

De Branges–Ghosechowdhury の Loewner 展開について*

防衛大学校・総合教育学群 瀬戸 道生

Michio Seto

National Defense Academy

この小論では, de Branges [2] と Ghosechowdhury [7] が “Löwner expansions” と呼んでいる一連の結果に対し, そこへ至るもう一つの道筋を与える. “Löwner expansions” とは Loewner 方程式から導かれる一種のフーリエ型積分変換である. 彼らの証明は de Branges–Rovnyak [3, 4] に基づいているが, 本小論の方法 (再生核ヒルベルト空間の直積分とその上の積分作用素) はそれとは異なり Ando [1] に基づいている. そのため, 今回得られた結果は, 古典的な単位円板上の Loewner 理論だけでなく, 近年話題の上半平面上の Loewner 理論にも適用できる (S [10]). なお, 直積分に関する記述のある書籍は少ないと思われるので, [10] では省略した初等的なことも補い, 本小論を教科書風にまとめることにする.

1 直積分

この節では, Loewner 理論に適合するように, 再生核ヒルベルト空間に対する直積分の理論を整備する.

1.1 設定

まず, Ω を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域, (X, σ) を σ -有限な測度空間, $\{k(x, z, w)\}_{x \in X}$ を $\Omega \times \Omega$ で定義されたカーネル関数の族とする. また, C は Ω のコンパクト部分集合を表す. このとき,

$$M_C(x) = \sup_{z \in C} k(x, z, z)$$

と定める. この小論では, $\{k(x, z, w)\}_{x \in X}$ に対し, 次の 4 条件を仮定する.

*本研究は JSPS 科研費 JP24K06771 の助成を受けたものです.

- (A) z と w を固定したとき, $k(x, z, w)$ は x について可測である.
- (B) x と w を固定したとき, $k(x, z, w)$ は z について正則である.
- (C) 任意の C に対し, $M_C(x)$ は σ に関して可積分である. 特に, z を固定したとき, $k(x, z, z)$ は可積分である.
- (D) 任意の $x \in X$ と任意の C に対し, $M_C(x)$ は有限である.

以下では, 複素変数は z や w により表し, 複素数は λ や μ により表す. また, $k_\lambda(x, z) = k(x, z, \lambda)$ と表す.

1.2 $\mathcal{H}(x)$

カーネル関数 $k(x, z, w)$ により生成される再生核ヒルベルト空間を $\mathcal{H}(x)$ と表す. ここでは, $x \in X$ を固定して考えている.

命題 1.2.1. $\mathcal{H}(x)$ は Ω 上の正則関数からなる再生核ヒルベルト空間である.

証明. 任意の $f(x, z) \in \mathcal{H}(x)$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} = 0$$

をみたすように, $\mathcal{H}(x)$ の再生核の線形結合からなる関数列 $\{f_n(x, z)\}_n$ を選ぶことができる. このとき, 任意の $\lambda \in \Omega$ に対し,

$$\begin{aligned} |f_n(x, \lambda) - f(x, \lambda)| &= |\langle f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot), k_\lambda(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)}| \\ &\leq \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \|k_\lambda(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 仮定 (D) により, この収束は Ω 上広義一様であり, さらに仮定 (B) により, $f(x, z)$ は Ω 上の正則関数である. $\square$

1.3 Riesz–Fischer 型の補題

まず,

$$\mathcal{K} = \left\{ f : f(x, z) = \sum_{j=1}^n f_j(x) k_{\lambda_j}(x, z), \quad f_j \in B(X), \quad \lambda_j \in \Omega, \quad n \geq 1 \right\}$$

と定める. ここで, $B(X)$ は X 上の (至る所で定義された) 有界可測関数の全体とする. このとき, $\mathcal{K}$ は x と z の二つの変数をもつ関数からなる空間である. また, 明らかに $\mathcal{K}$ は線形空間であり, $B(X)$ の関数を掛ける作用で不変である.

命題 1.3.1. 任意の $f, g \in \mathcal{K}$ に対し, $\langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)}$ は x を変数とする可積分関数である. 特に, $\|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は 2 乗可積分関数である.

