

行列の局所平行集合の包含順序に関する順序同型写像

東京理科大学 中村 淳平

Jumpei Nakamura

Tokyo university of science

1 導入

数学的な対象間の構造保存写像 (preserver) の研究は、線形代数や作用素環論において盛んに行なわれてきたテーマの一つであり、保存問題 (preserver problem) と呼ばれる。特に C^* 環の文脈では、連続関数環における Banach-Stone の定理やその非可換一般化である Kadison の定理に代表されるように、等距離写像や順序同型写像がもとの空間の構造をどの程度保存するかということは歴史的に研究されてきた。Birkhoff-James 直交性 (以下 BJ 直交性) と呼ばれる、ヒルベルト空間における直交性の概念をノルム空間に拡張したものについての保存問題の研究が Koldobsky[4]、Blanco、Turnšek ら [1] によって始められ、BJ 直交性を保存する線形写像が等距離写像のスカラー倍に決定されることが示された。このような問題を考えることは、空間のある構造の剛性、すなわち限られた情報から元の空間全体の情報がどの程度復元されるか、を明らかにすることに繋がる。以上の流れに対し [2] では、連続関数環 $C_0(K)$ において、BJ 直交性を保存する写像の一般化であるノルム到達集合 (norm attainment sets) の包含順序保存写像が、線形の場合には等距離写像のスカラー倍であることが示された。

本稿では [3] について報告する。特に本研究会での五十嵐氏の講演で導入された、連続関数環におけるノルム到達集合の C^* 環への非可換拡張である局所平行集合 (locally parallel sets) を行列環の上で考察し、その保存問題を考える。

定義 1.0.1 (ノルム到達集合). C^* 環 $\mathfrak{A}$ に対し、 $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ でその純粋状態全体を表す。 $A \in \mathfrak{A}$ に対し、 $\mathcal{P}_A$ を以下のように定める。

$$\mathcal{P}_A = \{\rho \in \mathcal{P}(\mathfrak{A}) : |\rho(A)| = \|A\|\}$$

また、 $A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、包含関係による順序を以下のように定める。

$$A \preceq_{\mathcal{P}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{P}_A \subset \mathcal{P}_B$$

局所コンパクトハウスドルフ空間 K による連続関数環 $C(K)$ とその元 f に対して、 $\mathcal{P}_f$ は評価写像 $\delta_x : K \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて次のように表現できる。

$$\mathcal{P}_f = \{\delta_x : x \in K, |f(x)| = \|f\|\}$$

そのため、 $\mathcal{P}_f$ は連続関数環におけるノルム到達点の集合と同一視できる。特に、連続関数環においてはノルム到達集合の包含関係と BJ 直交性の右直交集合の包含関係が一致することが知られており、このような空間では $\preceq_{\mathcal{P}}$ の構造の背後には直交性の構造が潜んでいることが分っており、 $\preceq_{\mathcal{P}}$ を保存する線形写像が等距離写像のスカラー倍となることが示された [2]。

以上の結果は可換 C^* 環における BJ 直交性とノルム到達集合との対応関係を前提とするが、このような関係を一般の C^* 環にそのまま拡張することはできない [3, Example 3.9]。そこで、BJ 直交性とノルム到達集合の概念を非可換の場合に拡張し、準強 BJ 直交性と局所平行集合を導入した [3]。

定義 1.0.2 (準強 BJ 直交性). C^* 環 $\mathfrak{A}$ に対し、 $A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、準強 BJ 直交性 $\perp_{BJ}^q$ を以下のように定義する。

$$A \perp_{BJ}^q B \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{ある } \rho \in \mathcal{P}_A \text{ に対し } \rho(B^*A) = 0$$

定義 1.0.3 (局所平行集合とそれによる半順序). A を C^* 環 $\mathfrak{A}$ の元とする。 A の局所平行集合 $P_{\text{loc}}(A)$ を以下のように定義する。

$$P_{\text{loc}}(A) = \{B \in \mathfrak{A} : \text{すべての } \rho \in \mathcal{P}_A \text{ に対し } |\rho(B^*A)| = \|B\|\|A\|\}$$

また、 B を C^* 環 $\mathfrak{A}$ の元としたとき。半順序 $\preceq_{\text{loc}}$ を以下のように定義する。

$$A \preceq_{\text{loc}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} P_{\text{loc}}(A) \subset P_{\text{loc}}(B)$$

この定義は、可換の場合では $\preceq_{\mathcal{P}}$ によるものと整合するようになっている。直感的には、 $\mathcal{P}_A$ 上で出力が A と平行な方向に振る舞うような作用素の集まりである。本稿では $\preceq_{\text{loc}}$ による順序を保存する写像 (preserver) を導入し、それについての保存問題を考える。さらに、準強 BJ 直交性と局所平行集合は次の定理の意味で対応している。

定理 1.0.4 (Theorem 3.18[3]) $\mathfrak{A}$ を C^* 環、 $A, B \in \mathfrak{A}$ とする。 R_A^q を A の右準強 BJ 直交集合、すわち $\{X \in \mathfrak{A} : A \perp_{BJ}^q X\}$ とする。このとき次は同値

