

Weighted generalized Besov-Morrey spaces and trace operator

野井貴弘¹

追手門学院大学 理工学部 数理データサイエンス学科

1 導入

斉次 Besov 空間を generalized Morrey 空間の枠組みで一般化することで得られる generalized Besov-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n)$ に対して, 中村氏と澤野氏との共同研究 [6] で原子分解やトレース作用素の有界性を調べた. 本発表では, 荷重を付けて一般化した weighted generalized Besov-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ に対する原子分解とトレース作用素の結果を紹介する. ここで荷重は, Muckenhoupt の荷重クラス $A_q(\mathbb{R}^n)$ に属するだけでなく, 中村 [5] によって提案された荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ に属する場合を考える.

本講演の内容を含むより詳しい内容は [7] を参照していただきたい.

2 関数空間

この章では weighted generalized Besov-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ の定義を与える. そのために, 2.1節で本発表で用いる記号と用語を準備する. そして, 2.2節で generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ をおさらいする. その後, 2.3節ではこの発表で用いる荷重クラスについて解説し, 2.4節で weighted generalized Besov-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ を定義する.

2.1 いくつかの記号と用語の準備

本発表では以下の記号と用語を用いる.

- (1) 可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $|E|$ で E のルベーグ測度を表すものとする.
- (2) 各辺が座標軸に平行な $\mathbb{R}^n$ の立方体全体の集合を $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ または単に $\mathcal{Q}$ で表す.
- (3) $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ の辺長を $\ell(Q)$ で表す. つまり, $\ell(Q) = |Q|^{1/n}$ である.
- (4) $\mathbb{R}^n$ 上ほとんどいたるところ正值な局所可積分関数を荷重 (weight) という.

¹E-mail adress: t-noi@otemon.ac.jp

2.2 Generalized Morrey 空間

generalized Morrey 空間の定義においてよく用いられるクラス $\mathcal{G}_q$ の定義を与える． $0 < q < \infty$ とする． 非減少関数 $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ で

$$\varphi(t_1)t_1^{-n/q} \geq \varphi(t_2)t_2^{-n/q} \quad (0 < t_1 \leq t_2 < \infty). \quad (2.1)$$

をみたすものの全体を $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ で表す．

定義 2.1 (weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, w を荷重とする． $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f で

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w)} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad (2.2)$$

をみたすものの全体の集合を weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ という．

2.3 荷重クラスと最大不等式について

荷重 w と可測集合 E に対して,

$$w(E) := \int_E w(x) dx, \quad \langle w \rangle_E := |E|^{-1} \int_E w(x) dx$$

と定義する．

ボレル可測関数 f に対して, weighted Hardy-Littlewood maximal operator M_w を

$$M_w f(x) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}: x \in Q} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy \quad (2.3)$$

により定義する． $w \equiv 1$ であるときは M_w を単に M と表し, これを Hardy-Littlewood maximal operator という．

定義 2.2 (Muckenhoupt class A_q). 荷重 w に対して

$$[w]_{A_1} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{Mw(x)}{w(x)} = \inf \{ \alpha > 0 : \forall Q \in \mathcal{D}, \langle w \rangle_Q \leq \alpha \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} w(x) \}$$

と定義する． $1 < q < \infty$ に対して $[w]_{A_q}$ を

$$[w]_{A_q} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{q'}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q'}}$$

と定義し, $[w]_{A_\infty}$ を

$$[w]_{A_\infty} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} \frac{w(Q)}{|Q|} \exp \left(-\frac{1}{|Q|} \int_Q \log[w(x)] dx \right)$$

と定義する． $1 \leq q \leq \infty$ に対して

$$A_q(\mathbb{R}^n) = A_q := \{ w : \text{weight}, [w]_{A_q} < \infty \}$$

と定義する．

注意 2.3. A_q について次の性質が成り立つことが知られている：

- (1) $1 \leq p \leq q$ とするとき, $A_p \subset A_q$ (例えば [1, Proposition 7.2] を参照).
- (2) $A_\infty = \bigcup_{q \geq 1} A_q$ (例えば [4, Corollary 9.3.4] を参照).
- (3) $w \in A_\infty$ とする. このとき, ある正定数 $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ が存在し, 任意の立方体 E と立方体 $Q \subset E$ に対して

$$C_1 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\alpha_1} \leq \frac{w(E)}{w(Q)} \leq C_2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\alpha_2} \quad (2.4)$$

が成り立つ. $w \in A_q$ であるときは $\alpha_2 = q$ である. (例えば [1, p. 133-140] を参照).

