

開球上での Brezis-Van Schaftingen–Yung formula の 考察とその応用

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 * 澁谷 光祐 †

Kosuke Shibuya

Mathematical Institute, Tohoku University

1 序

本稿では非整数階 Sobolev 空間について考察する．非整数階 Sobolev 空間のノルムの定義には Fourier 変換を用いる方法をはじめいくつかの流儀が知られているが，ここでは Hölder 連続性の自然な拡張として定義される差分型分数階微分を用いて定められるものを考える．空間の次元を $N \geq 1$ ，函数の可微分指数を $0 < s < 1$ ，可積分指数を $1 \leq p < \infty$ としたとき，非整数階 Sobolev 空間 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ は， $f \in \mathcal{S}^*/\mathcal{P}$ であって Gagliardo–Slobodeckij セミノルム $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ が有限となる函数全体の空間である．ここで $\mathcal{S}^*$ は Schwartz 超函数のクラス， $\mathcal{P}$ は多項式全体の集合を表し，Gagliardo–Slobodeckij セミノルム $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ は次で定義される：

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p}+s}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)}. \quad (1)$$

Gagliardo–Slobodeckij セミノルムを用いて定める非整数階 Sobolev 空間は，例えば Fourier 変換を用いて定義される非整数階 Sobolev 空間，すなわちノルム

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s} := \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[|\xi|^s \hat{f} \right] \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

〒980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号

本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114，および科研費 25KJ0618 の支援を受けたものである．

が有限となる函数全体の空間と比較して, Fourier 変換のような全空間以外の領域での定義が困難な作用素を用いずにノルムを定義しているために, ノルムの定義に現れる積分区間を全空間から一般の領域 $\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ に変更するだけで函数の定義域を変更できるといった利点があり, これを生かして一般の領域上での多様な放物型・楕円型偏微分方程式の解析に活用されている (詳細は [5, 7] などを参照されたい).

こうした利点の一方で, Gagliardo–Slobodeckij セミノルムを用いて定義する方法には欠点も存在する. それは, 非整数階微分の極限として整数階微分が得られることが拡張として自然だが, 可積分性などの条件からそれは一致しない, というものである. 具体的には, Gagliardo–Slobodeckij セミノルムの定義 (1) において, 可微分指数 s を形式的に 0 や 1 としたとき, セミノルムの値は函数の L^p ノルムや 1 階 Sobolev セミノルムに一致することが期待されるが, 実際は一致することはなく, 函数が定数函数である場合を除いてセミノルム $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ は発散する (Brezis [2] 参照).

この Gagliardo–Slobodeckij セミノルムの「欠損」については様々な研究が行われている. Brezis [2] は Gagliardo–Slobodeckij セミノルムを s について $s \nearrow 1$ と極限をとったとき, 定数函数を除いてはその値が $1/(1-s)$ のオーダーで発散することを示した. また Bourgain–Brezis–Mironescu [1] は Gagliardo–Slobodeckij セミノルムに $(1-s)$ の重みをつけて $s \nearrow 1$ と極限をとることで Sobolev セミノルム $\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ に収束し欠損が回復できることを示した.

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p = C(p, N) \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p, \quad f \not\equiv \text{Const.} \quad (2)$$

さらに Brezis–Van Schaftingen–Yung [4] は, (1) で定めた Gagliardo–Slobodeckij セミノルムについて, そのノルムを L^p ノルムから 弱 L^p ノルムに置き換えて $s = 1$ とした場合を解析し, Sobolev セミノルム $\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ の新たな特徴づけを発見した:

命題 1.1 (Brezis–Van Schaftingen–Yung [4]). 任意の $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ に対し, 定数 $C_1 = C_1(N) > 0$, $C_2 = C_2(N) > 0$ が存在し, 任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\begin{aligned} C_1^p \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p &\leq \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mathcal{L}^{2N} \left(\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid x \neq y, \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p} + 1}} \geq \lambda \right\} \right) \\ &\leq C_2^p \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\mathcal{L}^{2N}$ は $2N$ 次元 Lebesgue 測度を表す.

