eta(\lambda)$ は $U(\lambda)$ から定まるレゾルベント作用素族である。このとき、作用素 $\mathcal{D}$ は λ に依存しない無限小生成作用素として、 X 上に1パラメータ C^0 -半群 $U(\lambda)$ を生成する。

Proof. 本証明の詳細は文献 [3, 4, 6] に譲り、ここでは対数表現 $\mathcal{D}$ の構成原理の概略を述べる。Iwata [3, 4, 6] の議論に従えば、生成作用素 D と半群 $U(\lambda)$ の間には、レゾルベント I_η を介して次の関係が成立する。

$$U(\lambda) = \exp(\lambda \mathcal{D}) = \exp(\text{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \text{Log}[I_\eta])$$

ここで、右辺の指数関数の引数は有界作用素の対数の差（代替的生成素 [2] の差）として構成されている。とくに右辺第一項については、 $U(\lambda)$ が連続半群（ C^0 -semigroup）であることから、 λ が動く範囲 $[a, b]$ を適切に制限することで（具体的には $1 \in \rho(U(\lambda))$ となる領域を選ぶことで）、対数関数は作用素関数論（Functional Calculus）の意味で well-defined となる。作用素関数論（Functional Calculus）的な観点から、この指数写像は作用素ノルムに関して λ について広義一様収束し、元の半群 $U(\lambda)$ の解析的性質を完全に再現する。□

元の作用素 D が Banach 空間 X における非有界作用素であっても、再定義された作用素 $\mathcal{D}$ は有界作用素として構成される（代替的生成素 [2]）。したがって、作用素 D と $\mathcal{D}$ は、いずれも同一の半群 $U(\lambda)$ を生成するという共通点を持つ一方で、その定義域や有界性といった解析的性質においては異なり得るものであることに留意が必要である。

以上の準備の下、次節において本稿の主要結果である分数冪作用素の構成とその一意性を示す。

4 主定理

前節の補題 3.1 で得られた定常的な D の対数表現に基づき、本節では、分数冪作用素 D^k を、指数関数と対数関数を用いた $\exp(k \operatorname{Log} D)$ 的な形式によって定義する。このアプローチにより、解析的半群の生成作用素に限定されないより一般の D に対しても、分数冪作用素を厳密かつ統一的に扱うことが可能となる。以下に、本論文の主要な定理を提示する。

Theorem 4.1. X を Banach 空間とし、作用素 D を無限小生成作用素にもつ X 上の C^0 半群を $\{U(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$ とする。ここで作用素 D は原点をレゾルベント集合に含むものと仮定する。次の抽象 Cauchy 問題：

$$du(\lambda)/d\lambda = Du(\lambda), \quad \lambda \in (a, b],$$

$$u(a) = u_a \in X$$

の一意な解 $u(\lambda) = U(\lambda - a)u_a$ に対し、生成作用素 D は、十分大きな実数 η を用いて次の対数表現 $\mathcal{D}$ を持つ：

$$\mathcal{D} = \lambda^{-1} (\operatorname{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \operatorname{Log}[I_\eta])$$

ここで、 $I_\eta = (I - \eta^{-1}U(\lambda))^{-1}$ は $U(\lambda)$ から定まるレゾルベント作用素である。さらに、分数冪作用素 D^k ($k \in \mathbb{R}$) は、正定数 δ を用いて次のように定義される。

$$\mathcal{D}^k = \exp \left[k \{ \operatorname{Log}[I - \delta(\mathcal{D} + \delta I)^{-1}] + \operatorname{Log}[\mathcal{D} + \delta I] \} \right], \quad (5)$$

ただし、 δ は作用素 $(\mathcal{D} + \delta I)$ が有界な逆作用素を持ち、かつ対数関数が主値をとる領域で定義可能となるように選ばれた正定数とする。

Proof. 本証明の目的は、補題 3.1 によって構成された有界作用素 $\mathcal{D}$ を基盤として、分数冪作用素 D^k の定義が δ の選択に依存せず、かつ X 上で well-defined であることを示すことにある。

1. 一般に C^0 半群の生成作用素 D は非有界であり、その対数や分数冪を直接定義する際には定義域 $D(D)$ の解析的な制約が問題となる。ここでは、レゾルベントから導かれる有界作用素の族に対し、パラメータ $\delta > 0$ を用いた δ -正則化を施すことで、この困難を回避する。定理の証明において極めて重要なのは、提示した分数冪の定義が δ -正則化のプロセス、すなわち正則化パラメータ δ の選択に依存しないことである。 δ -正則化とは、具体的には、単独では非有界性や特異性を持ち得る作用素 $\mathcal{D}$ を直接扱う代わりに、 δ によるシフトを施した作用素 $\mathcal{D} + \delta I$ を基本元（生成単位）として、分数冪作用素を代数的に再構成する手続きに対応する。