証明. まず,

$$f(x, z) = \sum_{i=1}^m f_i(x) k_{\lambda_i}(x, z), \quad g(x, z) = \sum_{j=1}^n g_j(x) k_{\mu_j}(x, z)$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} \langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_i(x) \overline{g_j(x)} \langle k_{\lambda_i}(x, \cdot), k_{\mu_j}(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_i(x) \overline{g_j(x)} k(x, \mu_j, \lambda_i) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 仮定 (A) により, $\langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)}$ は可測関数である. また, 仮定 (C) により, $\|k_{\lambda_j}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は 2 乗可積分関数である. 従って,

$$\begin{aligned} &\int_X |\langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)}| d\sigma(x) \\ &\leq \int_X \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f_i(x) \overline{g_j(x)} k(x, \mu_j, \lambda_i)| d\sigma(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|f_i\|_{\infty} \|g_j\|_{\infty} \int_X \|k_{\lambda_i}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \|k_{\mu_j}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} d\sigma(x) \\ &< \infty \end{aligned}$$

を得る. よって, $\langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)}$ は可積分関数である. □

補題 1.3.2. $\mathcal{K}$ 内の関数列 $\{f_n\}_n$ が

$$\int_X \|f_n(x, \cdot) - f_m(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

をみたすとき, 次の 3 条件をみたす関数 $f(x, z)$ が存在する.

- (i) ほとんどすべての x に対し, $f(x, z) \in \mathcal{H}(x)$ が成り立つ.
- (ii) $\|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は 2 乗可積分関数である.
- (iii) $\int_X \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ が成り立つ.

証明．Riesz–Fischer の定理と同様であるので概略を述べる．まず， $\{f_n\}_n$ から

$$\int_X \|f_{n_{k+1}}(x, \cdot) - f_{n_k}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) < \frac{1}{2^{2k}}$$

をみたす部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ を選ぶことができる．このとき，単調収束定理により，

$$\varphi(x) = \|f_{n_1}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}}(x, \cdot) - f_{n_k}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$$

が 2 乗可積分関数であることがわかる．特に，ほとんどすべての $x \in X$ に対し， $\varphi(x)$ は有限である．以下，誤解の恐れはないと思われるので，「ほとんどすべての $x \in X$ に対し，」を省略する．このとき，

$$\|f_{n_\ell}(x, \cdot) - f_{n_k}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} \|f_{n_{j+1}}(x, \cdot) - f_{n_j}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \rightarrow 0 \quad (k, \ell \rightarrow \infty)$$

が成り立つ．従って，

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} = 0 \quad (1.3.1)$$

をみたす関数 $f(x, z) \in \mathcal{H}(x)$ が存在する．この $f(x, z)$ が求めている関数である．まず，

$$\begin{aligned} \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}, \\ \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_n(x, \cdot) - f_{n_k}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \end{aligned}$$

であるから， $\|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ と $\|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は可測関数であることに注意しよう．次に，

$$\|f_{n_k}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \leq \varphi(x) \quad (1.3.2)$$

と Lebesgue の収束定理により，

$$\int_X \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) < \infty$$

を得る．さらに，Fatou の補題により，

$$\int_X \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る．

□

1.4 $L^2(\mathcal{H}(x))$

補題 1.3.2 の方法で得られる関数の全体を $L^2(\mathcal{H}(x))$ と表す. より正確に述べると,

定義 1.4.1. $L^2(\mathcal{H}(x))$ を以下の 3 条件をみたす関数の全体とする.

- (i) ほとんどすべての x に対し, $f(x, z) \in \mathcal{H}(x)$ が成り立つ.
- (ii) $\|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は 2 乗可積分関数である.
- (iii) $\exists \{f_n\}_n \subset \mathcal{K}$ s.t. $\int_X \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

命題 1.4.2. 任意の $f, g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left| \int_X \langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} d\sigma(x) \right| \\ & \leq \left(\int_X \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \left(\int_X \|g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad & \left(\int_X \|f(x, \cdot) + g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int_X \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} + \left(\int_X \|g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つ¹.

証明. 任意の $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し, 定義 1.4.1 の (iii) をみたす $\{f_n\}_n \subset \mathcal{K}$ を考える. このとき,

$$\|f_{n_k}(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{a.a. } x)$$

が成り立つように, 部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ を選ぶことができる. 同様に, $g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対しても $\{g_{m_k}\}_k$ を考えれば,

$$\langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_{n_k}(x, \cdot), g_{m_k}(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} \quad (\text{a.a. } x)$$

が可測関数であることがわかる. よって, $\mathcal{H}(x)$ でのコーシー・シュワルツの不等式と $L^2(X)$ でのコーシー・シュワルツの不等式により, (i) が成り立つことがわかる. 次に, 定義 1.4.1 の (i) から, ほとんどすべての $x \in X$ に対し, $f(x, \cdot) + g(x, \cdot) \in \mathcal{H}(x)$

¹この時点ではまだ $L^2(\mathcal{H}(x))$ が線形空間になることを示していないことに注意せよ.