例 2.4 ([3]). $|x|^\alpha \in A_q(\mathbb{R}^n)$ である必要十分条件は $-n < \alpha < n(q-1)$ である.

$\eta > 0$ とする. べき乗最大作用素 $M^{(\eta)}$ を $M^{(\eta)}f := M[|f|^\eta]^{\frac{1}{\eta}}$ により定義する. つぎの不等式が成り立つことがよく知られている.

定理 2.5. $0 < q < \infty$ とし, $0 < r \leq \infty$ とする.

$0 < \eta < \min\{1, q\}$ かつ $w \in A_{\frac{q}{\eta}}$ ならば, ある正定数 C が存在し, 任意の $f \in L^q(w)$ に対して

$$\|M^{(\eta)}f\|_{L^q(w)} \leq C \|f\|_{L^q(w)}. \quad (2.5)$$

証明は, 例えば Duoandikoetxea [1, Theorem 7.3] を参照されたい.

Weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性については w が A_q に属するだけでは不十分であることが知られている. 本研究では中村 [5] によって導入された荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ が重要な役割を果たす.

定義 2.6 (荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$). $0 < q < \infty, \varphi \in \mathcal{G}_q$ とし,

$$\Phi_{\varphi,q,w}(Q) := \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (Q \in \mathcal{Q})$$

と定義する. 荷重 w が $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ に属するとは, ある定数 $C_{\varphi,q} > 0$ が存在して, 任意の $Q_0 \in \mathcal{Q}$ に対して

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}: Q \subset Q_0} \Phi_{\varphi,q,w}(Q) \leq C_{\varphi,q} \Phi_{\varphi,q,w}(Q_0) \quad (2.6)$$

が成り立つときをいう.

例 2.4と同様に, 典型的な荷重であるパワーウェイトが $\mathcal{B}_{\varphi,q}$ に属する必要十分条件として, 次のことが知られている.

例 2.7 ([5, Example 2.3]). $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$, $\alpha > -n$ とする. $w(x) = |x|^\alpha \in \mathcal{B}_{\varphi,q}$ である必要十分条件は, ある定数 $C_{\varphi,q} > 0$ が存在して,

$$\varphi(R_0)R_0^{\frac{\alpha}{q}} \leq C_{\varphi,q} \varphi(R_1)R_1^{\frac{\alpha}{q}} \quad (R_0 \leq R_1)$$

が成り立つことである. 特に, $\varphi(t) = t^{\frac{n}{p}}$ ($1 \leq q \leq p < \infty$) であるとき,

$$|x|^\alpha \in \mathcal{B}_{\varphi,q} \iff \alpha \geq -\frac{q}{p} \cdot n$$

である.

荷重 w が A_q だけでなく $\mathcal{B}_{\varphi,q}$ にも属する場合, Hardy-Littlewood maximal operator M は $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ 上で有界であることが Nakamura [5] によって示されている.

定理 2.8 ([5, Theorem 1.3]). $1 < q < \infty$ とし $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とする. $w \in A_q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ ならば, Hardy-Littlewood maximal operator M は $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ 上の有界作用素である.

