

非線形汎関数に対する Greco 型積分表示定理

信州大学工学部 河邊 淳¹

Division of Mathematics, Faculty of Engineering,
Shinshu University

1. 序論 関数空間上で定義された非減少な非負の汎関数の Choquet 積分表示定理は、次のように定式化される． X は空でない集合， 2^X は X のべき集合，すなわち， X のすべての部分集合からなる集合族とする．関数族 $\Phi \subset [0, \infty]^X$ は零関数 0 を含むとする．与えられた非負の汎関数 $L: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ に対して，非加法的測度 $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ が存在して，任意の $f \in \Phi$ に対して

$$L(f) = \text{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt$$

が成り立つとき， L は **Choquet 積分表示可能** といい， μ を L の **表現測度** という．

1982 年に G. H. Greco [7] は， Φ 上で定義された非減少な非負の汎関数 L を Choquet 積分表示するために関数族 Φ と汎関数 L に課すべき条件を明らかにし，今日では Greco 型積分表示定理として引用される抽象的枠組みでの定式化を与えた．Greco 型積分表示定理では，表現測度は一意には定まらないが，最小の表現測度と最大の表現測度が明示的に与えられ，それらに挟まれるすべての非加法的測度も表現測度となることがわかる．この表現測度の選択の自由度により，非加法的測度論の研究で重要な様々な特性をもつ表現測度を見つけることができる．また，Greco 型積分表示定理では，汎関数が定義されている関数空間に課される条件はかなり一般的なので，多くの具体的な関数空間に対して定理が適用可能となる．Greco 型積分表示定理のこれらの特長を利用することにより，局所コンパクト空間 X 上のコンパクトな台をもつ連続関数空間 $C_{00}(X)$ や無限遠点で消滅する連続関数空間 $C_0(X)$ のみならず，正規空間 X 上の有界連続な関数空間 $C_b(X)$ などの正錐上で定義された非減少な非負の汎関数を応用上十分な正則性と連続性をもつ非加法的測度の Choquet 積分で一意的に表示することが可能となる [8, 11].

非加法的測度論では，Choquet 積分のほかに，Shilkret 積分と Sugeno 積分の研究も重要であり，その応用も広く知られている．この論文では，Choquet 積分に対して定式化された Greco 型積分表示定理は，Shilkret 積分や Sugeno 積分の場合はどのように定式化できるかを考察する．また，局所コンパクト空間上の Sugeno 積分に対する Riesz 型積分表示定理を Greco 型積分表示定理から導出する過程を紹介する．詳細な議論については，論文 [12, 13] を参照いただきたい．

¹本研究は科学研究費補助金 基盤研究 (C)(課題番号:23K03164) の助成を受けたものである．

2. 記号と準備 以下では, X は空でない集合とし, $\mathcal{D}$ は X の部分集合からなる集合族で, $\emptyset \in \mathcal{D}$ とする. 集合 D の定義関数を χ_D で表す. 条件 $\mu(\emptyset) = 0$ を満たす非減少な集合関数 $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ を**非加法的測度**という. X 上で定義された非負の関数からなる関数族 $\text{Lm}(\mathcal{D})$ と $\text{Um}(\mathcal{D})$ をそれぞれ

$$\text{Lm}(\mathcal{D}) := \{f \in [0, \infty]^X : \text{任意の } t > 0 \text{ に対して } \{f > t\} \in \mathcal{D}\}$$

$$\text{Um}(\mathcal{D}) := \{f \in [0, \infty]^X : \text{任意の } t > 0 \text{ に対して } \{f \geq t\} \in \mathcal{D}\}$$

で定め, $\text{Lm}(\mathcal{D})$ に属する関数は**下 $\mathcal{D}$ -可測**, $\text{Um}(\mathcal{D})$ に属する関数は**上 $\mathcal{D}$ -可測**であるという. 関数族 $\text{Lm}(\mathcal{D})$ は常に零関数 0 を含み, 任意の $f \in \Phi$ と任意の $c > 0$ に対して, $cf, f \wedge c, f - f \wedge c = (f - c)^+, f\chi_{\{f > c\}} \in \text{Lm}(\mathcal{D})$ となる. 関数族 $\text{Um}(\mathcal{D})$ についても, $\{f > c\}$ を $\{f \geq c\}$ で置き換えれば, 同じ結果が成り立つ. 非加法的測度に関する詳細な解説については [6, 10, 14, 19] などを見よ.