が成り立つことは明らかである。さらに、この証明の前半で示したことと定義 1.4.1 の (ii) により、

$$\|f(x, \cdot) + g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 = \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} + \|g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2$$

も可測関数であることがわかる。また、

$$\|f(x, \cdot) + g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 \leq 2(\|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 + \|g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2)$$

から、 $\|f(x, \cdot) + g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は 2 乗可積分関数であることがわかる。よって、通常 のヒルベルト空間における三角不等式の証明をなぞることにより、(ii) が成り立つ ことがわかる。□

補題 1.4.3. $L^2(\mathcal{H}(x))$ は線形空間である。

証明. 任意に $f, g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ を選び、 $f+g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ を示せば十分であろう。ま ず、ほとんどすべての $x \in X$ に対し、定義 1.4.1 の (i) から $f(x, \cdot) + g(x, \cdot) \in \mathcal{H}(x)$ が成り立つことは明らかである。また、命題 1.4.2 の (ii) から、 $\|f(x, \cdot) + g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}$ は 2 乗可積分関数である。次に、 $f, g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ それぞれに対し、定義 1.4.1 の (iii) をみたす関数列 $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n \subset \mathcal{K}$ を考える。このとき、再び命題 1.4.2 の (ii) から、

$$\begin{aligned} & \left(\int_X \|f_n(x, \cdot) + g_n(x, \cdot) - (f(x, \cdot) + g(x, \cdot))\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int_X \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} + \left(\int_X \|g_n(x, \cdot) - g(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \\ & \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ²。以上のことにより、 $f+g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ を得る。□

ここまで準備をすれば、 $f, g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し、

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{H}(x))} &= \int_X \langle f(x, \cdot), g(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} d\sigma(x), \\ \|f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} &= \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\mathcal{H}(x))}} = \left(\int_X \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

²細かいことを言えば、命題 1.4.2 を使うには、 $f_n - f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ を示す必要がある。しかし、これはほとんど明らかであろう。例えば、定義 1.4.1 の (iii) は

$$\int_X \|(f_m(x, \cdot) - f_n(x, \cdot)) - (f(x, \cdot) - f_n(x, \cdot))\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) = \int_X \|f_m(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

から確認できる。

と定め,

$$L^2(\mathcal{H}(x)) = \left\{ f : \exists \{f_n\}_n \subset \mathcal{K} \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} = 0 \right\}$$

と略記してもよいだろう. 以下では, 通常の L^2 関数と同様に, $\|f - g\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} = 0$ のとき, f と g を同一視する. このように定めておけば, 補題 1.3.2 で得られる $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ は一意に定まる. 次に, $L^2(\mathcal{H}(x))$ の基本性質をまとめる.

定理 1.4.4. $L^2(\mathcal{H}(x))$ は x と z を変数とする関数からなるヒルベルト空間である. また, $L^2(\mathcal{H}(x))$ は $B(X)$ の関数をかける作用で不変である. さらに, 任意の $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し, 次が成り立つ.

- (i) 変数 z を固定するとき, $f(x, z)$ は x についての可測関数である.
- (ii) 変数 x を固定するとき, $f(x, z)$ は z についての正則関数である.

証明. 前半部は補題 1.3.2 と同様である. 後半部を証明する. まず, 任意の $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し, $\mathcal{K}$ 内の関数列 $\{f_n\}_n$ であって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} = 0$$

をみたすものを考える. さらに, ほとんどすべての $x \in X$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} = 0$$

が成り立つと仮定してもよい. このとき, 任意の $\lambda \in \Omega$ に対し,

$$|f_n(x, \lambda) - f(x, \lambda)| \leq \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \|k_\lambda(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. よって, 仮定 (A), (B), (D) により結論を得る. $\square$

例 1.4.5. $X = \{1, 2\}$ の場合, $L^2(\mathcal{H}(X))$ は通常の直和 $\mathcal{H}(1) \oplus \mathcal{H}(2)$ である. 実際, $B(X)$ を $\mathbb{C}^2$ と見なせるからである.

