

堅非拡大型非線形写像に対する許容範囲を持つ縮小射影法

(A SHRINKING PROJECTION METHOD WITH ALLOWABLE RANGES FOR NONLINEAR MAPPINGS OF FIRMLY NONEXPANSIVE TYPE)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)

横浜国立大学 教育学部

(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

C を実バナッハ空間 E の空でない集合とし, T を C から E への写像とする. このとき, $Tp = p$ を満たす C の元 p を求める問題を不動点問題という. 特に, 非拡大写像に対する不動点近似法の研究は中心的なテーマの一つである. T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つことと定義する. 不動点近似法には様々な研究があるが, 2008 年に高橋-竹内-窪田 [26] がヒルベルト空間において提案した縮小射影法 (shrinking projection method) と呼ばれる近似法は強収束性を得るために有用な手法で, この提案以降多くの研究者によって様々な研究が行われた. 特に 2009 年に木村-高橋 [20] が集合列の収束の概念であるモスコ収束 (Mosco convergence) を用いたことにより, 縮小射影法の研究を進化させた.

この縮小射影法は点列を構成する際に距離射影 (metric projection) の正確な値を求める必要がある. しかし, 距離射影の正確な値を求めることは一般的に容易なことではない. そこでこの課題を解決すべく 2012 年に木村 [17] は測地距離空間において距離射影の値の計算に誤差を含んだ点列を構成する総和不可能誤差付きの縮小射影法 (shrinking projection method with nonsummable errors) を提案した ([18, 19] も参照). それ以来, この手法はヒルベルト空間やバナッハ空間で議論されてきた ([8–10, 12] 等を参照). これらの研究に動機づけられ, 2019 年に竹内 [29] は, 許容範囲を持つ縮小射影法 (shrinking projection method with allowable ranges) を提案した. 竹内 [29] はこの手法を用いて, 滑らかなバナッハ空間において (P) 型写像 (第 2 節を参照) の不動点への強収束定理を得ている.

定理 1.1 ([29]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間でカデック・クリー条件を満たすとする. C を E の空でない閉凸部分集合で, B を $F(B) := \{p \in C : Bp = p\}$ が空でないような C から E への (P) 型写像とする. $x_0 \in E$, $w_1 \in C$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = \{z \in C : \langle Bw_1 - z, J(w_1 - Bw_1) \rangle \geq 0\}$, $x_1 = P_{D_1}x_0$, $A_1 = C \setminus (D_1 \cup \{w_1\})$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle Bu_n - z, J(u_n - Bu_n) \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}}x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $P_{F(B)}x_0$ へ強収束する.

(2) ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in F(B)$ 又は $w_1 \in F(B)$ である.

ただし, P_K は E から E の空でない閉凸部分集合 K の上への距離射影 (第 2 節を参照) である.

一方, 堅非拡大写像 (firmly nonexpansive mapping) の研究は, 単調作用素の理論と密接に関連しており凸解析学においても中心的なテーマである. それゆえ, 堅非拡大写像に対する不動点近似法の研究は応用上も重要である. C を実バナッハ空間 E の空でない集合とし, T を C から E への写像とする. T が堅非拡大写像であるとは, 任意の C の元 x, y と非負の実数 t に対して

$$\|t(x - y) + (1 - t)(Tx - Ty)\| \geq \|Tx - Ty\|$$

が成り立つことである ([6] を参照). ここで, E が実ヒルベルト空間の場合, T が堅非拡大写像となる必要十分条件は, 任意の C の元 x, y に対し

$$\langle (x - Tx) - (y - Ty), Tx - Ty \rangle \geq 0$$

が成り立つことである. 実ヒルベルト空間において, この写像の重要な例として単調作用素から生成されるリゾルベントや距離射影があげられる. ヒルベルト空間におけるリゾルベントの概念をバナッハ空間上へ拡張した場合, 異なる複数のリゾルベントに拡張される. これらは, ヒルベルト空間のリゾルベントと同様に堅非拡大性を持ち, それらは (P) 型写像, (Q) 型写像, (R) 型写像と呼ばれる (第 2 節を参照).

本論文では, 竹内 [29] の手法を用いて, 茨木 [11] によって得られた, (Q) 型および (R) 型写像の不動点を求める近似法を紹介する. さらに, 得られた結果の応用として, 零点問題と均衡問題の解を求める近似法も扱う.

2. 準備

$\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ は順に正の整数全体の集合と実数全体の集合とする. E を実バナッハ空間とし, E^* を E の共役空間 (dual space) とする. 以降, 本論文ではバナッハ空間やヒルベルト空間はすべて実空間とする. E の元 x に対し, E^* の部分集合

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) と呼ぶ. なお, ヒルベルト空間においては J は恒等写像となる. E がカデック・クリー条件 (Kadec-Klee property) を満たすとは E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束し, $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ へ収束するときには, 常に $\{x_n\}$ が x に強収束することをいう.

堅非拡大型非線形写像. C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない部分集合とし, T を C から E への写像とする. このとき, T が (P) 型写像 (mapping of type (P)) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([3] を参照). 同様に, T が (Q) 型写像 (mapping of type (Q)) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\langle Tx - Ty, (Jx - JT x) - (Jy - JT y) \rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([3, 22] を参照). T が (R) 型写像 (mapping of type (R)) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\langle (x - Tx) - (y - Ty), JT x - JT y \rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([3, 15] を参照). T の不動点全体の集合を $F(T) = \{p \in C : p = Tp\}$ とする.

