

Banach 空間の直和における skewness について^{*1}

岡山県立大学・情報工学部 三谷健一 (Ken-Ichi Mitani)

Okayama Prefectural University

概要

本研究では, Banach 空間の幾何学的定数の一つである skewness について考察する. 特に, Banach 空間の直和における skewness の特徴づけを与える. さらに, Banach 空間の直和における uniformly non-square 性と skewness との関係を与える.

なお, 本研究は新潟大学名誉教授の斎藤吉助氏, 北海道教育大学名誉教授の小室直人氏との共同研究によるものである.

1 はじめに

X を実 Banach 空間とし $\dim X \geq 2$ とする. $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ を X の閉単位球, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ を X の単位球面とする. 次の定数は Fitzpatrick-Reznick[6] によって導入された.

定義 1 ([6]) Banach 空間 X の skewness $s(X)$ を

$$s(X) = \sup \left\{ \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|x + ty\| - \|y + tx\|}{t} : x, y \in S_X \right\}$$

と定義する.

Ritt[20] による Banach 空間 X における generalized inner product

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (x, y \in X)$$

を用いると, $s(X)$ は

$$s(X) = \sup \{ \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle : x, y \in S_X \}$$

とかける.

命題 1 ([6]) (i) 任意の Banach 空間 X に対し $0 \leq s(X) \leq 2$.

(ii) X が Hilbert 空間であることと $s(X) = 0$ は同値.

(iii) Banach 空間 X と X の双対空間 X^* に対し $s(X^*) = s(X)$.

(iv) $s(L_1) = s(L_\infty) = 2$, $s(L_2) = 0$. また, $2 < p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$ に対し

$$s(L_p)(= s(L_{p'})) = \max_{t > 0} \frac{2(t - t^{p-1})}{1 + t^p}.$$

^{*1} 本研究は JSPS 科研費 JP21K03275 の助成を受けたものである.

種々の幾何学的定数に関して今までに幾何学的定数を用いた幾何学的性質の特徴づけ, 具体的な空間における幾何学的定数の計算, 幾何学的定数間の研究が行われている (例えば, [3, 9, 25, 26, 27, 28, 29] など).

本講演では, Banach 空間の幾何学的定数の一つである skewness について考察する. 特に, Banach 空間の直和における skewness の特徴づけを与える. さらに, Banach 空間の直和における uniformly non-square 性と skewness との関係を与える.

定義 2 X を Banach 空間とする. (i) X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して

$$x, y \in S_X, \left\| \frac{x-y}{2} \right\| > 1-\delta \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$$

のときを言う.

(ii) X の James 定数 $J(X)$ を

$$J(X) = \sup \left\{ \min (\|x+y\|, \|x-y\|) : x, y \in S_X \right\}$$

と定義する ([7]).

(iii) X の von Neumann-Jordan 定数 $C_{\text{NJ}}(X)$ を

$$C_{\text{NJ}}(X) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : x, y \in X, (x, y) \neq (0, 0) \right\}$$

と定義する (cf. [9]).

(iv) X の modulus of convexity $\delta_X(\varepsilon)$ を

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}$$

と定義する. すべての $\varepsilon > 0$ に対し $\delta_X(\varepsilon) > 0$ のとき, X は uniformly convex であるという.

(v) X の characteristic of convexity $\varepsilon_0(X)$ を

$$\varepsilon_0(X) = \sup \{ \varepsilon \in [0, 2] : \delta_X(\varepsilon) = 0 \}$$

と定義する (cf. [8, 25]).

(vi) X の modulus of smoothness $\rho_X(\tau)$ を

$$\rho_X(\tau) = \sup \left\{ \frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1 : x, y \in S_X \right\}$$

と定義する.

命題 2 (cf. [9]) X を Banach 空間とする. 次は同値.

(i) X が uniformly non-square.

(ii) $J(X) < 2$.

(iii) $C_{\text{NJ}}(X) < 2$.

(iv) $\varepsilon_0(X) < 2$.

(v) $\rho_X(1) < 1$.