3. 非線形積分 この論文では, 非負の関数 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ の非加法的測度 $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ による積算概念として, 次の 3 種類の非線形積分を取り扱う. $f \in \text{Lm}(\mathcal{D})$ に対しては

- **Choquet 積分** [4]: $\text{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt$

- **Shilkret 積分** [17]: $\text{Sh}(\mu, f) := \sup_{t>0} t \cdot \mu(\{f > t\})$

- **Sugeno 積分** [15, 18]: $\text{Su}(\mu, f) := \sup_{t>0} t \wedge \mu(\{f > t\})$

で定める. また, $f \in \text{Um}(\mathcal{D})$ に対しては, 上の定義式の右辺の集合 $\{f > t\}$ を $\{f \geq t\}$ で置き換えて定義する. このように被積分関数 f の可測性に依じて 2 つに分けて定義しても, $f \in \text{Lm}(\mathcal{D}) \cap \text{Um}(\mathcal{D})$ のときは, 積分値は一致するので, この定義は整合的である. これらの積分は, 被積分関数 f が単関数

$$f = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \chi_{D_i} = \bigvee_{i=1}^n t_i \chi_{D_i},$$

$$n \in \mathbb{N}, D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$$

の場合には, それぞれ

$$\begin{aligned} \text{Ch}(\mu, f) &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \mu(D_i) \\ \text{Sh}(\mu, f) &= \bigvee_{i=1}^n t_i \mu(D_i) \\ \text{Su}(\mu, f) &= \bigvee_{i=1}^n t_i \wedge \mu(D_i) \end{aligned}$$

となる．各積分に対するこの離散表現は，全体集合 X が有限集合の場合に積分値を計算する際に役立つ．

Choquet 積分は，足し算では表現できない相互作用や歪みが生じる現象を扱う分野で使われる．例えば，経済学・意思決定理論・期待効用理論（Choquet 期待効用理論，曖昧性回避行動のモデル化，非線形期待値，リスク評価）では，確率が歪んでいる場合や不完全な情報の下での意思決定を表現するために Choquet 積分が用いられている．一方，Sugeno 積分は，Choquet 積分とは性質がかなり異なり，上限 $\sup$ と下限 $\inf$ を用いた集約という特徴から，順序や閾値や論理的命題を統合し，その統合値を用いて意思決定や機械の制御などを行う場合に役立つ．Shilkret 積分は，Choquet 積分や Sugeno 積分に比べると応用分野はやや限定的であるが，sup-product 型の集約であり，結果をもたらす幾つかの要因のなかで，どの要因が最も効いているかを重要度という重みをつけて，「要因の強さ $\times$ 重要度」という形で評価したい場合に用いられる．

非線形積分は，非加法的測度 μ を固定すれば，可測関数空間 $Lm(\mathcal{D})$ や $Um(\mathcal{D})$ 上で定義された非負の汎関数と見なすことができる．そこで， $Lm(\mathcal{D})$ や $Um(\mathcal{D})$ の部分空間 Φ と汎関数 $L: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ が与えられたとき， Φ と L がどのような条件を満たせば， L を Choquet 積分，Shilkret 積分，Sugeno 積分で表示できるかという逆問題を議論することは興味深い．この逆問題を解決するには，まず，これら 3 種類の積分がもつ性質を明らかにする必要がある．そこで，これら非線形積分の特性を理解する上で必要不可欠な概念である関数の共単調性について復習しておく．2 つの関数 $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ は，任意の $x, y \in X$ に対して

$$f(x) < f(y) \Rightarrow g(x) \leq g(y)$$

が成り立つとき**共単調**といい， $f \sim g$ とかく [5]．この性質は，“similarly ordered” や “même tableau de variation” とも呼ばれ， $f(x) < f(y)$ と $g(x) > g(y)$ を同時に満たすような $x, y \in X$ は存在しないことを意味している．例えば， $\varphi, \psi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ が非減少関数であれば，任意の関数 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ に対して， $\varphi(f) \sim \psi(f)$ となる．