2. 定理の仮定より δ は $(\mathcal{D} + \delta I)$ が有界な逆作用素を持つように選ばれている。 $\mathcal{D}$ が有界作用素であることから、スペクトル写像の定理 (Spectral Mapping Theorem) に基づけば、そのスペクトル $\sigma(\mathcal{D} + \delta I)$ は複素平面上の有界集合であり、適切な δ の選択によって対数関数の主値をとる領域 $(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ に包含される。したがって、有界作用素に対する関数演算により $\text{Log}[\mathcal{D} + \delta I]$ はwell-definedであり、そのスペクトル $\sigma(\text{Log}[\mathcal{D} + \delta I])$ もまた有界集合となる。同様に、指数関数 $\exp$ による写像においても、スペクトル写像の定理から、 $\exp(\sigma(k\text{Log}[\mathcal{D} + \delta I]))$ が有界であることが保証される。

3. 次に、定義式(5)における第一項

$$A_\delta := I - \delta(\mathcal{D} + \delta I)^{-1}$$

について検討する。 $(\mathcal{D} + \delta I)^{-1}$ の有界性により A_δ もまた X 上の有界作用素であり、代数的な変形によって $A_\delta = \mathcal{D}(\mathcal{D} + \delta I)^{-1}$ と記述できる。ここで、スペクトル写像の定理によれば、

$$\sigma(A_\delta) = \left\{ \frac{z}{z + \delta} \mid z \in \sigma(\mathcal{D}) \right\}$$

となる。作用素 $\mathcal{D}$ が原点をレゾルベント集合に含むものという仮定 ($0 \in \rho(A_\delta)$) から、 $\sigma(A_\delta)$ は原点から隔離されること、 $\sigma(A_\delta)$ は主値対数が正則な領域に包含されることが保証される。したがって、指数法則および作用素関数の可換性に基づけば、式(5)の指数関数内は

$$k \{ \text{Log} [\mathcal{D}(\mathcal{D} + \delta I)^{-1}] + \text{Log}[\mathcal{D} + \delta I] \} = k \text{Log } \mathcal{D}$$

と整理され、これは δ の選択に依存しない $\mathcal{D}$ のintrinsic(固有)な性質のみによって確定することが示される。

以上により、分数冪作用素 $\mathcal{D}^k$ は X 上の有界作用素としてwell-definedで、抽象Cauchy問題の解 $u(\lambda)$ に対する演算として矛盾なく適用可能であることが示された。□

5 注釈

主結果と既存の理論との関連性について述べる。無限小生成作用素 D に対して、 $-D$ が非負作用素であることを仮定すれば、V. Balakrishnanによる分数冪作用素の理論 [1]で示された後述の(6)式に基づき、その対数表現に対応する積分表示を得ることができる。具体的には、前述のレゾルベント作用素族 $I_\eta(\lambda)$ を用いて、 D は次のように再構成される。

$$D = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 + \eta} I - I_\eta(\lambda) \right) d\eta \quad (6)$$

この表現式は、本来、非有界である D の特性を、有界作用素の積分として記述するものである。ここで D は、半群 $U(\lambda)$ に対して形式的に $D = \lambda^{-1} \text{Log } U(\lambda)$ という関係を示唆している。本論文で提示した分数冪作用素 $\mathcal{D}^k$ の定義は、この古典的な積分表示と同一の基盤を持ちつつも、複素解析的な有界作用素の対数表現 $\mathcal{D}$ を通じて、より一般の C^0 半群の生成作用素へと統一的に拡張したものと解釈できる。

この積分表示は、非有界作用素 D を有界なレゾルベント作用素の族 $\{I_\eta(\lambda)\}_{\eta>0}$ によって構成するものであり、発展方程式論における古典的かつ強力な道具である。しかし、実用上の計算、特に数値解析や作用素の代数的な積 (BCH公式等) を扱う場面においては、無限積分を含む形式よりも、本稿の定理4.1で提示した δ による有限表現の方が、演算の安定性と簡便性の面で顕著な利点を持つ。さらに、Balakrishnanの理論が主に解析的半群 (Analytic Semigroup) の枠組み、すなわち生成作用素 D のスペクトルが複素平面上の特定の扇形領域

に限定される場合に真価を発揮するのに対し、本稿の手法は、一般的な C^0 半群の生成作用素 D に対して、対数表現 D を通じて統一的に分数冪を定義できる点に独自の意義がある。