2 Skewness と他の幾何学的定数の関係

最初に skewness と他の幾何学的定数の関係について述べる. Baronti-Papini[1] は $s(X)$ を $\rho_X(1)$ を用いて上から評価した.

定理 1 ([1]) 任意の Banach 空間 X に対し

$$s(X) \leq 2\rho_X(1). \quad (1)$$

また, 高橋-加藤 [26] から

定理 2 ([26]) 任意の Banach 空間 X に対し

$$\rho_X(1) \leq 2\left\{1 - \frac{1}{J(X)}\right\}.$$

以上より, $s(X)$ を $J(X)$ を用いて上から評価することができる.

定理 3 任意の Banach 空間 X に対し

$$s(X) \leq 4\left\{1 - \frac{1}{J(X)}\right\}.$$

次に $s(X)$ を $J(X)$ を用いて下から評価する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$J(X) - \varepsilon < \min(\|u + v\|, \|u - v\|)$$

なる $u, v \in S_X$ をとる. ここで,

$$w = u + tv, \quad z = v - tu \quad (0 < t \leq 1)$$

とし, さらに $x = w/\|w\|, y = z/\|z\|$ とおくと

$$\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle \geq \frac{2(J(X) - 2 - \varepsilon + t - t^2)}{t(1 + t)}.$$

よって

$$s(X) \geq \frac{2(J(X) - 2 - \varepsilon + t - t^2)}{t(1 + t)}.$$

この式の右辺を $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

補題 1 ([19]) X を Banach 空間とし, $0 < t \leq 1$ とする. このとき

$$s(X) \geq \frac{2(J(X) - 2 + t - t^2)}{t(1+t)}.$$

この結果から,

定理 4 ([19]) 任意の Banach 空間 X に対し

$$s(X) \geq 2 + 4(2 - J(X)) - 4\sqrt{(2 - J(X))(4 - J(X))}.$$

系 1 ([6]) X を Banach 空間とする. このとき X が uniformly non-square であることと $s(X) < 2$ は同値.

同様に, $s(X)$ と $\varepsilon_0(X)$ の関係も得られる.

定理 5 ([15]) 任意の Banach 空間 X に対し

$$s(X) \geq 2 + 2(2 - \varepsilon_0(X)) - 2\sqrt{(2 - \varepsilon_0(X))(6 - \varepsilon_0(X))}.$$

3 Day-James 空間における skewness

定理 1 の不等式 (1) の等号条件を考える. X が uniformly convex ならば

$$s(X) < 2\rho_X(1)$$

である ([19]). X が uniformly non-square でないとき,

$$s(X) = 2\rho_X(1)$$

であるが, この逆は成立しない. これを示すために次の 2 次元空間を考える.

定義 3 (cf. [9]) $1 \leq p, q \leq \infty$ とする. Day-James 空間 $\ell_p\text{-}\ell_q$ は次のノルム $\|\cdot\|_{p,q}$ によって定義される空間 $\mathbb{R}^2$ である:

$$\|(x, y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|(x, y)\|_p, & xy \geq 0, \\ \|(x, y)\|_q, & xy \leq 0. \end{cases}$$

ここで, $\ell_\infty\text{-}\ell_1$ の場合を考える. $X_0 = \ell_\infty\text{-}\ell_1$ とおく. この空間は uniformly non-square である. [9] から $\rho_{X_0}(1) = 1/2$. また, [19] から $s(X_0) \geq 1$. これらと, 定理 1 の不等式から

$$s(X_0) = 2\rho_{X_0}(1) = 1$$

が得られる.

さらに, ℓ_∞ - ℓ_1 以外の Day-James 空間も考察する.

定義 4 X を Banach 空間とし, $x(\neq 0) \in X$ とする. $x^* \in X^*$ が x の norming functional であるとは, $\|x^*\|^* = 1$ かつ $x^*(x) = \|x\|$ をみたすときをいい, x の norming functional 全体を $D(X, x)$ とかく.

