

Herz 空間上の Meyer の不等式とその応用

大阪大学大学院・情報科学研究科 波多野 修也* ; 池田 正弘

Naoya Hatano and Masahiro Ikeda
Machine Learning & Systems Laboratory,
The University of Osaka

1 導入

Meyer の不等式は Meyer [8] による Navier–Stokes 方程式の研究が起源となっている．Navier–Stokes 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

において, Leray 射影作用素 $\mathbb{P} = (\delta_{i,j} - R_i R_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ によって第 1 式は非線形の熱方程式

$$\partial_t u = \Delta u - \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u]$$

に変形される．ただし, $R_j \equiv (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \partial_j$ は Riesz 変換である．さらに Duhamel の原理によって, この非線形の熱方程式の解は形式的に積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u](\tau) d\tau$$

で与えられる．ここで, $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ とは

$$e^{t\Delta} f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) dy$$

で定義される発展作用素の半群であり, 熱方程式の基本解を与える．

非線形項の精密な評価を与えるために考えられた Meyer の不等式は, 弱 Lebesgue 空間上の評価として以下のように与えられている．

* n.hatano, chuo@gmail.com

Graduate School of Information Science and Technology, the University of Osaka, 1-5, Yamadaoka, Suita-shi, Osaka 565-0871, Japan

定理 1.1 (Meyer [8]). $n \geq 3$, $1 < p < q < \infty$ が

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \quad (1.1)$$

を満たすならば, 関数 $f = f(t, x)$ に対し,

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau) d\tau \right\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \sup_{0 < \tau < t} \|f(\tau)\|_{L^{p,\infty}}.$$

ここで, 条件 (1.1) は 2 階の Sobolev の指数条件を表す. 実際に関数 f が時刻 t に依存しない場合において, 形式的に

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f d\tau = (-\Delta)^{-1}(1 - e^{t\Delta})f$$

と計算できるため, 2 階の Riesz ポテンシャル $(-\Delta)^{-1}$ の $L^{p,\infty}$ – $L^{q,\infty}$ 有界性が成り立つための条件が (1.1) である.

Meyer の不等式は, 空間 3 次元 ($n = 3$) の場合で解 $u \in C([0, \infty); L_{\sigma}^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))$ の存在と一意性を示すために Meyer [8] によって導入された. ただし, $L_{\sigma}^{3,\infty}(\mathbb{R}^3) \equiv \{f \in L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} f = 0\}$ である. その後は, Terraneo [10] によって藤田型の半線形熱方程式に適用され, 解の非一意性の結果が与えられた. また, 筒井 [11] と千頭–池田–谷口–Tayachi [3] によって, それぞれ弱 Herz 空間やべき乗型荷重付き弱 Lebesgue 空間上の評価へ一般化された.

本研究の目的は, Meyer の不等式を Herz 空間上の評価に置き換えた結果を与え, その応用として Hardy–Henon 放物型方程式に対する解の一意性を考察することである. Herz 空間は弱 Herz 空間とは異なり弱 Lebesgue 空間の直接的な一般化ではないため, 筒井 [11] の結果とは異なるものになっているが, 本研究によって指数の端点の状況において以上の先行研究よりも改善された結果を得ることに成功した.

本講演集では, 以下のような記号を用いることにする. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ はコンパクト台を持つ C^∞ 級関数の空間, $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ は局所積分可関数の空間を表す. また, $A \leq CB$ が成り立つとき不要な定数 C を省略して $A \lesssim B$ のように表し, $A \lesssim B$ と $B \lesssim A$ が同時に成り立つときは $A \sim B$ のように表すことにする. そして, 関数空間 X, Y に対して $\|f\|_Y \lesssim \|f\|_X$ がすべての $f \in X$ に対して成り立つとき, $X \hookrightarrow Y$ と表し, $X \hookrightarrow Y$ と $Y \hookrightarrow X$ が同時に成り立つときは $X \cong Y$ と表す.

2 Herz 空間

この節では, (斉次) Herz 空間の導入をし, その基本性質を紹介する.

定義 2.1 (Herz [6]). 指数 $s \in \mathbb{R}$, $0 < q, r \leq \infty$ に対し, (斉次) Herz 空間 $\dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ を (擬) ノ

ルム

$$\|f\|_{\dot{K}_{q,r}^s} \equiv \begin{cases} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} [2^{js} \|f \chi_{A_j}\|_{L^q}]^r \right)^{\frac{1}{r}}, & r < \infty, \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|f \chi_{A_j}\|_{L^q}, & r = \infty, \end{cases}$$

を持つ Lebesgue 可測な関数の空間と定義する. ただし, $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| < 2^j\}$ とする.