この結果が示されてから以降, 様々な一般化や拡張が行われている. Poliakovsky [16] は 命題 1.1 が Lipschitz 境界を持つ一般の領域においても, 同様の関係式が成り立つこと

を示した. また Dai–Lin–Yang–Yuan–Zhang [6] らは ball Banach function space においても同様の関係式が成立することを示し, その系として, Morrey 空間 や Orlicz 空間などの幅広いクラスの函数に対して同様の関係式が成り立つことを示している. Ioku–Shibuya [9] は命題 1.1 をより一般の可積分性, すなわち Orlicz 空間において同様の関係式が成り立つことを示した. Orlicz 空間に対しての結果は [6] で既に示されていたが, その証明は Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性に大きく依存しているため, Orlicz 空間の定義に用いられる Young 函数にいくつかの仮定が必要であった. [9] ではより直接的な証明を行っているため, [6] で設けられた仮定を排除し, より一般的な Young 函数について同値な表現が成り立つことを示している.

本稿では, 命題 1.1 の関係式が有界領域, 特に開球上において同様に成立するか, 命題 1.1 の証明方法に基づき直接的な計算により検討する. またその系として, ノルムを領域について上限を取ることで定める函数のクラス, 具体的には Morrey 空間や一様局所可積分空間において命題 1.1 と同様の関係式が成り立つことを示す.

2 主結果

2.1 記号の導入

はじめに, 主定理及びその系, また証明を述べるために必要な記号について述べる.

N 次元 Lebesgue 測度を $\mathcal{L}^N$, もしくは単に $|\cdot|$ と表す. また N 次元単位球の体積 $\mathcal{L}^N(B_1(0))$ を ω_N と表し, $\Gamma(\cdot)$ で Gamma 函数を表すこととする. 開球 $B = B_R(z)$ と $a > 0$ に対し, $aB := B_{aR}(z) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - z| < aR\}$ と表記する.

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ と指数 $1 \leq p < \infty$ に対し, 弱 L^p 空間 $L^{p,\infty}(\Omega)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} L^{p,\infty}(\Omega) &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{可測} \mid \|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} < \infty\}, \\ \|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} &:= \inf \left\{ A \geq 0 \mid \mathcal{L}^N(\{x \in \Omega \mid |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{A}{\lambda}\right)^p \right\} \\ &= \sup_{\lambda > 0} \lambda \left(\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega \mid |f(x)| > \lambda\}) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Chebyshev の不等式を用いることで, $L^p(\Omega) \subset L^{p,\infty}(\Omega)$ が成り立つことがわかる. また, $|x|^{-N/p} \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N) \setminus L^p(\mathbb{R}^N)$ であるため, 弱 L^p 空間 $L^{p,\infty}$ は L^p 空間より真に広い空間であることがわかる.

次に, Morrey [14] により導入された Morrey 空間を定義する. パラメーター $1 \leq p \leq$

$q \leq \infty$ に対して, Morrey 空間 $M_p^q(\mathbb{R}^N)$ を次で定める.

$$M_p^q(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \mid \|f\|_{M_p^q(\mathbb{R}^N)} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{M_p^q(\mathbb{R}^N)} := \sup_{B \subset \mathbb{R}^N: \text{ball}} \frac{1}{|B|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}} \|f\|_{L^p(B)}.$$

Morrey 空間はその定義から $M_p^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$ が従うが, 一般に Morrey 空間は回帰的でないなど, L^p 空間とは異なる様相を呈す.