例 1.4.6. ここでは, カーネル関数 $k(x, z, w) = \overline{h(x, w)}h(x, z)$ を考える. ただし, $h(x, z)$ は $X \times \Omega$ 上で値として 0 を取らない有界関数とする. このとき,

$$\mathcal{K} = \{f : f(x, z) = g(x)h(x, z), g \in B(X)\}$$

となる. また,

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))}^2 = \int_X |g(x)|^2 \|h(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\sigma(x) \quad (f(x, z) = g(x)h(x, z) \in \mathcal{K})$$

が成り立つ。さらに,

$$|h(x, w)|^2 = k(x, w, w) = \left\| \overline{h(x, w)} h(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{H}(x)}^2 = |h(x, w)|^2 \|h(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2$$

であるから, $\|h(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 = 1$ を得る. よって, $f_n(x, z) = g_n(x)h(x, z) \in \mathcal{K}$ とおくと, $\{f_n\}_n$ が $L^2(\mathcal{H}(x))$ 内のコーシー列であれば, $\{g_n\}_n$ は $L^2(X)$ 内のコーシー列である. 従って,

$$L^2(\mathcal{H}(x)) = \{f : f(x, z) = g(x)h(x, z), g \in L^2(X)\}$$

となる.

2 積分作用素

この節では, Ω 上の関数からなる族 $\{B(x, z)\}_{x \in X}$ を考える. これまでと同様に, $B(x, z)$ は x について可測, z について正則とする. さらに, 次の条件を仮定する.

(E) 任意のコンパクト集合 $C \subset \Omega$ に対し, $\|B\|_{\infty, C} = \sup_{x \in X, z \in C} |B(x, z)|$ は有限である.

この $\{B(x, z)\}_{x \in X}$ を用い, $L^2(\mathcal{H}(x))$ 上で定義された積分作用素 $\mathbb{I}_B$ を

$$\mathbb{I}_B : f \mapsto \int_X B(x, z) f(x, z) d\sigma(x) \quad (f \in L^2(\mathcal{H}(x)))$$

と定める.

2.1 基本的な性質

まず, 任意の $\lambda \in \Omega$ に対し, $(\mathbb{I}_B f)(\lambda)$ は常に有限な値をとることに注意しよう. 実際, 仮定 (E) により,

$$\begin{aligned} \int_X |B(x, \lambda) f(x, \lambda)| d\sigma(x) &\leq \|B\|_{\infty, \{\lambda\}} \int_X |f(x, \lambda)| d\sigma(x) \\ &\leq \|B\|_{\infty, \{\lambda\}} \int_X \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \|k_\lambda(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} d\sigma(x) \\ &\leq \|B\|_{\infty, \{\lambda\}} \|f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \|k_\lambda\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \end{aligned}$$

が成り立つからである. さらに, 任意の $f, g \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対して成り立つ不等式

$$|(\mathbb{I}_B f)(\lambda) - (\mathbb{I}_B g)(\lambda)| \leq \|B\|_{\infty, \{\lambda\}} \|f - g\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \|k_\lambda\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \quad (2.1.1)$$

は有用である.

補題 2.1.1. 任意の $\lambda \in \Omega$ に対し, $\mathbb{I}_B k_\lambda$ は Ω 上の正則関数である.

証明. まず, $a \in \Omega$ を任意に選び固定する. このとき, $c_j(x, \lambda)$ により $B(x, z)k_\lambda(x, z)$ の $z = a$ を中心としたべき級数展開の j 番目の係数を表す. ここで, $R > 0$ を適切に選び, $C = \{a + Re^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ とおくことで,

$$\begin{aligned} |c_j(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|B(x, a + Re^{i\theta})k_\lambda(x, a + Re^{i\theta})|}{R^j} d\theta \\ &\leq \frac{\|B\|_{\infty, C}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|k_{a+Re^{i\theta}}(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} \|k_\lambda(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}}{R^j} d\theta \\ &\leq \frac{\|B\|_{\infty, C} \sqrt{M_C(x)} \|k_\lambda(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}}{R^j} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $|z - a| < r < R$ ならば, 仮定 (C) により,

$$\begin{aligned} &\int_X \left(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j(x, \lambda)(z - a)^j| \right) d\sigma(x) \\ &\leq \int_X \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|B\|_{\infty, C} \sqrt{M_C(x)} \|k_\lambda(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)} r^j}{R^j} \right) d\sigma(x) \\ &= \frac{R}{R - r} \|B\|_{\infty, C} \left(\int_X M_C(x) d\sigma(x) \right)^{1/2} \|k_\lambda\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \\ &< \infty \end{aligned}$$

を得る. よって, フビニの定理により,

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_B k_\lambda)(z) &= \int_X B(x, z)k_\lambda(x, z) d\sigma(x) \\ &= \int_X \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x, \lambda)(z - a)^j \right) d\sigma(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_X c_j(x, \lambda) d\sigma(x) \right) (z - a)^j \end{aligned}$$

は $z = a$ で正則であることがわかる. □

補題 2.1.2. $\mathbb{I}_B$ の値域空間は Ω 上の正則関数からなる線形空間である. また, $\ker \mathbb{I}_B$ は閉部分空間である.