1. $R_A^q \subset R_B^q$
2. $A \precsim_{\text{loc}} B$

最後に、本稿での考察の対象となる保存写像を導入する。

定義 1.0.5. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を C^* 環とする。写像 $\Phi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ が局所平行集合による順序を保存するとは、任意の $A, B \in \mathfrak{A}$ に対し以下が成り立つことを言う。

$$A \precsim_{\text{loc}} B \iff \Phi(A) \precsim_{\text{loc}} \Phi(B).$$

定理 1.0.4 より、準強 BJ 直交性を保存する写像 ($A \perp_{BJ}^q B \iff \Phi(A) \perp_{BJ}^q \Phi(B)$) は局所平行集合による順序を保存する写像であることが従う。そのため、この保存写像は準強 BJ 直交保存写像を一般化した概念であるといえる。

保存問題を考える最初のステップとして、どのような形式の写像がこの種の保存写像に成りうるかについて以下で与える。

定理 1.0.6 ([3]) $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を C^* 環、 $\Phi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ を全射ジョルダン $*$ -同型写像、 u と v を $\mathfrak{B}$ のユニタリ元とし、各 x に対し $\Psi(A) = u\Phi(A)v$ のように Ψ を定める。このとき、 Ψ は準強 BJ 直交保存写像である。

一般の C^* 環に対して、1.0.4 より、上記の形式で書かれる写像は局所平行集合保存写像である。本稿の目的は、行列環という C^* 環における具体的なクラスに対して、局所平行集合による順序保存写像が上記の形式で書かれることを保存問題として調べることである。

2 行列環における局所平行集合の特徴付け

有限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素が成す環 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ において、純粋状態はすべてベクトル状態であることが知られる。このことから、局所平行集合は次のように表現できる。

$$P_{\text{loc}}(T) = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|Tx\| = \|T\| \text{ ならば } |\langle Tx, Sx \rangle| = \|S\| \|T\|\}$$

定義によると $P_{\text{loc}}(0) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であり、さらにこのような元は他に存在しないので、0 は半順序 $\precsim_{\text{loc}}$ に関する唯一の最小元である。以下では極大元と、0 を除いた場合での極小元の特徴付けを与える。

補題 2.0.1 (極大要素の特性付け) $\dim \mathcal{H} \geq 2$ とし、 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ とする。以下は同値である：

1. T は $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \leq_{loc})$ における極大要素である。
2. $\|T\|^{-1}T$ はユニタリ作用素である。

ユニタリ元は単位球上のすべて純粋状態においてノルムを到達するため、その局所平行集合は非常に強い制約をもち（包含の意味で小さくなり）、順序としては大きくなる。そのため、ユニタリ元が自然に極大元となることが分かる。逆向きについては、極分解 $T = U|T|$ を用い、極大性から $|T|$ が単位元のスカラー倍であることを示す。

補題 2.0.2 (極小要素の特性付け) $\dim \mathcal{H} \geq 2$ とし、 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ とする。以下は同値である：

1. T は $(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}, \preceq_{loc})$ における極小要素である。
2. $\mathcal{P}_A$ は 1 点集合である。

極小性の証明では、ノルム到達集合が 1 点集合であることから、局所平行集合の制約は弱くなり（包含の意味で大きくなり）、順序としては小さくなる。このことから自然に極小性が導かれる。逆向きについては、1 点集合でない場合に局所平行集合がより大きくなる元を構成して矛盾を示す。

上記の極大、極小元の特徴付けの効果は、局所平行集合の順序を保存する写像が C^* 環の特徴的な元を保存することが分かる点にある。特に極小元に関する特徴づけをより鋭くするために、 ℓ_∞^3 における以下の補題がカギとなる。

補題 2.0.3 (補題 5.6 [2]) $i = 1, 2, 3$ に対して $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}) \in \ell_\infty^3$ とおく。 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ が以下の条件を満たすと仮定する：

1. $i \in \{1, 2, 3\}$ かつ $i \neq j$ のとき、常に $|\xi_{ii}| > |\xi_{ij}|$ である。
2. $i < j$ かつ $|c| = 1$ のとき、常に $|\xi_{ii} + c\xi_{ji}| = |\xi_{ij} + c\xi_{jj}|$ である。
3. $|c| = |d| = 1$ のとき、常に以下が成立。

$$|\xi_{11} + c\xi_{21} + d\xi_{31}| = |\xi_{12} + c\xi_{22} + d\xi_{32}| = |\xi_{13} + c\xi_{23} + d\xi_{33}|$$

このとき、 $|\xi_{11}| = |\xi_{22}| = |\xi_{33}|$ であり、かつ $i \neq j$ ならば $\xi_{ij} = 0$ である。