他方で、上述の「主に解析的半群の枠組みに限定される」という点について掘り下げてみる。一般に、生成作用素 D が非有界である場合、 k を正の実数として、その分数冪 D^k の定義には、スペクトルが負の実軸を避けるという条件と角域条件 (sectorial condition) の下でのDunford積分表示：

$$D^{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-k} (zI - D)^{-1} dz$$

を用いることができる。ここで、積分路 Γ は D のスペクトル $\sigma(D)$ を囲み、かつ z^{-k} の分岐線 (負の実軸) を避けるように設定される必要がある。このため、従来の理論では D が解析的半群を生成すること、すなわち $\sigma(D)$ が原点を頂点とする扇形領域 (角域) に含まれることが本質的な仮定となっていた。これに対し、本稿で導入した分数冪 D^k の定義(5)は、 D が有界作用素であることを最大限に利用している。有界作用素に対しては、 δ によるシフトによってスペクトルを対数関数の正則領域内へ強制的に配置することが可能であり、生成作用素 D が角域条件を満たさない一般的な C^0 半群の生成作用素であっても、分数冪を一意的かつ厳密に確定できる。この事実は、正値性や解析性を必ずしも持たない発展方程式の解の正則性評価において、極めて広範な適用可能性を示唆している。例えば、双曲型方程式や遅延微分方程式など、角域条件が必ずしも満たされない系に対しても、本手法は一貫した解析的枠組みを提供するものである。

実際、対数関数を用いて分数冪を構成するという観点からは、形式的に $D^k = \exp(k \log D)$ と定義すれば十分ではないかという考えもあり得る。しかし、このナイーブな定義は、 $\log D$ の定義域の制限、および指数写像の構成における角域条件の必要性という二重の困難に直面する。本稿の提案する δ -正則化は、これらの制約を回避し、一般の C^0 半群の生成作用素に対して一意な分数冪を与えるための本質的な手続きである。これは結局、従来のBalakrishnanによる定式化が抱えていた「解析的半群への制限」を再生産することに他ならない。

6 結論

本稿では、 C^0 半群の生成作用素に対し、対数表現 D を介した分数冪作用素 D^k の新たな定式化を提示した。主要な結果を以下に列挙する。

- 外部パラメータ λ による定式化: 分数冪作用素を定義するために、時間パラメータ t とは独立した発展パラメータ λ を導入した。これにより、系が時間に依存するか否かにかかわらず、この外部パラメータを介して作用素の分数冪を一貫して定義する枠組みを確立した。
- 幾何学的制約の解消: 従来のBalakrishnan理論やOkazawaらの対数作用素理論において不可欠であった「角域条件 (sectorial条件)」や「増大性条件 (accretivity条件)」というスペクトル上の幾何学的制約を、有界作用素の代数的な δ -正則化によって回避した。
- 数学的厳密性の確立: 導入した分数冪の定義が、正則化パラメータ $\delta > 0$ の選択に依存せず、一意かつwell-definedであることを厳密に証明した。
- 適用範囲の拡大: 本手法により、解析的半群に限定されない広範な C^0 半群のクラスに対し分数冪を定義することが可能となった。これは、懸案である非自律系 (時間依存系) の抽象発展方程式 (例えば、Kato [11]) における正則性解析や、数値スキームの安定性評価において新たな解析的基盤を提供するものである。

今後、本理論をTanabe [14]等で論じられている具体的な非自律的発展方程式の基本解構成へと適用し、従来の理論における定義域の滑らかさに関する制約がどの程度緩和されるかを検証することが課題となる。

謝辞

この研究は京都大学の補助を得て行われました。

References

- [1] V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pacific J. Math.*, **10** (2), 1960, 419–437.
- [2] Y. Iwata, Alternative infinitesimal generator of invertible evolution families, *J. Appl. Math. Phys.*, **5** (2017) 822–830.
- [3] Y. Iwata, Theory of $B(X)$ -module: algebraic module structure of generally-unbounded infinitesimal generators, *Adv. Math. Phys.*, **2020**, Article ID 3989572.
- [4] Y. Iwata, Unbounded generalization of logarithmic representation of infinitesimal generators, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **46** (8), 2023, 9002–9016.
- [5] 岩田順敬, 1パラメータ連続群を生成する作用素類の表現, 第9回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 報告集, 2024, 108–115.
- [6] 岩田順敬, Besov空間における高階発展方程式, 京都大学数理解析研究所講究録 **2313**, 2025, 出版中.
- [7] T. Kato, Abstract evolution equations of parabolic type, *J. Math. Soc. Japan*, **13** (3), 1961, 246–274.
- [8] T. Kato, Linear evolution equation of “hyperbolic” type, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **17**, 1970, 241–258.
- [9] T. Kato, Linear evolution equation of “hyperbolic” type II, *J. Math. Soc. Japan*, **25** (4), 1973, 648–666.
- [10] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1980.
- [11] T. Kato, Abstract evolution equations, linear and quasilinear, revisited, in: *Functional Analysis and Related Topics, 1991 (Kyoto)*, Lecture Notes in Math., **1540**, Springer, Berlin, 1993, 103–125.
- [12] N. Okazawa, Logarithmic, fractional and imaginary powers of diffusing operators, *J. Funct. Anal.*, **66** (3), 1986, 299–321.
- [13] N. Okazawa, Sectorial operators and fractional powers associated with non-negative operators, *Israel J. Math.*, **94** (1), 1996, 409–428.
- [14] H. Tanabe, *Equations of evolution*, Pitman, 1979.
- [15] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1965.