また, 局所 Morrey 空間 $\dot{M}_p^q(\mathbb{R}^N)$ を以下で定める.

$$\dot{M}_p^q(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \mid \|f\|_{\dot{M}_p^q(\mathbb{R}^N)} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{\dot{M}_p^q(\mathbb{R}^N)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N, 0 < R < 1} \frac{1}{|B_R|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}} \|f\|_{L^p(B_R(x))}.$$

また, $p = q$ とすれば, Kato [11] により導入された一様局所可積分空間 $L_{\text{ul}}^p(\mathbb{R}^N)$ に一致する:

$$\dot{M}_p^p(\mathbb{R}^N) = L_{\text{ul}}^p(\mathbb{R}^N),$$

$$\|f\|_{L_{\text{ul}}^p(\mathbb{R}^N)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_1(x)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

なお, 局所 Morrey ノルムの定義において開球の半径に関する上限を $0 < R < 1$ から $0 < R < L$, $L > 0$ に変更してもノルムは同値となる. これに起因して一様局所可積分空間のノルムの定義に用いる開球の半径は 1 として一般性を失わない. ただし偏微分方程式の解析に用いる場合は, 解の特徴量がノルムの定義に用いる半径に依存する場合があるため注意が必要である.

最後に, 証明において現れる定数について述べる. 次元 N と可積分指数 p に依存する定数 $k(N, p)$ を次で定める.

$$k(N, p) := \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |e \cdot \omega|^p d\omega \tag{3}$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N+p}{2}\right)}.$$

ここで (3) に現れる e は $\mathbb{R}^N$ の単位ベクトルで, 積分領域の対称性から $k(N, p)$ は e に依存しない. また, Hölder の不等式を用いることで次のように p に依存しない下からの

評価が得られる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{k(N, p)}{N} \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \frac{k(N, 1)}{N\omega_N} \omega_N^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \frac{k(N, 1)}{N\omega_N} \min \left\{ \frac{1}{N}, \frac{1}{N\omega_N} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 主定理

命題 1.1 の拡張として $s = 1$ の場合における開球上の弱型 Gagliardo–Slobodeckij セミノルムと Sobolev セミノルムの関係について, 以下の結果を得た:

定理 2.1. $N \geq 1, 1 \leq p < \infty$ とする. このとき定数 $C_1 = C_1(N) > 0, C_2 = C_2(N) > 0$ が存在し, 任意の開球 $B \subset \mathbb{R}^N$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して, 次が成り立つ.

$$C_1 \|\nabla f\|_{L^p(B)} \leq \left\| \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p} + 1}} \right\|_{L^{p, \infty}(B \times B)} \leq C_2 \|\nabla f\|_{L^p(\sqrt{10}B)}.$$

この系として, 局所 Morrey ノルムの同値な特徴づけとして, 以下を同定した.

系 2.2. $N \geq 1, 1 \leq p \leq q < \infty$ とする. このとき定数 $C_1 = C_1(N) > 0, \tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(N) > 0$ が存在し, 任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} C_1 \|\nabla f\|_{\dot{M}_p^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^N, 0 < R < 1} \frac{1}{|B_R|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}} \left\| \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p} + 1}} \right\|_{L^{p, \infty}(B_R(z) \times B_R(z))} \\ &\leq \tilde{C}_2 \|\nabla f\|_{\dot{M}_p^q(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \quad (5)$$

注意. 系 2.2 において, 開球の半径に関する $\sup$ の範囲を $0 < R < 1$ から $0 < R < \infty$ に変更することで, Morrey 空間 M_p^q における同値な特徴づけを得る. また, $p = q$ とすれば一様局所可積分空間における同値な特徴づけを得る. 局所 Morrey 空間や一様局所可積分空間は ball Banach function space では扱うことができないクラスであるため, これらの空間における弱型セミノルムの同値性は, 本稿で直接的に開球上の弱型 Gagliardo–Slobodeckij セミノルムと Sobolev セミノルムの関係を同定することにより得られたものである.

3 証明の概略

定理 2.1 の証明は, 上からの評価と下からの評価をそれぞれ分けて行う. 下からの評価については, 次の補題が本質的である.