証明. まず, 任意の $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し, $\mathcal{K}$ 内の関数列 $\{f_n\}_n$ であって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} = 0$$

をみたすものを考える．このとき，任意の $\lambda \in \Omega$ に対し，(2.1.1) により， $(\mathbb{I}_B f_n)(\lambda)$ は $(\mathbb{I}_B f)(\lambda)$ に収束する．さらに，仮定 (D) と仮定 (E) により，この収束は Ω 上広義一様である．よって，補題 2.1.1 により， $(\mathbb{I}_B f)(z)$ は Ω 上の正則関数である．次に， f を $\ker \mathbb{I}_B$ の閉包から選び， $\{f_n\}_n$ を $\ker \mathbb{I}_B$ 内の列であって，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} = 0$$

をみたすものとする．このとき，(2.1.1) により，

$$\begin{aligned} |(\mathbb{I}_B f)(\lambda)| &= |(\mathbb{I}_B f)(\lambda) - (\mathbb{I}_B f_n)(\lambda)| \\ &\leq \|B\|_{\infty, \{\lambda\}} \|f - f_n\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \|k_\lambda\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって， $\ker \mathbb{I}$ は閉である． $\square$

さて，補題 2.1.2 と引き戻し構成法³により，次のようにして $\mathbb{I}_B$ の値域空間にヒルベルト空間の構造を入れることができる．

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbb{I}_B; L^2(\mathcal{H}(x))) &= \mathcal{M}(\mathbb{I}_B) = (\text{ran } \mathbb{I}_B, \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)}), \\ \|\mathbb{I}_B f\|_{\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)} &= \|P_{(\ker \mathbb{I}_B)^\perp} f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))}. \end{aligned}$$

ここで $(\ker \mathbb{I}_B)^\perp$ は $\ker \mathbb{I}_B$ の $L^2(\mathcal{H}(x))$ の中での直交補空間を表す．

定理 2.1.3. $\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)$ は

$$\left(\mathbb{I}_B \overline{B(\cdot, \lambda) k_\lambda} \right) (z) = \int_X \overline{B(x, \lambda)} B(x, z) k_\lambda(x, z) \, d\sigma(x)$$

を再生核とする再生核ヒルベルト空間である．特に，任意の $F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}_B)$ に対し，

$$F(z) = \int_X B(x, z) f(x, z) \, d\sigma(x)$$

が成り立つ $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ が存在する．さらに，

$$\|F\|_{\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)}^2 = \min_{F=\mathbb{I}_B f} \|f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))}^2 = \min_{F=\mathbb{I}_B f} \int_X \|f(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 \, d\sigma(x)$$

が成り立つ．

³ ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から線形空間 V への線形写像 T を考える．このとき， $\ker T$ が閉であれば， $\|Tx\|_{\mathcal{M}(T)} = \|P_{(\ker T)^\perp} x\|_{\mathcal{H}}$ と定めることにより， $\mathcal{M}(T) = (\text{ran } T, \|\cdot\|_{\mathcal{M}(T)})$ はヒルベルト空間となる．(証明) 準同型定理と射影定理により， $\text{ran } T \cong \mathcal{H} / \ker T \cong (\ker T)^\perp$ が成り立つ．

証明 . まず, $h_\lambda(x, z) = \overline{B(x, \lambda)}k_\lambda(x, z)$ とおく. このとき, 任意の $g \in \ker \mathbb{I}_B$ に対し,

$$\begin{aligned} \langle g, h_\lambda \rangle_{L^2(\mathcal{H}(x))} &= \int_X \langle g(x, \cdot), h_\lambda(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} d\sigma(x) \\ &= \int_X B(x, \lambda) g(x, \lambda) d\sigma(x) \\ &= (\mathbb{I}_B g)(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. これは, $h_\lambda \in (\ker \mathbb{I}_B)^\perp$ を意味する. よって, 任意の $f \in L^2(\mathcal{H}(x))$ に対し,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{I}_B f, \mathbb{I}_B h_\lambda \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{I})} &= \langle f, h_\lambda \rangle_{L^2(\mathcal{H}(x))} \\ &= \int_X \langle f(x, \cdot), h_\lambda(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(x)} d\sigma(x) \\ &= \int_X B(x, \lambda) f(x, \lambda) d\sigma(x) \\ &= (\mathbb{I}_B f)(\lambda) \end{aligned}$$

が成り立つ. このようにして, 前半の主張を得る. また,

$$\|F\|_{\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)} = \|\mathbb{I}_B f\|_{\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)} = \|P_{(\ker \mathbb{I}_B)^\perp} f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \leq \|f\|_{L^2(\mathcal{H}(x))}$$