Choquet 積分，Shilkret 積分，Sugeno 積分がもつ基本性質は以下の通りである．

命題 1 (Choquet 積分の基本性質) $f, g \in Lm(\mathcal{D})$ ， $D \in \mathcal{D}$ ， $c > 0$ とする．

- $Ch(\mu, \chi_D) = \mu(D)$ (生成性)
- $Ch(\mu, cf) = c Ch(\mu, f)$ (正斉次性)
- $f \leq g$ ならば $Ch(\mu, f) \leq Ch(\mu, g)$ (単調性)
- $Ch(\mu, f) = \sup_{a>0} Ch(\mu, (f - a)^+)$ (下方周辺連続性)
- $Ch(\mu, f) = \sup_{b>0} Ch(\mu, f \wedge b)$ (上方周辺連続性)
- $Ch(\mu, f) = Ch(\mu, f \wedge c) + Ch(\mu, (f - c)^+)$ (水平加法性)
- $f \sim g$ かつ $f + g \in Lm(\mathcal{D})$ ならば $Ch(\mu, f + g) = Ch(\mu, f) + Ch(\mu, g)$ (共単調加法性)

命題 2 (Shilkret 積分の基本性質) $f, g \in \text{Lm}(\mathcal{D})$, $D \in \mathcal{D}$, $c > 0$ とする.

- $\text{Sh}(\mu, \chi_D) = \mu(D)$ (生成性)
- $\text{Sh}(\mu, cf) = c \text{Sh}(\mu, f)$ (正斉次性)
- $f \leq g$ ならば $\text{Sh}(\mu, f) \leq \text{Sh}(\mu, g)$ (単調性)
- $\text{Sh}(\mu, f) = \sup_{a>0} \text{Sh}(\mu, (f - a)^+)$ (下方周辺連続性)
- $\text{Sh}(\mu, f) = \sup_{b>0} \text{Sh}(\mu, f \wedge b)$ (上方周辺連続性)
- $\text{Sh}(\mu, f) = \text{Sh}(\mu, f \wedge c) \vee \text{Sh}(\mu, f \chi_{\{f>c\}})$ (水平極大性)
- $f \sim g$ ならば $\text{Sh}(\mu, f \vee g) = \text{Sh}(\mu, f) \vee \text{Sh}(\mu, g)$ (共単調極大性)

命題 3 (Sugeno 積分の基本性質) $f, g \in \text{Lm}(\mathcal{D})$, $D \in \mathcal{D}$, $c > 0$ とする.

- $\text{Su}(\mu, c\chi_D) = c \wedge \mu(D)$ (擬生成性)
- $\text{Su}(\mu, f \wedge c) = \text{Su}(\mu, f) \wedge c$ (正下限斉次性)
- $f \leq g$ ならば $\text{Su}(\mu, f) \leq \text{Su}(\mu, g)$ (単調性)
- $\text{Su}(\mu, f) = \sup_{a>0} \text{Su}(\mu, (f - a)^+)$ (下方周辺連続性)
- $\text{Su}(\mu, f) = \sup_{b>0} \text{Su}(\mu, f \wedge b)$ (上方周辺連続性)
- $\text{Su}(\mu, f) = \text{Su}(\mu, f \wedge c) \vee \text{Su}(\mu, f \chi_{\{f>c\}})$ (水平極大性)
- $f \sim g$ ならば $\text{Su}(\mu, f \vee g) = \text{Su}(\mu, f) \vee \text{Su}(\mu, g)$ (共単調極大性)
- $f \sim g$ ならば $\text{Su}(\mu, f \wedge g) = \text{Su}(\mu, f) \wedge \text{Su}(\mu, g)$ (共単調極小性)

注意 1 (1) 命題 1 は, $f, g \in \text{Um}(\mathcal{D})$ のときも, 共単調加法性の $f + g \in \text{Lm}(\mathcal{D})$ を $f + g \in \text{Um}(\mathcal{D})$ で置き換えれば成り立つ. また, 命題 2 と命題 3 は, $f, g \in \text{Um}(\mathcal{D})$ のときも, 水平極大性の $\{f > c\}$ を $\{f \geq c\}$ で置き換えれば成り立つ.