補題 3.1. 任意の $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 開球 $B \subset \mathbb{R}^N$ に対して,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \mathcal{L}^{2N}(E_\lambda) = \frac{k(N, p)}{N} \|\nabla f\|_{L^p(B)}^p,$$

$$E_\lambda := \left\{ (x, y) \in B \times B \mid x \neq y, \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p} + 1}} \geq \lambda \right\}$$

が成り立つ.

定理 2.1 の下からの評価は, 補題 3.1 と

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \mathcal{L}^{2N}(E_\lambda) \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mathcal{L}^{2N}(E_\lambda).$$

を組み合わせ, さらに定数 $k(N, p)$ の下からの評価 (4) を用いることで得られる.

定理 2.1 の上からの評価の導出は, 可積分指数が $p = 1$ の場合を示し, 他の指数については微積分学の基本定理と Hölder の不等式を用いて証明する. 可積分指数が $p = 1$ の場合には, 次が成り立つ.

補題 3.2. $N \geq 1$ とする. このとき次元 N にのみ依存する定数 $C_N > 0$ が存在し, 任意の $F \in C_0(\mathbb{R}^N)$ と任意の開球 $B \subset \mathbb{R}^N$ に対して,

$$\mathcal{L}^{2N} \left(\left\{ (x, y) \in B \times B \mid x \neq y, \left| \int_y^x F(z) dz \right| \geq |x - y|^{N+1} \right\} \right) \leq C_N \|F\|_{L^1(\sqrt{10}B)}$$

が成り立つ. ここで, $\int_y^x F(z) dz$ は y と x を結ぶ線分上を y から x に向かって線積分するという意味で,

$$\int_y^x F(z) dz := \int_0^1 F((1-t)y + tx) |x - y| dt$$

と定める.

補題 3.2 は開球をうまく分割し積分を評価することで証明するが, 積分の評価の際には 1 次元の場合に帰着させることで証明を行う. 1 次元の場合の評価は, より一般の指数について成り立つ次の補題が重要である.

補題 3.3. ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $\gamma > 0$, $f \in C_0(\mathbb{R})$, $R > 0$ に対して,

$$\iint_{E_R(f, \gamma)} |x - y|^{\gamma-1} dx dy \leq C \frac{5^\gamma}{\gamma} \|f\|_{L^1([-R, R])}$$

が成り立つ. ここで,

$$E_R(f, \gamma) := \left\{ (x, y) \in [-R, R] \times [-R, R] \mid x \neq y, \left| \int_y^x f(z) dz \right| \geq |x - y|^{\gamma+1} \right\}$$

と定める.

補題 3.2 を用いて定理 2.1 の上からの評価を示す. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$ とし, $B \subset \mathbb{R}^N$ を開球とする. f は十分滑らかであるから, 微積分学の基本定理と Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \int_y^x |\nabla f(z)| dz \right| \\ &\leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left| \int_y^x |\nabla f(z)|^p dz \right|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

と評価できる. ここで $\int_y^x dz$ は補題 3.2 と同様 y から x への線積分を表す. これより E_λ に関して次の包含関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{ (x, y) \in B \times B \mid x \neq y, \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p}+1}} \geq \lambda \right\} \\ &\subset \left\{ (x, y) \in B \times B \mid x \neq y, \frac{1}{|x - y|^{\frac{N+1}{p}}} \left| \int_y^x |\nabla f(z)|^p dz \right|^{\frac{1}{p}} \geq \lambda \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in B \times B \mid x \neq y, \left| \int_y^x \frac{|\nabla f|^p}{\lambda^p} dz \right| \geq |x - y|^{N+1} \right\}. \end{aligned}$$

函数 $(|\nabla f|/\lambda)^p$ は C_0^∞ 級より, これに補題 3.2 を適用して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{2N}(E_\lambda) &\leq \mathcal{L}^{2N} \left(\left\{ (x, y) \in B \times B \mid x \neq y, \left| \int_y^x \frac{|\nabla f|^p}{\lambda^p} dz \right| \geq |x - y|^{N+1} \right\} \right) \\ &\leq C_N \left\| \frac{|\nabla f|^p}{\lambda^p} \right\|_{L^1(\sqrt{10}B)} \\ &\leq \frac{C_N}{\lambda^p} \|\nabla f\|_{L^p(\sqrt{10}B)}^p \end{aligned}$$

を得る. この両辺を λ^p 倍して, $\lambda > 0$ について上限をとることで定理 2.1 の上からの評価を得る.