補題 2 ([6]) 任意の Banach 空間 X に対し

$$s(X) = \sup \left\{ x^*(y) - y^*(x) : x, y \in S_X, x^* \in D(X, x), y^* \in D(X, y) \right\}.$$

この補題から

補題 3 ([16]) $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ とする. このとき,

$$s(X) = \sup \{s(X, x, y) : x, y \in \text{ext}(B_X) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\},$$

ここで,

$$s(X, x, y) = \sup \{|x^*(y) - y^*(x)| : x^* \in D(X, x), y^* \in D(X, y)\},$$

$\text{ext}(B_X)$ は B_X の端点全体の集合.

補題 3 を用いて, ℓ_p - ℓ_1 の skewness を計算する. $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し

$$z(\theta) = \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\|(\cos \theta, \sin \theta)\|_{p,1}}$$

とおくと,

$$\text{ext}(B_{\ell_p-\ell_1}) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \{z(\theta) : \theta \in [0, \pi/2] \cup \{\pi\}\}$$

である.

補題 4 ([17]) $1 < p < \infty$ とする. (i) $0 < \theta < \pi/2$ のとき

$$D(\ell_p-\ell_1, z(\theta)) = \{z(\theta)^*\},$$

ここで,

$$z(\theta)^* = \frac{((\cos \theta)^{p-1}, (\sin \theta)^{p-1})}{\|(\cos \theta, \sin \theta)\|_p^{p-1}}.$$

(ii) $\theta = 0$ のとき

$$D(\ell_p-\ell_1, z(0)) = \{(1, b) : -1 \leq b \leq 0\}.$$

(iii) $\theta = \pi/2$ のとき

$$D(\ell_p-\ell_1, z(\pi/2)) = \{(a, 1) : -1 \leq a \leq 0\}.$$

(iv) $\theta = \pi$ のとき

$$D(\ell_p-\ell_1, z(\pi)) = \{(-1, b) : 0 \leq b \leq 1\}.$$

これと補題 3 から

定理 6 ([17]) (i) $2 \leq p < \infty$ のとき, $s(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1$.

(ii) $1 < p < 2$ のとき,

$$s(\ell_p\text{-}\ell_1) = t_p^{p-1} + (1 - t_p^p)^{1/p} - t_p,$$

ここで t_p は次の方程式の一解である

$$(p-1)t^{p-2} - t^{p-1}(1-t^p)^{1/p-1} - 1 = 0, \quad 0 < t < 1/2.$$

[30] より, $X = \ell_p\text{-}\ell_1$ ($1 < p < \infty$) のとき, $\rho_X(1) = 2^{1/p-1}$. 以上より, 次が得られる.

定理 7 ([17]) $X = \ell_p\text{-}\ell_1$ とする. $1 < p < \infty$ ならば $s(X) < 2\rho_X(1)$.

4 Banach 空間の ℓ_p -直和の skewness

前章で示したように, 具体的な空間における skewness の計算方法として, 補題 2 の適用, つまり norming functional を用いることが有用であった. 同様の方法により, Banach 空間の ℓ_p -直和 $\ell_p(X_i)$ の skewness を $X_1, X_2, \dots$ の skewness を用いて評価することができる.

定義 5 (cf. [9]) $1 \leq p \leq \infty$ とし, 各 i に対し X_i を Banach 空間とする. $\{X_i\}$ の ℓ_p -直和を $\ell_p(X_i)$ とする. つまり

$$\ell_p(X_i) = \left\{ x = \{x_i\} : x_i \in X_i, \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

$p = 1, \infty$ のとき $\ell_p(X_i)$ は uniformly non-square でないから $s(\ell_p(X_i)) = 2$. よって, $1 < p < \infty$ としてよい.

補題 5 $1 < p < \infty$ とし, $X = \ell_p(X_i)$ とおく. 任意の $x = \{x_i\} \in S_X$ に対し,

$$D(X, x) = \left\{ \{\|x_i\|^{p-1} x_i^*\} : \begin{array}{l} x_i^* \in D(X_i, x_i) \text{ for } i \text{ with } x_i \neq 0 \\ x_i^* \in S_{X_i^*} \text{ for } i \text{ with } x_i = 0 \end{array} \right\}.$$

これと補題 2 から次が得られる.