Herz 空間 $\dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ は, $1 \leq q, r \leq \infty$ のとき Banach 空間となる. $\|f\|_{\dot{K}_{q,q}^s} \sim \| |\cdot|^s f \|_{L^q} =: \|f\|_{L_s^q}$ が成り立つため, Herz 空間 $\dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ は Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^n)$ やそのべき乗型荷重付きの空間 $L_s^q(\mathbb{R}^n)$ の一般化となっている.

Herz 空間は次のような埋め込みを持つ.

命題 2.2. $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $0 < q, q_1, q_2 \leq \infty$, $0 < r, r_1, r_2 \leq \infty$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $0 < r_1 \leq r_2 \leq \infty$ ならば, $\dot{K}_{q,r_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{q,r_2}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (2) $\frac{s_1}{n} + \frac{1}{q_1} = \frac{s_2}{n} + \frac{1}{q_2}$, $q_1 \geq q_2$ ならば, $\dot{K}_{q_1,r}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{q_2,r}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$.

さらに, 空間 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ との関係として, 次のような性質が成り立つ.

命題 2.3. $s \in \mathbb{R}^n$, $0 < q, r \leq \infty$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) 包含関係 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ が成り立つための必要十分条件は,

$$\frac{s}{n} + \frac{1}{q} > 0, r < \infty \quad \text{または} \quad \frac{s}{n} + \frac{1}{q} \geq 0, r = \infty.$$

- (2) 包含関係 $\dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n) \subset L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ が成り立つための必要十分条件は,

$$\frac{s}{n} + \frac{1}{q} < 1, r > 1 \quad \text{または} \quad \frac{s}{n} + \frac{1}{q} \leq 1, r \leq 1.$$

以後, Herz 空間を扱う際はこれら 2 つの包含関係を常に仮定するものとする.

命題 2.4. $s \in \mathbb{R}^n$, $0 < q, r \leq \infty$ とする. このとき, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $\dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ に稠密となるための必要十分条件は, $q, r < \infty$ である.

Herz 空間に対する実補間空間は求めることができる. 本講演集では, K 汎関数による方法のみを紹介する. 関数空間 $X_i = (X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ ($i = 0, 1$) と $f \in X_0 + X_1$, $t > 0$ に対し,

$$K(t, f) \equiv \inf_{f=f_0+f_1, (f_0, f_1) \in X_0 \times X_1} (\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1})$$

と定め、実補間空間 $(X_0, X_1)_{\theta, r}$ ($0 < \theta < 1$, $0 < r \leq \infty$) の擬ノルムを

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, r}} \equiv \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, f)]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} & (r < \infty), \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, f) & (r = \infty) \end{cases}$$

と定義する. $X_0 + X_1$ 上で定義されている線形作用素 T が X_i から Y_i への有界作用素 ($i = 0, 1$) ならば, $(X_0, X_1)_{\theta, r}$ から $(Y_0, Y_1)_{\theta, r}$ への有界作用素にもなることが一般論として知られている (例えば [2] を参照). Herz 空間に対する実補間空間は最初に Ho [7] によって与えられ, 本研究によって $0 < q, r, r_0, r_1 \leq 1$ や $q, r, r_0, r_1 = \infty$ の場合を追加した.

定理 2.5. $0 < \theta < 1$, $s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $0 < q, r, r_0, r_1 \leq \infty$ とする. このとき,

$$s_0 \neq s_1, \quad s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$$

ならば,

$$(\dot{K}_{q, r_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), \dot{K}_{q, r_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta, r} \cong \dot{K}_{q, r}^s(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

3 主結果

主結果は以下の通りである.

定理 3.1. $n \geq 3$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ とし,

$$\mu > \nu, \quad 0 < \frac{\nu}{n} + \frac{1}{q} < \frac{\mu}{n} + \frac{1}{p} \leq 1, \quad \frac{\nu}{n} + \frac{1}{q} = \left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{p} \right) - \frac{2}{n}$$

と仮定する. さらに, 次のいずれかの制限を課す:

$$(1) \ p, q < \infty, \quad \frac{\mu}{n} + \frac{1}{p} < 1, \quad (2) \ r \leq 1.$$

このとき,

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau) d\tau \right\|_{\dot{K}_{q, \infty}^\nu} \lesssim \sup_{0 < \tau < t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p, r}^\mu}.$$

が成り立つ

この定理を証明するために, 熱半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ に対する Herz 空間上の評価を用いた.