4 $s \searrow 0$ とした際の Gagliardo–Slobodeckij セミノルムの挙動について

前節までは Gagliardo–Slobodeckij セミノルム (1) において, $s = 1$ とした場合の欠損の回復に関する研究を述べたが, 最後に $s = 0$ とした場合の状況について述べる. 1 節で $s = 1$ における欠損の回復についていくつか結果を述べたが, これらは $s = 0$ の場合にも同様の関係式が成立する. Bourgain–Brezis–Mironescu [1] により示された, Gagliardo–Slobodeckij セミノルムに $(1 - s)$ の重みを付与して極限を取ることで欠損を回復する方法は, Maz'ya–Shaposhnikova [12] により同様に s の重みを付与して $s \searrow 0$ と極限を取ることで, L^p ノルムに収束することが示された:

$$\lim_{s \searrow 0} s \|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p = C(p, N) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Brezis–Van Schaftingen–Yung [4] により示された命題 1.1 については, $s = 0$ とした場合でも L^p 空間の元に対して同様の関係式が成り立つことが Gu–Yung [8] により示されている.

命題 4.1 (Gu–Yung [8]). $N \geq 1, 1 \leq p < \infty$ とする. このとき定数 $C_1 = C_1(N) > 0, C_2 = C_2(N) > 0$ が存在して, 任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対して次が成り立つ.

$$C_1 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \left\| \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p}}} \right\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

ここで, Gagliardo–Slobodeckij セミノルムにおいて差分表現を用いていたのは微分を表現するためであった. このことを考慮すれば, $s = 0$ の場合には 命題 4.1 は差分を用いない表現に変更できることが期待され, 実際に Miyadera [13] により差分を用いない L^p ノルムの同値な表現が得られた.

命題 4.2 (Miyadera [13]). $N \geq 1, 1 \leq p < \infty$ とする. このとき定数 $C_1 = C_1(N), C_2 = C_2(N) > 0$ が存在して, 任意の $f, g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{2} (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}) &\leq \left\| \frac{f(x) + g(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p}}} \right\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_2 (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}). \end{aligned}$$

特に $g \equiv 0$ とすると, 差分表現を用いない $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ の同値なノルムが得られる.

以上のように, (1) において $s = 0$ とした場合でも, $s = 1$ の場合と同様の結果が得られている. 従って $s = 0$ の場合にも定理 2.1 のような, 函数の定義域を全空間から一般の領域へ変更した関係式が成り立つことが期待されるが, $s = 0$ の場合には, $s = 1$ の場合と異なる現象が現れる. 実際, 命題 4.2 での示唆や [8, 13] の証明にあるように, L^p ノルムについては任意の $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$ に対して, 次の等式が成立する.

$$\omega_N \|g\|_{L^p(\Omega)}^p = \lambda^p \mathcal{L}^{2N} \left(\left\{ (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \mid x \neq y, \frac{|g(x)|}{|x - y|^{\frac{N}{p}}} \geq \lambda \right\} \right).$$

これは任意の λ について成立するため, $s = 1$ の場合のように, 領域を変更した場合には弱ノルムの形での同値な量とはならない. 従って本稿で目的としていた, Morrey 空間や一様局所 Lebesgue 空間, もしくは有界平均振動 (BMO) のクラスのような, ノルムを領域について上限を取ることで定める函数のクラスのノルムと同値な量は, 定理 2.1 や系 2.2 と同様の形式では構成できない. ただし, BMO 空間については, そのセミノルム自身が差分型の同値な表現を持っているため, 「それらしい」表現を作ることは可能である. BMO 空間は, 以下により定まる函数のクラスである.