(2) Choquet 積分は, Shilkret 積分や Sugeno 積分がもつ水平極大性や共単調極大性, Sugeno 積分がもつ擬生成性, 正下限斉次性, 共単調極小性をもたない. Shilkret 積分は, Choquet 積分がもつ水平加法性や共単調加法性, Sugeno 積分がもつ擬生成性, 正下限斉次性, 共単調極小性をもたない. また, Sugeno 積分は, Choquet 積分や Shilkret 積分がもつ生成性や正斉次性, Choquet 積分がもつ水平加法性や共単調加法性をもたない.

3. 非線形汎関数の特性

Choquet 積分, Shilkret 積分, Sugeno 積分を特徴づけるために, これらの積分がもつ性質に対応させて, 非線形汎関数の特性を定義する. この章では, $\Phi \subset [0, \infty]^X$ は零関数 0 を含む関数族で, **正斉次的かつ Stone 的**, すなわち, 任意の $f \in \Phi$ と $c > 0$ に対して, $cf \in \Phi$ かつ $f \wedge c, f - f \wedge c = (f - c)^+ \in \Phi$ が成り立つとする.

定義 1 $L: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ は汎関数で $L(0) = 0$ とする.

- L は正斉次的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f \in \Phi$ と $c > 0$ に対して, $L(cf) = cL(f)$.
- L は正下限斉次的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f \in \Phi$ と $c > 0$ に対して, $L(f \wedge c) = L(f) \wedge c$.
- L は単調 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f, g \in \Phi$ に対して, $f \leq g$ ならば $L(f) \leq L(g)$.
- L は共単調的単調 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f, g \in \Phi$ に対して, $f \sim g$ かつ $f \leq g$ ならば $L(f) \leq L(g)$.
- L は水平加法的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f \in \Phi$ と $c > 0$ に対して, $L(f) = L(f \wedge c) + I((f - c)^+)$.
- L は共単調加法的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f, g \in \Phi$ に対して, $f \sim g$ かつ $f + g \in \Phi$ ならば $L(f + g) = L(f) + L(g)$.
- L は共単調極大的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f, g \in \Phi$ に対して, $f \sim g$ かつ $f \vee g \in \Phi$ ならば $L(f \vee g) = L(f) \vee L(g)$.
- L は共単調極小的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f, g \in \Phi$ に対して, $f \sim g$ かつ $f \wedge g \in \Phi$ ならば $L(f \wedge g) = L(f) \wedge L(g)$.
- L は下方周辺連続 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f \in \Phi$ に対して, $L(f) = \sup_{a>0} L((f - a)^+)$.
- L は上方周辺連続 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $f \in \Phi$ に対して, $L(f) = \sup_{b>0} L(f \wedge b)$.
- L は周辺連続 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ L は下方周辺連続かつ上方周辺連続.
- L は一様有界 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \sup_{f \in \Phi} L(f) < \infty$.

明らかに, “単調 $\Rightarrow$ 共単調的単調”, “共単調極大的または共単調極小的 $\Rightarrow$ 共単調的単調”, “共単調加法的 $\Rightarrow$ 水平加法的”, “正下限斉次的 $\Rightarrow$ 上方周辺連続” が成り立つ.

4. Greco 型積分表示定理 1982 年に G. H. Greco は非負の汎関数を Choquet 積分で表示するために関数族 Φ と汎関数 L に課すべき条件を明らかにし, いわゆる Greco 型積分表示定理を確立した. 以下では, 関数族 $\Phi \subset [0, \infty]^X$ は $0 \in \Phi$ を満たし, 集合族 $\mathcal{D} \subset 2^X$ は $\emptyset \in \mathcal{D}$ を満たすとする. $\Phi \subset \text{Lm}(\mathcal{D}) \cup \text{Um}(\mathcal{D})$ とする. また, $L: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ は $L(0) = 0$ を満たす汎関数とする. このとき, 各 $A \in 2^X$ に対して

$$\alpha(A) := \sup \{L(f) : f \in \Phi, f \leq \chi_A\}$$

$$\beta(A) := \inf \{L(f) : f \in \Phi, \chi_A \leq f\}$$

で非加法的測度 $\alpha, \beta: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ を定義する. ただし, $\{f \in \Phi : \chi_A \leq f\} = \emptyset$ のときは $\beta(A) := \infty$ と定める. このとき, L が共単調的単調ならば, 任意の $A \in 2^X$ に対して $\alpha(A) \leq \beta(A)$ が成り立つ. 次の定理は Greco [7] により与えられた.