2.4 Generalized Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi,r}^s(w)$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を急減少関数の空間とする. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\text{supp } \hat{\phi} \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |\xi| \leq 2 \right\}, \quad (2.7)$$

$$|\hat{\phi}(\xi)| \geq C > 0 \quad \text{if} \quad \frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3} \quad (2.8)$$

をみたすものを考える. ここで, $\hat{\phi}$ は ϕ のフーリエ変換, つまり

$$\hat{\phi}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

である. (2.7) をみたす $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x) dx = 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n) \right\}.$$

に属する. $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間として扱う. このとき, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ は完備距離空間であることが知られている (例えば [10, (3.7)] を参照). $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ の双対空間とする. $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ に弱*-位相を導入すると $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ は完備であることが知られている (例えば [2], [10, (3.7)] を参照). $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ における多項式全体の集合とすると, $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \sim \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ (位相同型) である (例えば [11, Proposition 8.1], [8, Theorem 2.7], [9, Theorem 2.25] あるいは [6, Theorem 6.28] を参照).

(2.7) と (2.8) をみたす $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\phi_j(x) := 2^{jn} \phi(2^j x) \quad (x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \mathbb{Z})$$

と定義する. また, $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ と ϕ_j のたたみ込みを

$$\phi_j * f(x) = \langle f, \phi_j(x - \cdot) \rangle$$

と定義する. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ と $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ のデュアリティ・ペアである.

定義 2.9 (weighted generalized Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$). $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.7) と (2.8) をみたすとする. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, w は荷重とする. 次に定義する $\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)}$ が有限となる $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合を weighted generalized Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ という:

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)} := \left\| \left\{ \|2^{js} \phi_j * f(\cdot)\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w)} \right\}_{j=-\infty}^\infty \right\|_{\ell^r}$$

通常の Besov 空間や Besov–Morrey 空間などと同様に, 次の定理が成り立つ.

定理 2.10. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする. また, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.7) と (2.8) をみたし, $w \in \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ であるとする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) *weighted generalized Besov–Morrey* 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ のノルムは, (2.7) と (2.8) をみたす ϕ の取り方によらない.
- (2) $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

3 トレース作用素

本発表の主結果は, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ で定義されたトレース作用素

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f(\cdot, 0_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}). \quad (3.1)$$

を Weighted generalized Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ における作用素に拡張させることである. そのためには, 2-microlocal 型の Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^\rho(w)$ が必要になる. これを定義するために, パラメータや変数を伴う非負の数 A, B に対して, 次のような大小関係を表す記号を用いる:

- ① パラメータや変数によらずに $A \leq CB$ をみたす正定数 C が存在するとき, $A \lesssim B$ と表す.
- ② $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ であるとき, $A \sim B$ と表す.

定義 3.1 (2-microlocal type Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^\rho(w)$). $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.7) と (2.8) をみたすとする. $w \in \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とし, $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ は任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して $\rho(j+1) \sim \rho(j)$ をみたすものとする. 次に定義する $\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^\rho(w)}$ が有限となる $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合を 2-microlocal type weighted generalized Besov–Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^\rho(w)$ と定義する:

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^\rho(w)} := \left\| \left\{ \rho(j) \|\phi_j * f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w)} \right\}_{j=-\infty}^\infty \right\|_{\ell^r} = \left\{ \sum_{j=-\infty}^\infty \left(\rho(j) \|\phi_j * f(\cdot)\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w)} \right)^r \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

定理 3.2 (トレース作用素の有界性). $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$ とし, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とする. $t \in (0, \infty)$ に対して $\varphi^*(t) := \varphi(t)t^{-\frac{1}{q}}$ は非減少関数とする. $\mathbb{R}^n$ 上の荷重 w は $w(x', x_n) := w'(x') \cdot w_n(x_n)$ ($(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$) であり, ある $u \in [1, \infty)$ が存在し, $w' \in \mathcal{B}_{\varphi^*, q}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap A_u(\mathbb{R}^{n-1})$, さらに, ある $v \in [1, \infty)$ が存在し, $w_n \in A_v(\mathbb{R})$ であり, w_n は偶関数であるとする. $w^*(j) := 2^{js} w_n([0, 2^{-j}])^{\frac{1}{q}}$ ($j \in \mathbb{Z}$) とする. さらに, $s_0^* := s - \frac{v}{q}$ とし,

$$(n-1) \left(1 - \frac{1}{\min\{1, \frac{q}{u}\}} \right) < s_0^*$$

であると仮定する. このとき, トレース作用素

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f(\cdot, 0_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$$

は $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n, w)$ から $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi^*}, r}^{w^*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')$ への有界線形作用素に拡張でき,

$$\|\mathrm{Tr} f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi^*}, r}^{w^*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')} \leq C \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n, w)}, \quad \left(f \in \dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n, w) \right).$$

が成り立つ.