からノルム等式が成り立つことがわかる. □

注意 2.1.4. 積分作用素 $\mathbb{I}_B$ を定める積分の中で $B(x, z)$ を合成で作用させても同様に議論を進めることができる. 実際, de Branges [2] は Bieberbach 予想に狙いを定め具体的に選んだ設定で積分作用素

$$\mathbb{J}_B : f \mapsto \int_X f(x, B(x, z)) d\sigma(x) \quad (f \in L^2(\mathcal{H}(x)))$$

を考えている. 我々の方法では, k と B に対する適当な仮定の下,

$$|(\mathbb{J}_B f)(\lambda) - (\mathbb{J}_B g)(\lambda)| \leq \|f - g\|_{L^2(\mathcal{H}(x))} \left(\int_X k(x, B(x, \lambda), B(x, \lambda)) d\sigma(x) \right)^{1/2}$$

を示すことができ, この評価をもとに $\mathcal{M}(\mathbb{J}_B)$ は

$$\int_X k(x, B(x, z), B(x, \lambda)) d\sigma(x)$$

を再生核とする再生核ヒルベルト空間であることが示される.

2.2 Paley–Wiener 空間

定数 $A > 0$ に対し, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上のカーネル関数

$$\frac{\sin(2\pi A(z - \bar{w}))}{\pi(z - \bar{w})}$$

を考える. このとき, このカーネル関数から生成される再生核ヒルベルト空間は Paley–Wiener 空間とよばれる. ここでは, それを PW_A と表そう. さて, 定理 2.1.3 において,

$$k(t, z, w) = 1, \quad X = [-A, A], \quad d\sigma = dt, \quad B(t, z) = e^{-2\pi izt}$$

の場合を考えると, $\mathcal{H}(t) = \mathbb{C}$ であり, $L^2(\mathcal{H}(t)) = L^2([-A, A])$ となる (例 1.4.6 を参照せよ). よって,

$$\mathbb{I}_B : f(t, z) \mapsto F(z) = \int_{-A}^A B(t, z) f(t) dt \quad (f \in L^2([-A, A]))$$

は time-limited なフーリエ変換である. さらに, 再生核ヒルベルト空間として

$$\mathcal{M}(\mathbb{I}_B; L^2([-A, A])) = PW_A$$

が成り立つ. 実際, 定理 2.1.3 の証明のように $h_\lambda(t, z) = \overline{B(t, \lambda)} k_\lambda(t, z)$ とおけば,

$$(\mathbb{I}_B h_\lambda)(z) = \int_{-A}^A B(t, z) h_\lambda(t, z) dt = \int_{-A}^A e^{-2\pi it(z - \bar{\lambda})} dt = \frac{\sin(2\pi A(z - \bar{\lambda}))}{\pi(z - \bar{\lambda})}$$

が成り立つからである.

2.3 Herglotz 空間

単位開円板 $\mathbb{D}$ 上で定められた正則関数 φ が $\operatorname{Re} \varphi(z) \geq 0$ をみたすとき, φ は Herglotz 関数と呼ばれる. ここでは, $\varphi(0) = 1$ と正規化しておく. このとき, φ は

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \xi z}{1 - \xi z} d\mu(\xi)$$

と積分表示される. ここで, μ は単位円周 $\mathbb{T}$ 上の確率測度である. ここに現れた被積分関数

$$\varphi_\xi(z) = \frac{1 + \xi z}{1 - \xi z}$$

は Herglotz 関数の典型的な例である.

命題 2.3.1. 任意の Herglotz 関数 φ に対し,

$$\frac{\overline{\varphi(w)} + \varphi(z)}{1 - \bar{w}z}$$

は $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ 上のカーネル関数を定める.

証明. Herglotz 関数の積分表示と

$$\frac{\overline{\varphi_\xi(w)} + \varphi_\xi(z)}{1 - \bar{w}z} = \frac{2}{(1 - \bar{\xi}w)(1 - \xi z)}$$

から結論を得る. □

命題 2.3.1 のカーネル関数により生成される再生核ヒルベルト空間は Herglotz 空間と呼ばれ, $\mathcal{L}(\varphi)$ と表される (de Branges–Rovnyak [3], Ghosechowdhury [6, 7], Shulman [11]). 次に, 積分作用素

$$\mathbb{I}: f(\xi, z) \mapsto F(z) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi, z) d\mu(\xi) \quad (f \in L^2(\mathcal{L}(\varphi_\xi)))$$

を考える. これは定理 2.1.3 において $B(x, z) \equiv 1$ の場合である. このとき, 再生核ヒルベルト空間として,

$$\mathcal{M}(\mathbb{I}; L^2(\mathcal{L}(\varphi_\xi))) = \mathcal{L}(\varphi)$$

が成り立つ. 実際,

$$(\mathbb{I}k_\lambda)(z) = \int_{\mathbb{T}} k_\lambda(\xi, z) d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_\xi(\lambda)} + \varphi_\xi(z)}{1 - \bar{\lambda}z} d\mu(\xi) = \frac{\overline{\varphi(\lambda)} + \varphi(z)}{1 - \bar{\lambda}z}$$

が成り立つからである.