命題 3.2. $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < r, r_0 \leq \infty$ とし,

$$\mu \geq \nu, \quad 0 \leq \frac{\nu}{n} + \frac{1}{q} \leq \frac{\mu}{n} + \frac{1}{p} \leq 1$$

と仮定する. さらに, 次のいずれかの制限を課す:

- (1) $\mu > \nu, \quad p, q < \infty, \quad \frac{\nu}{n} + \frac{1}{q} < \frac{\mu}{n} + \frac{1}{p},$
- (2) $p, q < \infty, \quad r_0 \leq r,$
- (3) $r_0 \leq \min(1, r).$

このとき,

$$\|e^{t\Delta}f\|_{\dot{K}_{q,r}^{\nu}} \lesssim t^{-\frac{n}{2}[(\frac{1}{p}+\frac{\mu}{n})-(\frac{1}{q}+\frac{\nu}{n})]} \|f\|_{\dot{K}_{p,r_0}^{\mu}}$$

が成り立つ.

この評価は Drihem [4] によって与えられ, さらに本研究によって (3) を追加し, 指数の端点の場合 $p, q \in \{1, \infty\}$ についての条件に対する改良に成功した.

以下が主結果の証明である.

定理 3.1 の証明. 条件

$$\frac{\nu}{n} + \frac{1}{q} = \left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{p}\right) - \frac{2}{n},$$

より,

$$0 < \theta := 1 - \frac{n}{2} \left[\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{\nu_0}{n} + \frac{1}{q}\right) \right] = 2 - \frac{n}{2} \left[\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{\nu_1}{n} + \frac{1}{q}\right) \right] < 1.$$

を満たす ν_0, ν_1 が選べる. よって,

$$\begin{aligned} (1-\theta)\nu_0 + \theta\nu_1 &= (1-\theta) \cdot n \left[\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{q} - \frac{2-2\theta}{n} \right] + \theta \cdot n \left[\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{q} - \frac{4-2\theta}{n} \right] \\ &= \mu + \frac{n}{p} - \frac{n}{q} - 2 = \nu. \end{aligned}$$

また, 必要ならば ν_0, ν_1 を ν により近くに選び直すことによって,

$$\mu > \nu_i, \quad 0 < \frac{\nu_i}{n} + \frac{1}{q} < \frac{\mu}{n} + \frac{1}{p} \leq 1 \quad (i = 0, 1)$$

を満たすように選ぶことができる. 従って, 命題 3.2 が使え, 各 $h \in \dot{K}_{p,r}^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|e^{t\Delta}h\|_{\dot{K}_{q,\infty}^{\nu_i}} \lesssim t^{-\frac{n}{2}[(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{p})-(\frac{\nu_i}{n}+\frac{1}{q})]} \|h\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}} \quad (i = 0, 1)$$

が成り立つ.

変数 $\tilde{t} \in (0, t)$ を任意に選び,

$$\begin{aligned} g(t, x) &:= \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau, x) \, d\tau \\ &= \int_0^{\tilde{t}} e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau, x) \, d\tau + \int_{\tilde{t}}^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau, x) \, d\tau \\ &=: g_{\tilde{t}}(x) + g^{\tilde{t}}(x) \end{aligned}$$

と分解する. このとき,

$$\begin{aligned}
\|g_{\tilde{t}}(t)\|_{\dot{K}_{q,\infty}^{\nu_0}} &\lesssim \int_0^{\tilde{t}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}[(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{p})-(\frac{\nu_0}{n}+\frac{1}{q})]} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}} d\tau \\
&\lesssim (t-\tilde{t})^{-\frac{n}{2}[(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{p})-(\frac{\nu_0}{n}+\frac{1}{q})]+1} \sup_{0<\tau<t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}} \\
&= (t-\tilde{t})^{\theta} \sup_{0<\tau<t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}},
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\|g^{\tilde{t}}(t)\|_{\dot{K}_{q,\infty}^{\nu_1}} &\lesssim \int_{\tilde{t}}^t (t-\tilde{t})^{-\frac{n}{2}[(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{p})-(\frac{\nu_1}{n}+\frac{1}{q})]} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}} d\tau \\
&\lesssim (t-\tau)^{-\frac{n}{2}[(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{p})-(\frac{\nu_1}{n}+\frac{1}{q})]+1} \sup_{0<\tau<t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}} \\
&= (t-\tilde{t})^{\theta-1} \sup_{0<\tau<t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}}.
\end{aligned}$$

よって, 以上の評価を組み合わせれば,

$$\begin{aligned}
\|g(t)\|_{(\dot{K}_{q,\infty}^{\nu_0}, \dot{K}_{q,\infty}^{\nu_1})_{\theta,\infty}} &\leq \sup_{0<\tilde{t}<t} (t-\tilde{t})^{-\theta} \left(\|g_{\tilde{t}}(t)\|_{\dot{K}_{q,\infty}^{\nu_0}} + (t-\tilde{t}) \|g^{\tilde{t}}(t)\|_{\dot{K}_{q,\infty}^{\nu_1}} \right) \\
&\lesssim \sup_{0<\tau<t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}}.
\end{aligned}$$