定理 8 $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき

$$\max\{s(\ell_p), \sup_i s(X_i)\} \leq s(\ell_p(X_i)) \leq s(\ell_p) + \sup_i s(X_i).$$

特に,

$$s(\ell_2(X_i)) = \sup_i s(X_i).$$

$\ell_p(X_i)$ の von Neumann-Jordan 定数については加藤-高橋 [13] により, 次が得られている.

定理 9 ([13]) $1 \leq p \leq \infty$, $t = \min\{p, q\}$ とする, ここで $1/p + 1/q = 1$. このとき

$$\begin{aligned} \max\{C_{\text{NJ}}(\ell_p), \sup_i C_{\text{NJ}}(X_i)\} &\leq C_{\text{NJ}}(\ell_p(X_i)) \\ &\leq C_{\text{NJ}}(\ell_p) \cdot \sup_i C_{\text{NJ}}(X_i)^{2/s}, \end{aligned}$$

ここで $1/t + 1/s = 1$.

これより

系 2 ([13]) $1 < p < \infty$ とする. このとき, $\ell_p(X_i)$ が uniformly non-square であることと $\sup_i C_{\text{NJ}}(X_i) < 2$ は同値.

Skewness についても定理 8 から次が得られる.

系 3 $1 < p < \infty$ とする. このとき,

- (i) $\ell_p(X_i)$ が uniformly non-square ならば $\sup_i s(X_i) < 2$.
- (ii) $s(\ell_p) + \sup_i s(X_i) < 2$ ならば $\ell_p(X_i)$ は uniformly non-square.

特に,

- (iii) $\ell_2(X_i)$ が uniformly non-square であることと $\sup_i s(X_i) < 2$ は同値.

5 Banach 空間の ψ -直和の skewness

$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは,

$$\|(x_1, x_2)\| = \||x_1|, |x_2|\| \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

が成立するときをいい, normalized であるとは,

$$\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$$

のときをいう. AN_2 を $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm 全体とする. $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm は $[0, 1]$ 上のある種の凸関数で一意的に表せることが知られている ([2]). 実際, 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{2}$$

とおくと, ψ は $[0, 1]$ 上の凸関数で $\psi(0) = \psi(1) = 1$ かつ $\max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$ ($0 \leq t \leq 1$). このような $[0, 1]$ 上の凸関数全体を Ψ_2 とおく. 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x_1, x_2)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + |x_2|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right) & \text{if } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{if } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

と定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ であり, (2) をみたとす. よって AN_2 と Ψ_2 は 1 対 1 に対応する. 例えば, ℓ_p ノルム $\|\cdot\|_p \in AN_2$ に対応する凸関数 ψ_p は

$$\psi_p(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(1-t, t) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

さらに, Banach 空間の ψ -直和を定義する (cf. [10, 11, 12]). $\psi \in \Psi_2$, X_1, X_2 を Banach 空間とする. $X_1 \oplus X_2$ のノルムを

$$\|(x_1, x_2)\|_\psi = \|(\|x_1\|, \|x_2\|)\|_\psi \quad (x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$$

と定める. この空間を X_1, X_2 の ψ -直和といい, $(X_1 \oplus X_2)_\psi$ とかく.

前章と同様な方法により, $(X_1 \oplus X_2)_\psi$ の skewness を X_1, X_2 の skewness を用いて評価することができる.

定理 10 ([14]) X_1, X_2 を Banach 空間, $\psi \in \Psi_2$ とする. $(x_1, x_2) \in S_{X_1 \oplus_\psi X_2}$ とおくととき

$$D(X_1 \oplus X_2)_\psi, (x_1, x_2)) = \left\{ (a_1, a_2) \in D(\ell_\psi^2, (\|x_1\|, \|x_2\|)) \right. \\ \left. : \begin{array}{l} (a_1 x_1^*, a_2 x_2^*) : x_i^* \in D(X_i, x_i) \text{ for } i \text{ with } x_i \neq 0, \\ x_i^* \in S_{X_i^*} \text{ for } i \text{ with } x_i = 0 \end{array} \right\},$$

ここで, $\ell_\psi^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)$.