3 Loewner 展開

3.1 Loewner 理論 (Koebe 関数の場合を中心に)

単位開円板 $\mathbb{D}$ 上で定義された正則関数の 1-パラメータ族

$$f_t(z) = \frac{e^t z}{(1 - z)^2} \quad (t \geq 0)$$

を考える. 特に, f_0 は Koebe 関数と呼ばれる単葉関数である. このとき,

$$z \frac{1 - z}{1 + z} \frac{\partial}{\partial z} f_t(z) = \frac{\partial}{\partial t} f_t(z)$$

が成り立つ. これは最も単純かつ最も基本的な Loewner 方程式である. ここで, $\frac{1 - z}{1 + z}$ は Herglotz 関数であることを注意しておく. 今, f_t の像は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -e^t/4]$ である. よって, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{D} & \\
 f_r \swarrow & & \searrow f_s \\
 f_r(\mathbb{D}) & \subset & f_s(\mathbb{D})
 \end{array} \quad (0 \leq r \leq s)$$

が得られる．ここで，

$$B_{rs} = f_s^{-1} \circ f_r \quad (0 \leq r \leq s)$$

と定めると， B_{rs} は $\mathbb{D}$ の正則自己写像であり，さらに，

$$B_{rr} = z, \quad B_{rt} = B_{st} \circ B_{rs} \quad (0 \leq r \leq s \leq t) \quad (3.1.1)$$

が成り立つ．さらに， $\varphi(z) = \frac{1-z}{1+z}$ とおくとき，

$$\frac{\partial B_{rs}}{\partial s} = -B_{rs}(z)\varphi(B_{rs}(z))$$

が成り立つ．より一般に， $\{\varphi(r, z)\}_{r>0}$ を Herglotz 関数の族とし，さらに $\varphi(r, z)$ は r について可測と仮定する．このとき，

$$\frac{\partial B_{rs}}{\partial s} = -B_{rs}(z)\varphi(s, B_{rs}(z)) \quad (3.1.2)$$

は非線形 Loewner 方程式，その解は Loewner 半群とよばれる．詳細については，Rosenblum–Rovnyak [8] の Chapter 8 を参照せよ．

3.2 Ghosechowdhury の定理

$\{B_{rs}(z)\}_{0 \leq r \leq s}$ を Loewner 半群とする．このとき，

$$k(t, z, w) = \frac{\overline{\varphi(t, B_{at}(w))} + \varphi(t, B_{at}(z))}{1 - \bar{w}z} \quad (0 \leq t \leq a)$$

は $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ 上のカーネル関数を定める．このとき，仮定 (A) と仮定 (B) が成り立つことは明らかである．さらに，

$$0 \leq k(t, \lambda, \lambda) = \frac{2 \operatorname{Re} \varphi(t, B_t(\lambda))}{1 - |\lambda|^2} \leq \frac{2(1 + |B_t(\lambda)|)}{(1 - |\lambda|^2)(1 - |B_t(\lambda)|)} \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

(Rosenblum–Rovnyak [8] の (8–10)) から仮定 (C) と仮定 (D) が成り立つことがわかる．さらに， $B(t, z) = B_{at}(z)$ とおくと，仮定 (E) が成り立つ．

補題 3.2.1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1 - \overline{B_{at}(\lambda)} B_{at}(z)}{1 - \bar{\lambda}z} = \frac{\overline{\varphi(t, B_{at}(\lambda))} + \varphi(t, B_{at}(z))}{1 - \bar{\lambda}z} \overline{B_{at}(\lambda)} B_{at}(z)$$

が成り立つ．

Proof. 非線形 Loewner 方程式 (3.1.2) を使って計算する. □

カーネル関数

$$\frac{1 - \overline{B_{at}(w)}B_{at}(z)}{1 - \overline{w}z}$$

により生成される再生核ヒルベルト空間を $\mathcal{H}(B_{at})$ と表す. $\mathcal{H}(B_{at})$ は B_{at} により定義される de Branges–Rovnyak 空間とよばれる (de Branges–Rovnyak [3, 4], Fricain–Mashreghi [5], Sarason [9]). $\mathcal{H}(B_{at})$ の任意の関数はフーリエ型積分表示をもつ. これが “Löwner expansions” の一つである.