定理 1 Φ は正斉次的かつ Stone 的とする. 汎関数 L は単調かつ水平加法的かつ周辺連続とする. このとき, 任意の非加法的測度 $\lambda: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ に対して, 次の (a) と (b) は同値である.

- (a) 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, $\alpha(D) \leq \lambda(D) \leq \beta(D)$.
 (b) 任意の $f \in \Phi$ に対して, $L(f) = \text{Ch}(\lambda, f)$.

定理 1 と同じ形式の積分表示定理は一般に **Greco 型積分表示定理** と呼ばれ, 以下の特長をもつ.

- 多くの関数空間の正錐が関数族 Φ に課せられた正斉次性と Stone 性を満たす. 例えば, 有界関数空間, 有界連続関数空間, コンパクトな台をもつ連続関数空間, 無限遠点で消滅する連続関数空間, 下半連続関数空間, 上半連続関数空間などの正錐はすべて Φ に課された条件を満たしている.
- 表現測度 λ の選び方に自由度がある. この自由度を利用することにより, 非加法的測度論の研究で重要な働きをする上からの自己連続性, 下からの自己連続性, 擬距離生成性, 劣モジュラー性, 優モジュラー性, 零加法性, 弱零加法性, 上からの連続性, 下からの連続性, 順序連続性などの特性をもつ表現測度を構成することができる. 詳しくは [9, 11] を見よ.

5. Shilkret 積分と Sugeno 積分に対する Greco 型積分表示定理 この章では, Choquet 積分に対する Greco 型積分表示定理である定理 1 を Shilkret 積分と Sugeno 積分に対して定式化した結果を紹介する. この定式化にあたっては, 関数族 Φ に**共単調上半束性**, すなわち, 任意の $f, g \in \Phi$ に対して, $f \sim g$ ならば $f \vee g \in \Phi$ となる性質を新たに課す必要がある. 明らかに, Φ が**束**, すなわち, 任意の $f, g \in \Phi$ に対して $f \vee g, f \wedge g \in \Phi$ ならば, Φ は共単調上半束性をもつ.

定理 2 (Shilkret 積分に対する Greco 型積分表示定理) Φ は正斉次的かつ Stone 的な共単調上半束とする. 汎関数 L は正斉次的かつ共単調極大的かつ周辺連続とする. このとき, 任意の非加法的測度 $\lambda: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ に対して, 次の (a) と (b) は同値である.

- (a) 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, $\alpha(D) \leq \lambda(D) \leq \beta(D)$.
 (b) 任意の $f \in \Phi$ に対して, $L(f) = \text{Sh}(\lambda, f)$.

次に, Sugeno 積分に対する Greco 型積分表示定理を定式化するために, α と β の代わりに, 次の集合関数を定義する. $0 < e < \infty$ は定数とする. 各 $A \in 2^X$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha_e(A) &:= \sup \{L(f) : f \in \Phi, f \leq \chi_A^e\} \\ \beta_e(A) &:= \inf \{L(f) : f \in \Phi, \chi_A^e \leq f \leq e\}\end{aligned}$$

で非加法的測度 $\alpha_e, \beta_e: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ を定義する. ただし, 各 $x \in X$ に対して

$$\chi_A^e(x) := \begin{cases} e & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A), \end{cases}$$

すなわち, $\chi_A^e = e\chi_A$ である. また, $\{f \in \Phi: \chi_A^e \leq f \leq e\} = \emptyset$ のとき $\beta_e(A) := e$ と定める. このとき, L が共単調的単調かつ正下限斉次的ならば, 任意の $A \in 2^X$ に対して $\alpha_e(A) \leq \beta_e(A) \leq e$ が成り立つ.