3.1 定理 3.2 を示すために必要な性質

補題 3.3. $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, $\varphi^*(t) := \varphi(t)t^{-\frac{1}{q}}$ ($t > 0$) は非減少関数であるとする. このとき, 任意の $w' \in \mathcal{B}_{\varphi^*, q}(\mathbb{R}^{n-1})$ と $\mathbb{R}$ 上の荷重 w_n に対して, $w(x) := w'(x') \cdot w_n(x_n)$ と定義すると $w \in \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ である.

補題 3.3 の証明

$w' \in \mathcal{B}_{\varphi^*, q}(\mathbb{R}^{n-1})$ とする. $\mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ の定義より, ある正定数 C が存在し, 任意の $Q_0 \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ と $Q \subset Q_0$ に対して,

$$\Phi_{\varphi, w, q}(Q) \leq C \Phi_{\varphi, w, q}(Q_0)$$

が成り立つことを示せばよい. $Q' \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$ に対して

$$\Phi_{\varphi,w,q}^*(Q) = \varphi^*(\ell(Q')) \left(\frac{w'(Q')}{|Q'|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

とおく. $Q = Q' \times I$ と表すことにする. ここで, $Q' \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$, $I \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ であり, $\ell(Q) = \ell(Q') = \ell(I)$ である. このとき,

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi,w,q}(Q) &= \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{w'(Q')}{|Q'|} \cdot \frac{w_n(I)}{|I|} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \varphi^*(\ell(Q)) \ell(Q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{w'(Q')}{|Q'|} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{w_n(I)}{\ell(Q)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Phi_{\varphi^*,w',q}^*(Q') \cdot w_n(I)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

を得る. $Q \subset Q_0$ をみたす任意の $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ に対して, $Q_0 = Q'_0 \times I_0$ とおくと, $Q' \subset Q'_0$, $I \subset I_0$ であり, $w' \in \mathcal{B}_{\varphi^*,q}(\mathbb{R}^{n-1})$ であることより

$$\Phi_{\varphi,w,q}(Q) = \Phi_{\varphi^*,w',q}^*(Q') \cdot w_n(I)^{\frac{1}{q}} \leq C_{\varphi^*,w',q} \Phi_{\varphi^*,w',q}^*(Q'_0) \cdot w_n(I_0)^{\frac{1}{q}} = C_{\varphi^*,w',q} \Phi_{\varphi,w,q}(Q_0)$$

を得る. $\square$

トレース作用素の有界性を得るために, 原子分解定理 (定理 3.6, 3.7) を用いる. そのために, 次の数列空間を導入する.

定義 3.4 (数列空間 $\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{\rho}(w)$). $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$, $w \in \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n) \cap A_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ とする. $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ は任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して, $\rho(j+1) \sim \rho(j)$ をみたすものとする. 複素数列 $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}$ で次に定義する $\|\lambda\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{\rho}(w)}$ が有限となるものの全体の集合を $\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{\rho}(\mathbb{R}^n, w) = \dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{\rho}(w)$ と表す:

$$\|\lambda\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{\rho}(w)} := \left\| \left\{ \rho(j) \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} \chi_{Q_{jm}} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(w)} \right\}_{j=-\infty}^{\infty} \right\|_{\ell^r}.$$

ここで, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して,

$$Q_{jm} = \prod_{k=1}^n [2^{-j}m_k, 2^{-j}(m_k + 1)).$$

次に, 原子を定義する.