従って, 定理 2.5 より, 結論

$$\|g(t)\|_{\dot{K}_{q,\infty}^{\nu}} \lesssim \sup_{0<\tau<t} \|f(\tau)\|_{\dot{K}_{p,r}^{\mu}}$$

が得られる. □

4 Hardy–Hénon 放物型方程式への応用

Hardy–Hénon 放物型方程式とは, 以下のような半線形熱方程式のことである:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |x|^{\gamma} |u|^{\alpha-1} u, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0 \in \dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n) \equiv \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{\dot{K}_{q,r}^s}}. \end{cases} \quad (\text{HH})$$

ここで, $n \geq 3$, $\alpha > 1$ and $\gamma > -2$ とする. 2つの臨界指数

$$q_c = \frac{n(\alpha-1)}{2+\gamma}, \quad Q_c = \frac{n\alpha}{n+\gamma}$$

を用いる. q_c は方程式 (HH) の解がスケール変換

$$u(t, x) \mapsto u_{\lambda}(t, x) = \lambda^{\frac{2+\gamma}{\alpha-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0,$$

で不変となる臨界指数を表し, Q_c は各 $u \in \dot{K}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ に対して $|x|^{\gamma} |u|^{\alpha-1} u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ となるための臨界指数を表す.

方程式 (HH) の解は形式的に積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} [|\cdot|^\gamma |u(\tau)|^{\alpha-1} u(\tau)] \, d\tau$$

で与えられる. 本研究では, この積分方程式を満たす解 u (軟解という) の場合を考える. Herz 空間では性質 $\| |\cdot|^\beta f \|_{\dot{K}_{q,r}^s} \sim \|f\|_{\dot{K}_{q,r}^{s+\beta}}$ が常に成り立つため, 非線形項にあるべき乗型荷重 $|x|^\gamma$ を取り除かずに有効活用できると予想した.

本講演の主結果の応用例として, 以下のような結果を得ることができた. 証明は, 千頭ら [3] によるべき乗型荷重を持つ Lorentz 空間上の解の一意性の結果を参考にした.

定理 4.1. 指数条件

$$1 + \frac{n}{\gamma} \leq \alpha \leq q, \quad \frac{\gamma}{\alpha-1} < s \leq n, \quad \frac{s}{n} + \frac{1}{q} > 0$$

を仮定する. また, 次のいずれかの条件が成り立つとする.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{s}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{q_c} < \frac{1}{Q_c}, \quad q < \infty, \quad r = \infty, \\ \text{(ii)} \quad & \frac{s}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{q_c} = \frac{1}{Q_c}, \quad \begin{cases} q < \infty, & r \leq \alpha - 1, \\ q = \infty, & r \leq \min(1, \alpha - 1). \end{cases} \end{aligned}$$

このとき, 方程式 (HH) の解 $u \in C([0, T]; \dot{\mathcal{K}}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n))$ は一意的.

参考文献

- [1] B. Ben Slimene, S. Tayachi and F. B. Weissler, Well-posedness, global existence and large time behavior for Hardy–Hénon parabolic equations, *Nonlinear Anal.* **152**, 116–148 (2017).
- [2] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces: an introduction, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [3] N. Chikami, M. Ikeda, K. Taniguchi and S. Tayachi, Unconditional uniqueness and non-uniqueness for Hardy–Hénon parabolic equations, *Math. Ann.* **390** (2024), 3765–3825.
- [4] D. Drihem, Semilinear parabolic equations in Herz spaces, *Appl. Anal.* **102** (2023), no. 11, 3043–3063.
- [5] M. Hénon, Numerical experiments on the stability of spherical stellarsystems, *Astron. Astrophys.* **24** (1973) 229–238.
- [6] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein’s theorem on absolutely convergent Fourier transforms, *J. Math. Mech.* **205** (1968), 283–324.
- [7] K.-P. Ho, Young’s inequalities and Hausdorff–Young inequalities on Herz spaces, *Boll. Unione Mat. Ital.* **11** (2018) 469–481.

- [8] Y. Meyer, Wavelet, Paraproduct and Navier–Stokes Equations, Current developments in mathematics. International Press, (1996), 105–212.
- [9] S. Tayachi, Uniqueness and non-uniqueness of solutions for critical Hardy–Hénon parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. **488** (2020), no. 1.
- [10] E. Terraneo, Non-uniqueness for a critical non-linear heat equation, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 1–2, 185–218.
- [11] Y. Tsutsui, The Navier–Stokes equations and weak Herz spaces, Adv. Differential Equations **16** (2011), no. 11–12, 1049–1085.