定理 11 X_1, X_2 を Banach 空間, $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \max(s(X_1), s(X_2), s(\ell_\psi^2)) \\ & \leq s((X_1 \oplus X_2)_\psi) \leq s(\ell_\psi^2) + \max(s(X_1), s(X_2)). \end{aligned}$$

特に, $\psi = \psi_2$ ならば

$$s((X_1 \oplus X_2)_{\psi_2}) = \max(s(X_1), s(X_2)).$$

参考文献

- [1] M. Baronti and P. L. Papini, *Projections, skewness and related constants in real normed spaces*, Math. Pannonica, **3** (1992), 31–47.
- [2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 10, 1973.
- [3] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math., **38** (1937), 114–115.

- [4] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao and S. Saejung, *Uniform smoothness and U -convexity of ψ -direct sums*, J. Nonlinear Convex Anal., **6** (2005), no. 2, 327–338.
- [5] P. N. Dowling, *On convexity properties of ψ -direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **288** (2003), 540–543.
- [6] S. Fitzpatrick and B. Reznick, *Skewness in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **275** (1983), 587–597.
- [7] J. Gao and K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc., A **48** (1990), 101–112.
- [8] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, 1990.
- [9] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan–von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Stud. Math., **144** (2001), 275–295.
- [10] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *On ψ -direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., **75** (2003), 413–422.
- [11] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-squareness of ψ -direct sums of Banach spaces $X \oplus_{\psi} Y$* , Math. Inequal. Appl., **7** (2004), 429–437.
- [12] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Uniform non- ℓ_1^n -ness of ψ -direct sums of Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **11** (2010), 13–33.
- [13] M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant for Lebesgue-Bochner spaces*, J. Inequal. Appl., **2** (1998), 89–97.
- [14] K.-I Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, *Smoothness of ψ -direct sums of Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., **8** (2005), 147–157.
- [15] K.-I. Mitani and K.-S. Saito *A note on relations between skewness and geometrical constants of Banach spaces*, Linear Nonlinear Anal., **7**, (2021), 257–264.
- [16] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and N. Komuro, *Extremal structure of absolute norms and the skewness*, Linear Nonlinear Anal., **1** (2015), 159–167.
- [17] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and N. Komuro, *Skewness of Day-James spaces*, Ann. Funct. Anal., **13** (2022), Article number:75.
- [18] K.-I Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on $\mathbb{C}^n$* , J. Convex Anal., **10**(2003), 89–107.
- [19] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and Y. Takahashi, *Skewness and James constant of Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **14** (2013), 115–122.
- [20] R. K. Ritt, *A generalization of inner product*, Michigan Math. J., **3** (1955), 23–26.
- [21] S. Saejung, *Extreme points, smooth points and noncreasiness of ψ -direct sum of Banach spaces*, Nonlinear Anal., **66** (2007), 2459–2469.

- [22] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan Constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$* , J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.
- [23] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on $\mathbb{C}^n$* , J. Math. Anal. Appl., **252** (2000), 879–905.
- [24] M. A. Smith, *Rotundity and extremity in $\ell_p(X_i)$ and $L_p(X)$* , *Geometry of Normed Linear Spaces*, Contemporary Math., Vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence Rhode Island, 1986, 143–162.
- [25] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces—a unified approach*, Banach and function spaces II, 191–220, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.
- [26] Y. Takahashi and M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann–Jordan and James constants of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **359** (2009), 602–609.
- [27] Y. Takahashi and M. Kato, *On a new geometric constant related to the modulus of smoothness of a Banach space*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **30** (2014), 1526–1538.
- [28] F. Wang, *On the James and von Neumann-Jordan constants in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 695–701.
- [29] F. Wang and B. Pang, *Some inequalities concerning the James constant in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **353** (2009), 305–310.
- [30] C. Yang and H. Li, *On the James type constant of ℓ_p - ℓ_1* , J. Inequal. Appl., **2015**, 2015:79, 6 pp.