定義 3.5 ($((K, L)$ -atoms). $L \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $K \in \mathbb{N}_0$ とする.

- (1) $j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^n$ とする. C^K 級関数 $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ が (K, L) -atom supported near Q_{jm} であるとは, $|\alpha| \leq K$ をみたす任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ に対して

$$2^{-j|\alpha|} |\partial^{\alpha} a(x)| \leq \chi_{3Q_{jm}}(x) \quad (3.2)$$

であり, $L \geq 0$ であるとき, 任意の $|\beta| \leq L$ をみたす $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) dx = 0 \quad (3.3)$$

が成り立つ. ただし, $L = -1$ であるときは (3.3) は不要である.

(2) $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}$ が (K, L) -atoms であるとは, 各 a_{jm} が (K, L) -atom supported near Q_{jm} であるときをいう.

原子分解定理 1 (定理 3.6) を述べるにあたり, 次の記号を用いる.

- ① 実数 a に対して, $a_+ = \max\{a, 0\}$.
- ② 実数 a に対して, $\lfloor a \rfloor$ を a を超えない最大の整数とする.
- ③ $n \in \mathbb{N}, q \in (0, \infty)$ に対して, $\sigma_q^{(n)} = n \left(1 - \frac{1}{\min\{1, q\}}\right)$.

定理 3.6 (原子分解定理 1). $s \in \mathbb{R}, 0 < q < \infty, 0 < r \leq \infty, \varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とする. また, ある $u \in [1, \infty)$ に対して, $w \in \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n) \cap A_u(\mathbb{R}^n)$ であるとする.

荷重 w_n は $w_n \in A_v(\mathbb{R})$ (ある $v \in [1, \infty)$) であるとし,

$$w^*(j) := 2^{js} w_n([0, 2^{-j}))^{\frac{1}{q}} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

と定義する. $s_0^* := s - \frac{v}{q}, s_1^* := s - \frac{1}{q}$ とし, K と L は

$$K \geq \lfloor 1 + s_1^* \rfloor_+, \quad L \geq \max \left\{ -1, \lfloor \sigma_{\frac{q}{u}}^{(n)} - s_0^* \rfloor \right\}$$

をみたすとする. このとき, 任意の $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \in \dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)$ と (K, L) -atoms $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}$ に対して,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} a_{jm} \text{ in } \mathcal{S}'_\infty, \quad \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)} \leq C \|\lambda\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)}$$

が成り立つ.

定理 3.7 (原子分解定理 2). $s \in \mathbb{R}, 0 < q < \infty, 0 < r \leq \infty, \varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, $w \in \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. $w_n \in A_\infty(\mathbb{R})$ とし,

$$w^*(j) := 2^{js} w_n([0, 2^{-j}))^{\frac{1}{q}} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

と定義する. このとき, 任意の $f \in \dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)$ に対して, ある $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \in \dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)$ と (K, L) -atoms $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}$ が存在し,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} a_{jm} \text{ in } \mathcal{S}'_\infty, \quad \|\lambda\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)} \leq C \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{w^*}(w)}.$$

が成り立つ. ここで, $K \in \mathbb{N}_0, L \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ は任意である.

原子分解定理 (定理 3.6, 3.7) を認めると定理 3.2 を示すことができる.

3.2 定理 3.2 の証明の概略

定理 3.2 の荷重に対する仮定と補題 3.3 から $w \in A_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ であるので、任意の $f \in \dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^s(\mathbb{R}^n, w)$ に対して、原子分解定理 2 (定理 3.7) を適用できる。

原子分解定理 2 (定理 3.7) より、任意の $f \in \dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^s(\mathbb{R}^n, w)$ に対して、ある $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \in \dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^s(\mathbb{R}^n, w)$ と (K, L) -atoms $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}$ が存在し、

$$\|\lambda\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^s(\mathbb{R}^n, w)} \leq C \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^s(\mathbb{R}^n, w)}, \quad f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} a_{jm} \text{ in } \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ。特に、 $K \in \mathbb{N}_0$ と $L \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ は任意にとれるので、 $K \geq \lfloor 1 + s_1^* \rfloor_+$, $L = -1$ をみたとすようにとる。ここで、 $s_1^* := s - \frac{1}{q}$ である。トレース作用素を

$$\text{Tr} f := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} a_{jm}(\cdot, 0_n)$$