定理 3.2.2 (Ghosechowdhury [7]).

$$\mathcal{H}(B_{ab}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{M}(\mathbb{I}_B; L^2(\mathcal{L}(\varphi(t, B_{at}))))$$

が成り立つ. 特に, 任意の $F \in \mathcal{H}(B_{ab})$ に対し, F のフーリエ型積分表示

$$F(z) = F(0) + \int_a^b B_{at}(z)f(t, z) dt$$

を与える $f(t, z) \in L^2(\mathcal{L}(\varphi(t, B_{at})))$ が存在し, パーセヴァル型の不等式

$$\|F\|_{\mathcal{H}(B_{ab})}^2 \leq |F(0)|^2 + \int_a^b \|f(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}(\varphi(t, B_{at}))}^2 dt$$

が成り立つ. さらに, この不等式において等号の成立する表現が一意に存在する.

証明. まず, 任意の $\lambda \in \mathbb{D}$ に対して, $h_\lambda(t, z) = \overline{B_t(\lambda)}k_\lambda(t, z)$ とおく. このとき, 定理 2.1.3 と補題 3.2.1 により,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{I}_B h_\lambda, \mathbb{I}_B h_\mu \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{I}_B)} &= \langle h_\lambda, h_\mu \rangle_{L^2(\mathcal{L}(\varphi(t, B_t)))} \\ &= \int_a^b \langle \overline{B_t(\lambda)}k_\lambda(t, \cdot), \overline{B_t(\mu)}k_\mu(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{L}(\varphi(t, B_t))} dt \\ &= \int_a^b \overline{B_t(\lambda)}B_t(\mu)k(t, \mu, \lambda) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \frac{1 - \overline{B_t(\lambda)}B_t(\mu)}{1 - \overline{\lambda}\mu} dt \\ &= \frac{1 - \overline{B_b(\lambda)}B_b(\mu)}{1 - \overline{\lambda}\mu} - 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $B_{ab}(0) = 0$ により $1 \in \mathcal{H}(B_{ab})$ であるから,

$$\frac{1 - \overline{B_{ab}(\lambda)}B_{ab}(z)}{1 - \overline{\lambda}z} - 1$$

は $\mathcal{H}(B_{ab}) \ominus \mathbb{C}$ の再生核であることがわかる. ただし, 今, 直交補空間は $\mathcal{H}(B_{ab})$ の中で考えている. よって, $\mathcal{M}(\mathbb{I}_B) = \mathcal{H}(B_b) \ominus \mathbb{C}$ を得る. 従って, 定理 2.1.3 から結論を得る. □

謝辞 堀田一敬氏（山口大学）と村山拓也氏（神戸大学）からは多くのことを教わり、それが本研究を始めるきっかけとなりました。お二人に感謝します。また、初期の原稿にあった不備を指摘してくれた小野航季氏（新潟大学）と荒神健太氏（海上保安大学校）に感謝します。

参考文献

- [1] T. Ando, *De Branges spaces and analytic operator functions*. Lecture Notes, Hokkaido University, Sapporo, 1990.
- [2] L. de Branges, *Löwner expansions*. J. Math. Anal. Appl. 100 (1984), no. 1, 323–337.
- [3] L. de Branges and J. Rovnyak, *Appendix on square summable power series* in *Canonical models in quantum scattering theory*. Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics (Proc. Adv. Sem. Math. Res. Center, U.S. Army, Theoret. Chem. Inst., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1965), pp. 295–392 John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1966
- [4] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square summable power series*. Holt, Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1966.
- [5] E. Fricain and J. Mashreghi, *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces*. Vol. 2. New Math. Monogr., 21 Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [6] S. Ghosechowdhury, *An expansion theorem for state space of unitary linear system whose transfer function is a Riemann mapping function*. Reproducing kernels and their applications (Newark, DE, 1997), 81–95. Int. Soc. Anal. Appl. Comput., 3 Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999
- [7] S. Ghosechowdhury, *Löwner expansions*. Math. Nachr. 210 (2000), pp. 111–126.
- [8] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*. Birkhäuser Verlag, 1994.
- [9] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*. University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

- [10] M. Seto, *Löwner equations and de Branges–Rovnyak spaces*, preprint, <https://arxiv.org/abs/2512.10368>.
- [11] L. Shulman, *Perturbations of unitary transformations*. Amer. J. Math. 91 (1969), 267–288.