定理 3 (Sugeno 積分に対する Greco 型積分表示定理) Φ は正斉次的かつ Stone 的な共単調上半束とする. 汎関数 L は正下限斉次的, 共単調極大的, 下方周辺連続とする. L は一様有界とし, $e := \sup_{f \in \Phi} L(f)$, $\Phi_e := \{f \in \Phi: f \leq e\}$ とおく. このとき, 任意の非加法的測度 $\lambda: \mathcal{D} \rightarrow [0, e]$ に対して, 次の (a) と (b) は同値である.

(a) 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, $\alpha_e(D) \leq \lambda(D) \leq \beta_e(D)$.

(b) 任意の $f \in \Phi$ に対して, $L(f) = \text{Su}(\lambda, f)$.

また, 任意の非加法的測度 $\lambda: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ に対して, 次の (a) と (b) は同値である.

(a) 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, $\alpha_e(D) \leq \lambda(D) \wedge e \leq \beta_e(D)$.

(b) 任意の $f \in \Phi_e$ に対して, $L(f) = \text{Su}(\lambda, f)$.

注意 2 汎関数の Sugeno 積分表示問題は, X が有限集合の場合に [1, 2] で議論された. X が無限集合の場合には, $\mathcal{D}$ は σ -集合体, Φ は閉区間 $[0, 1]$ に値をとる $\mathcal{D}$ -可測関数全体 V の部分集合, 汎関数は $I: \Phi \rightarrow [0, 1]$, 非加法的測度は $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ の場合に限定した研究が行われてきた. この限定的な設定の下で, Ralescu と Sugeno [16] は, $\Phi = V$ の場合に議論した. その後, Chateaufneuf と Rico [3] は, Φ は V の部分集合であることを許すが, $1 \in \Phi$ の場合に, 定理 3 と同じ Greco 型積分表示定理を与えた. しかし, Φ が局所コンパクト空間上で定義されたコンパクトな台をもつ実数値関数全体や無限遠点で消滅する実数値関数全体の場合には $1 \notin \Phi$ なので, 彼らの結果をこのような空間に適用することはできない. 定理 3 では, $1 \in \Phi$ は仮定されていないので, 上記の空間に対してもわれわれの結果を適用できる点が, 従前の研究からの本質的な進展である. また, 定理 3 では, 被積分関数や非加法的測度の取る値が閉区間 $[0, 1]$ に制限されていない点も重要な拡張になっている. 実際, 定理 3 の定数 e を限りなく大きくする議論により, 次章で紹介する定理 4 における L の一様有界性は除去可能であることが示せる (詳細は [13] を見よ).

6. Greco 型から Riesz 型への導出過程 Choquet 積分, Shilkret 積分, Sugeno 積分に対する Greco 型積分表示定理から, Riesz 型積分表示定理を導くことができる. Choquet 積分については, [11] で詳述されているので, ここでは局所コンパクト空間上の Sugeno 積分に対する Riesz 型積分表示定理を Greco 型積分表示定理から導出する過程を紹介する.

X は局所コンパクト Hausdorff 空間とし, X の開集合全体を $\mathcal{G}$, コンパクト集合全体を $\mathcal{K}$ で表す. X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{D}$ は, $\mathcal{G}$ と $\mathcal{K}$ を含むとする. X 上で定義されたコンパクトな台をもつ実数値連続関数全体からなる Banach 束を $C_{00}(X)$ で, 無限遠点で消滅する実数値連続関数全体からなる Banach 束を $C_0(X)$ で表し, その束ノルムを $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ とする. また, $C_{00}(X)$ と $C_0(X)$ の正錐を $C_{00}^+(X) := \{f \in C_{00}(X): f \geq 0\}$

と $C_0^+(X) := \{f \in C_0(X) : f \geq 0\}$ で定める. 以下では, 記号を簡単にするために, $C_{00}^+(X)$ または $C_0^+(X)$ を同じ記号 Φ で表す. このとき, Φ は正斉次的かつ Stone 的な共単調上半束 (実際には束) である. また, $\Phi \subset \text{Lm}(\mathcal{D}) \cap \text{Um}(\mathcal{D})$ となる.