により定義すると

$$\begin{aligned} \text{Tr} f &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \lambda_{j(m', 0)} a_{j(m', 0)}(\cdot, 0_n) \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \lambda_{j(m', -1)} a_{j(m', -1)}(\cdot, 0_n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

が $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ の意味で成り立つ。ここで、各関数列 $\{a_{j(m', 0)}(\cdot, 0_n)\}_{j \in \mathbb{Z}, m' \in \mathbb{Z}^{n-1}}$ と $\{a_{j(m', -1)}(\cdot, 0_n)\}_{j \in \mathbb{Z}, m' \in \mathbb{Z}^{n-1}}$ は $(K, -1)$ -atoms である。

定理 3.2 の仮定より

$$\sigma_{\frac{q}{u}}^{(n-1)} = (n-1) \left(1 - \frac{1}{\min\{1, \frac{q}{u}\}} \right) < s_0^* \iff \lfloor \sigma_{\frac{q}{u}}^{(n-1)} - s_0^* \rfloor \leq -1$$

であるので、 $K \geq \lfloor 1 + s_1^* \rfloor_+$, $L = -1 = \max\{-1, \lfloor \sigma_{\frac{q}{u}}^{(n-1)} - s_0^* \rfloor\}$ である。よって、原子分解定理 1 (定理 3.6) を (3.4) に適用することができる。

原子分解定理 1 (定理 3.6) を (3.4) に適用すると

$$\begin{aligned} \|\text{Tr} f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{w*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')} &\lesssim \|\{\lambda_{j(m', 0)}\}_{j \in \mathbb{Z}, m' \in \mathbb{Z}^{n-1}}\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{w*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')} \\ &\quad + \|\{\lambda_{j(m', -1)}\}_{j \in \mathbb{Z}, m' \in \mathbb{Z}^{n-1}}\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{w*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')}. \end{aligned}$$

となる。さらに、 $w^*(j) := 2^{js} w_n([0, 2^{-j}))^{\frac{1}{q}}$ ($j \in \mathbb{Z}$) であり、 w_n が偶関数であることを使うと、

$$\begin{aligned} \|\text{Tr} f\|_{\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{w*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')} &\lesssim \|\{\lambda_{j(m', 0)}\}_{j \in \mathbb{Z}, m' \in \mathbb{Z}^{n-1}}\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{w*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')} \\ &\quad + \|\{\lambda_{j(m', -1)}\}_{j \in \mathbb{Z}, m' \in \mathbb{Z}^{n-1}}\|_{\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}^{w*}(\mathbb{R}^{n-1}, w')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \|\{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}\|_{\dot{\mathbf{h}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_{q,r}}(\mathbb{R}^n, w)} \\
&\lesssim \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_{q,r}}(\mathbb{R}^n, w)}
\end{aligned}$$

を得る.

参考文献

- [1] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [2] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Academic Press, London, UK, 1968.
- [3] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third Edition, Springer, GTM249.
- [4] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer, GTM250.
- [5] S. Nakamura, Generalized weighted Morrey spaces and classical operators, Math. Nachr. **289** (2016), 2235–2262.
- [6] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, Generalized Morrey spaces and trace operator, Sci. China Math. **59** (2016), 281–336.
- [7] T. Noi, Weighted generalized Morrey smoothness spaces, to appear in Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)
- [8] Y. Sawano, Homogeneous Besov spaces, Kyoto J Math. **60** (1) 1 - 43, April 2020.
- [9] Y. Sawano, Theory of Besov Spaces. Springer: Springer Singapore, 2018.
- [10] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [11] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel. Lecture Notes in Math., vol. 2005, Springer, Berlin, 2010.