補題 2.0.3 を用いることで次の補題が導かれる。

補題 2.0.4 $\mathcal{H}$ を $\dim \mathcal{H} = n \geq 3$ である有限次元複素ヒルベルト空間とし、 $(T_j)_{j=1}^n$ を $(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}, \preceq_{loc})$ における極小要素の族で、 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して $T_j \preceq_{loc} I$ を満たすものとする。 $\sum_{j=1}^n T_j = I$ かつ $\mathcal{P}_{T_j} = \{\omega_{x_j}\}$ であり、さらに以下を満たすと仮定する：

- (i) $i \neq j$ ならば $T_i \not\lesssim_{\text{loc}} T_j$ である。
- (ii) $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ かつ $i \neq j$ のとき、常に $T_i \lesssim_{\text{loc}} T_i + cT_j$ かつ $T_j \lesssim_{\text{loc}} T_i + cT_j$ である。
- (iii) $c, d \in \mathbb{C}, |c| = |d| = 1, j \in \{k, l, m\}$ であり、かつ k, l, m が互いに異なるとき、常に $T_j \lesssim_{\text{loc}} T_k + cT_l + dT_m$ である。
- (iv) $i \neq j$ ならば $T_i + T_j \lesssim_{\text{loc}} I$ である。

このとき、 $(T_j)_{j=1}^n$ は極小射影の直交族であり、各 j について $T_j(\mathcal{H}) = \mathbb{C}x_j$ が成り立つ。

これは線形演算と $\lesssim_{\text{loc}}$ の順序によって、互いに直交する 1 次元射影の族の特徴づけを与える。補題 2.0.2 によって $\lesssim_{\text{loc}}$ に関して極小な行列はノルム到達する状態ベクトルが 1 つしか存在しないことが従う。それらのベクトルの出力にのみ着目することで、補題 2.0.4 の証明は補題 2.0.3 に帰着させることができる。

3 行列環における局所平行集合保存写像

以下では $P_1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ によって $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の 1 次元射影全体の集合を表す。定理を示すにあたり、Uhlhorn の定理は良い中間地点となる。

定理 3.0.1 (Uhlhorn の定理 [5]) $\dim \mathcal{H} \geq 3$ とし、 $\phi : P_1(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \rightarrow P_1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ を全単射写像とする。このとき、任意の $P, Q \in P_1(\mathcal{H})$ に対して $P \perp Q$ が成り立つことと $\phi(P) \perp \phi(Q)$ が成り立つことは同値であるならば、あるユニタリ作用素または反ユニタリ作用素 $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が存在して、任意の $P \in P_1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ に対して $\phi(P) = UPU^*$ が成り立つ。

Uhlhorn の定理は Wigner の定理の 3 次元以上での簡易化としても知られ、1 次元射影とその直交性の情報のみから、写像の形が (反) ユニタリ変換という強く制限された形になるという非常に強力な定理である。さらに任意の作用素は 1 次元射影の線形和に分解できるため、写像に線形性を課すことで結果を作用素全体に拡張することができる。

定理 3.0.2 (Uhlhorn の定理 線形 ver.) $\dim \mathcal{H} \geq 3$ とし、 $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を定理 3.0.1 の仮定を満たす線形全単射とする。この時、あるユニタリ作用素または反ユニタリ作用素 $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が存在して、任意の $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\phi(T) = UTU^*$ が成り立つ。

Uhlhorn の定理を用いるために、局所平行集合による順序を保存する写像 Φ が 1 次元射影の直交関係を保存する線形写像であることを示す。ここで Φ が単位元を保存する (すなわち $\Phi(I) = I$) ならば、補題 2.0.4 から、 Φ は 1 次元射影の直交関係を保存することが従う。 Φ が単位元を保存しない場合には、2.0.1 より、 $\Phi(I)$ が極大元であることからユニタ

リ作用素のスカラー倍であることが分かり、適切に正規化することで単位元を保存する場合に帰着できる。よって以下の定理が得られる。

定理 3.0.3 $3 \leq \mathcal{H} < \infty$ とし、 $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を局所平行集合による順序を保存する線形全単射写像とする。この時、あるユニタリ作用素または反ユニタリ作用素の組 U, V が存在し、任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\Phi(A) = UAV$ が成り立つ。

上記の結果から、局所平行集合の順序を保存する写像は 1.0.6 より、準強 BJ 直交保存写像であることが従う。前者は後者よりも弱い条件であるが、最終的に 2 つは同じであることが行列環上で従う。

参考文献

- [1] A. Blanco and A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **136** (2006), no. 4, 709–716.
- [2] K. Igarashi, J. Nakamura, S. Roy, and R. Tanaka, *On order isomorphisms of norm attainment sets of continuous functions*, Acta Mathematica Hungarica **175** (2025), 486–506.
- [3] Koki Igarashi, Jumpei Nakamura, Saikat Roy, and Ryotaro Tanaka, *On order isomorphisms of locally parallel sets between C^* -algebras: The case of matrix algebras*, Linear Algebra Appl., **722** (2025), 190–219.
- [4] Alexander Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **123** (1993), no. 5, 835–837, Cited by: 69.
- [5] U. Uhlhorn, *Representation of symmetry transformations in quantum mechanics*, Arkiv Fysik **Vol: 23** (1962).