非加法的測度 $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ を一つ固定して, 各 $f \in \Phi$ に対して

$$L_\mu(f) := \text{Su}(\mu, f)$$

で汎関数 $L_\mu: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ を定義すると, L_μ は正下限斉次性, 単調性, 下方周辺連続性, 上方周辺連続性, 共単調極大性, 共単調極小性をもつ. また, 任意の $f \in \Phi$ に対して,

$$L_\mu(f) \leq \|f\|_\infty \wedge \sup_{D \in \mathcal{D}} \mu(D)$$

が成り立つので, μ が**一様有界**, すなわち,

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} \mu(D) < \infty$$

ならば, L_μ も一様有界となる.

以下では, 汎関数 $L: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ は $L(0) = 0$ を満たすとする. 自明な議論を避けるため, ある $f \in \Phi$ が存在して, $L(f) > 0$ と仮定する. 以下では, L が一様有界な場合を取り扱い, $e := \sup_{f \in \Phi} L(f) < \infty$ とおく. すでに定義した非加法的測度 α_e と β_e を用いて, 各 $A \in 2^X$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_e^*(A) &:= \inf \{ \alpha_e(G) : A \subset G, G \in \mathcal{G} \} \\ \beta_e^*(A) &:= \sup \{ \beta_e(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K} \} \end{aligned}$$

で非加法的測度 $\alpha_e^*, \beta_e^*: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ を定義する.

Riesz 型積分表示定理における表現測度は, 測度が定義されている空間 X の位相に関連する正則性と連続性をもつ. 非加法的測度 $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ は, 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して

$$\mu(G) = \sup \{ \mu(K) : K \subset G, K \in \mathcal{K} \}$$

が成り立つとき, $\mathcal{G}$ 上で**内 $\mathcal{K}$ 正則**といい, 任意の $K \in \mathcal{K}$ に対して

$$\mu(K) = \inf \{ \mu(G) : K \subset G, G \in \mathcal{G} \}$$

が成り立つとき, $\mathcal{K}$ 上で**外 $\mathcal{G}$ 正則**という. また, 開集合からなる任意の非減少有向列 $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ に対して, $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ とおくと,

$$\mu(G) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \mu(G_\gamma)$$

が成り立つとき, $\mathcal{G}$ 上で**内 τ -連続**といい, コンパクト集合からなる任意の非増加有向列 $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ に対して, $K = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$ とおくと,

$$\mu(K) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \mu(K_\gamma)$$

が成り立つとき、 $\mathcal{K}$ 上で外 τ -連続という。局所コンパクト集合上の非加法的測度の正則性と τ -連続性の間には、次の命題が示すような密接な関係が成り立つ。

命題 4 ([8]) $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ は非加法的測度とする。

- (1) μ は $\mathcal{G}$ 上で内 $\mathcal{K}$ 正則 $\Leftrightarrow \mu$ は $\mathcal{G}$ 上で内 τ -連続.
- (2) μ は $\mathcal{K}$ 上で外 $\mathcal{G}$ 正則 $\Leftrightarrow \mu$ は $\mathcal{K}$ 上で外 τ -連続.

次の命題は、Riesz 型積分表示定理を Greco 型積分表示定理から導出する際に本質的な働きをする。

命題 5 L は正下限斉次的、共単調極大的、下方周辺連続とする。 L は一様有界で、 $e := \sup_{f \in \Phi} L(f)$ とおく。このとき、以下が成り立つ。

- (1) 任意の $A \in 2^X$ に対して、 $\alpha_e(A) \leq \beta_e^*(A) \leq \alpha_e^*(A) \leq \beta_e(A)$.
- (2) 任意の $K \in \mathcal{K}$ に対して、 $\alpha_e^*(K) = \beta_e(K)$.
- (3) 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して、 $\beta_e^*(G) = \alpha_e(G)$.
- (4) α_e^* は $\mathcal{G}$ 上で内 $\mathcal{K}$ 正則.
- (5) β_e^* は $\mathcal{K}$ 上で外 $\mathcal{G}$ 正則.
- (6) α_e^* は $\mathcal{G}$ 上で内 τ -連続.
- (7) β_e^* は $\mathcal{K}$ 上で外 τ -連続.