$$\begin{aligned} BMO &:= \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \mid \|f\|_{BMO} < \infty\}, \\ \|f\|_{BMO} &:= \sup_{B \subset \mathbb{R}^N: \text{ball}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - \bar{f}_B| dx, \\ \bar{f}_B &:= \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx. \end{aligned} \tag{6}$$

John–Nirenberg の不等式 [10] を用いることで, (6) は任意の $1 \leq p < \infty$ に対して, 次の同値な表現が存在することが知られている ([3] を参照のこと).

$$\|f\|_{BMO} \leq \sup_{B \subset \mathbb{R}^N: \text{Ball}} \left(\frac{1}{|B|^2} \iint_{B \times B} |f(x) - f(y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{BMO}.$$

これらの関係を用いることで, 以下の同値表現を得る.

系 4.3. $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ とする. このとき任意の $\lambda > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対して以下

が成立する.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\omega_N} \|f\|_{BMO(\mathbb{R}^N)}^p \\
& \leq \sup_{B \subset \mathbb{R}^N: \text{Ball}} \frac{\lambda^p}{|B|^2} \mathcal{L}^{4N} \left(\left\{ (x, y, z, w) \in B \times B \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \frac{|f(x) - f(y)|}{\left| |x - z|^2 + |y - w|^2 \right|^{\frac{N}{p}}} \geq \lambda \right\} \right) \\
& \leq \frac{2^p}{\omega_N} \|f\|_{BMO(\mathbb{R}^N)}^p.
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Bourgain, J., Brezis, H., and Mironescu, P., *Another look at Sobolev spaces*, Optimal control and partial Differential Equations (2001), 439–455.
- [2] Brezis, Kh., *How to recognize constant functions. A connection with Sobolev spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 4(346), 59–74.
- [3] Brezis, H. and Nirenberg, L., *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 2, 197–263.
- [4] Brezis, H., Van Schaftingen, J., and Yung, P.-L., *A surprising formula for Sobolev norms*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **118** (8) (2021), Paper No. e2025254118.
- [5] Caffarelli, L., Roquejoffre, J.-M., and Savin, O., *Nonlocal minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **63** (2010), no. 9, 1111–1144.
- [6] Dai, F., Lin, X., Yang, D., Yuan, W., and Zhang, Y., *Brezis–Van Schaftingen–Yung formulae in ball Banach function spaces with applications to fractional Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **62** (2023), no. 2, Paper No. 56, 73.
- [7] Di Nezza, E., Palatucci, G., and Valdinoci, E., *Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no.5, 521–573.
- [8] Gu, Q. and Yung, P.-L., *A new formula for the L^p norm*, J. Funct. Anal. **281** (2021), no. 4, Paper No. 109075, 19 pp.
- [9] Ioku, N. and Shibuya, K., *Brezis–Van Schaftingen–Yung formula in Orlicz spaces*, J. Math. Anal. Appl. **538** (2024), no. 2, Paper No. 128350, 20.
- [10] John, F. and Nirenberg, L., *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.
- [11] Kato, T., *The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems*, Arch. Rational Mech. Anal. **58** (1975), 181–205.
- [12] Maz’ya, V. and Shaposhnikova, T., *On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **195** (2002), no.2, 230–238.
- [13] Miyadera, Y., *Remark on the formula for L^p norm characterized by weak L^p norm*, preprint (2023), arXiv: 2306.01434v1.
- [14] Morrey, C. B., Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.
- [15] Peetre, J., *On the theory of $\mathcal{L}_{p, \lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.
- [16] Poliakovsky, A., *Some remarks on a formula for Sobolev norms due to Brezis, Van Schaftingen and Yung*, J. Funct. Anal. **282** (2022), no. 3, Paper No. 109312.