定理 3, 命題 4, 命題 5 より Sugeno 積分に対して次の Riesz 型積分表示定理が得られる。実際、定理 4 で一意的に存在する表現測度 μ は $\mu = \alpha_e^*$ である。

定理 4 (Sugeno 積分に対する Riesz 型積分表示定理) L は正下限斉次的、共単調極大的、下方周辺連続とする。 L は一様有界で、 $e := \sup_{f \in \Phi} L(f)$ とおく。このとき、次の (a) と (b) を満たす非加法的測度 $\mu: 2^X \rightarrow [0, e]$ が一意に存在する。

- (a) 任意の $f \in \Phi$ に対して、 $L(f) = \text{Su}(\mu, f)$.
- (b) μ は $\mathcal{G}$ 上で内 $\mathcal{K}$ 正則かつ 2^X 上で外 $\mathcal{G}$ 正則.

さらに、 μ は $\mathcal{G}$ 上で内 τ -正則かつ $\mathcal{K}$ 上で外 τ -正則であり、 $\mu(X) = e$ を満たす。

逆に、非加法的測度 $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ に対して、汎関数 $L: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ を (a) で定義すると、 L は正下限斉次的、共単調極大的、下方周辺連続である。また、 μ が有限ならば、 L は一様有界で、 $\sup_{f \in \Phi} L(f) \leq \mu(X)$ が成り立つ。さらに、 X がコンパクトで、 μ が有限ならば、 $\sup_{f \in \Phi} L(f) = \mu(X)$ となる。

参考文献

- [1] L.M. de Campos, M.T. Lamata, S. Moral, A unified approach to define fuzzy integrals, Fuzzy Sets and Systems 39 (1991) 75–90.

- [2] L.M. de Campos, M.J.Bolaños, Characterization and comparison of Sugeno and Choquet integrals, *Fuzzy Sets and Systems* 52 (1992) 61–67.
- [3] A. Chateaufneuf, A. Rico, A Sugeno integral representation under Stone condition, *Fuzzy Sets and Systems* 151 (2005) 261–267.
- [4] G. Choquet, Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 5 (1953–1954) 131–295.
- [5] C. Dellacherie, Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, *Séminaire de Probabilités V*, Strasbourg, *Lecture Notes in Math.* 191, Springer, Berlin, 77–81, 1970.
- [6] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*. 2nd ed, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [7] G.H. Greco, Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 66 (1982) 21–42.
- [8] J. Kawabe, The Choquet integral representability of comonotonically additive functionals in locally compact spaces, *Internat. J. Approx. Reason.* 54 (2013) 418–426.
- [9] J. Kawabe, The structural characteristics of Choquet functionals, *J. Nonlinear Convex Anal.* 16 (2015) 2181–2192.
- [10] J. Kawabe, Nonadditive measures and nonlinear integrals, *Sugaku Expositions* 34 (2021) 61–92.
- [11] J. Kawabe, The continuous Choquet integral representation theorems in an abstract setting, *Fuzzy Sets and Systems* 497 (2024) 109115 (20 pages).
- [12] J. Kawabe, A Riesz type theorem for the Sugeno integral on a locally compact space, submitted for publication.
- [13] J. Kawabe, The Greco and Riesz type theorems for the Shilkret and Sugeno integrals, in preparation.
- [14] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [15] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, *J. Math. Anal. Appl.* 75 (1980) 562–570.
- [16] D.A. Ralescu, M. Sugeno, Fuzzy integral representation, *Fuzzy Sets and Systems* 84 (1996) 127–133.
- [17] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, *Indag. Math.* 33 (1971) 109–116.
- [18] M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.
- [19] Z. Wang, G.J. Klir, *Generalized Measure Theory*, Springer, New York, 2009.

連絡先 河邊 淳

〒 380-8553 長野市若里 4-17-1 信州大学工学部 工学基礎部門

E-mail: jkawabe@shinshu-u.ac.jp