E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない部分集合とする. T を C から E への写像とし, JC の元 x^* に対し写像 T^* を

$$(2.1) \quad T^*x^* := JTJ^{-1}x^*$$

と定義する. このとき, $JF(T) = F(T^*)$ となる ([7, 27] を参照). また, (Q) 型写像と (R) 型写像に関して次の事実が知られている.

補助定理 2.1 ([3,7]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない部分集合とし, T を C から E への (R) 型写像とする. このとき, JC から E^* への写像を (2.1) のように定義すると, T^* は E^* 上で (Q) 型写像となる.

非線形射影. C を回帰的な狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, 任意の E の元 x に対し

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. このような C の元 x_0 を $P_C x$ で表し, P_C を E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す. ヒルベルト空間でも距離射影は同様に定義される ([24,25] 等を参照). なお, E^* から E^* の空でない閉凸部分集合 K^* の上への距離射影は $P_{K^*}^*$ で表すこととする.

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する ([1,13,16] を参照). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の閉凸部分集合とする. このとき, 任意の E の元 x に対し

$$V(x_0, x) = \min_{y \in C} V(y, x)$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. このような C の元 x_0 を $\Pi_C x$ で表し, Π_C を E から C の上への準距離射影 (generalized projection) と呼ぶ ([1] を参照). また, D を, JD が E^* の閉凸部分集合となる E の空でない部分集合とし, Π_{JD}^* を E^* から JD の上への準距離射影とする. E から D への写像 R_D を

$$R_D := J^{-1} \Pi_{JD}^* J$$

で定義するとき R_D をサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ ([13,21] を参照). 距離射影, 準距離射影, サニー準非拡大射影はヒルベルト空間で定義された距離射影のバナッハ空間での拡張概念である ([1,13,16] を参照). すなわち, これらの射影はヒルベルト空間では一致する.

3. 主結果

本節では許容範囲を持つ縮小射影法を用いた, (Q) 型写像及び (R) 型写像の不動点への強収束定理を示す. 竹内 [29] では距離射影を用いた手法であったが, ここでは準距離射影を用いた手法も紹介する. 2025 年に茨木 [11] は (Q) 型写像に関する次の二つの収束定理を証明した.

定理 3.1 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. C を E の空でない閉凸部分集合で, T を $F(T)$ が空でないような C から E への (Q) 型写像とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = C$, $x_1 = P_{D_1} x_0$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \{z \in D_n : \langle Tu_n - z, Ju_n - JT u_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}} x_0, \\ A_{n+1} &= \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $P_{F(T)} x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in F(T)$ となる.

定理 3.2 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. C を E の空でない閉凸部分集合で, T を $F(T)$ が空でない

いような C から E への (Q) 型写像とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = C$, $x_1 = \Pi_{D_1} x_0$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle Tu_n - z, Ju_n - JT u_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = \Pi_{D_{n+1}} x_0, \\ A_{n+1} = \{y \in D_n : V(y, x_0) \leq V(x_{n+1}, x_0), y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $\Pi_{F(T)} x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in F(T)$ となる.

ここで補助定理 2.1 より, 定理 3.1 と定理 3.2 の直接的な結果として, (R) 型写像の不動点への強収束定理を得ることができる.

定理 3.3 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. C を E の空でない閉凸部分集合で, T を $F(T)$ が空でないような C から E への (R) 型写像とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = C$, $x_1 = J^{-1} P_{JD_1}^* J x_0$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle u_n - T u_n, J T u_n - J z \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = J^{-1} P_{JD_{n+1}}^* J x_0, \\ A_{n+1} = \{y \in D_n : \|J x_0 - J y\| \leq \|J x_0 - J x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $J^{-1} P_{JF(T)}^* J x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in F(T)$ となる.

定理 3.4 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. C を E の空でない閉凸部分集合で, T を $F(T)$ が空でないような C から E への (R) 型写像とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = C$, $x_1 = R_{D_1} x_0$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle u_n - T u_n, J T u_n - J z \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = R_{D_{n+1}} x_0, \\ A_{n+1} = \{y \in D_n : V(x_0, y) \leq V(x_0, x_{n+1}), y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $R_{F(T)} x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in F(T)$ となる.

4. 応用

本節では主結果の応用を紹介する. 茨木 [11] で示された零点問題の解への近似法の他に, 均衡問題の解への近似法も扱うこととする.

零点問題. E をバナッハ空間とし, E^* を E の共役空間とし, 多価写像を $A \subset E \times E^*$ する. このとき, 零点問題 (zero point problem) とは,

$$0 \in Az$$

を満たす E の元 z を求める問題のことをいう. また, このような元 z のことを A の零点 (zero point) といい, A の零点全体の集合を $A^{-1}0$ と表す.

E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする. 多価写像 $A \subset E \times E^*$ に対して, A の定義域 (domain) と A の値域 (range) は

$$D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}, \quad R(A) = \cup \{Ax : x \in D(A)\}$$

で定義される. 多価写像 $A \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. なお, 双対写像 J は単調作用素であることが知られている. 単調作用素 A が極大 (maximal) であるとは, A を真に含む単調作用素 $A' \subset E \times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $A' \subset E \times E^*$ が単調作用素で, かつ $A \subset A'$ であるならば, $A = A'$ となるときをいう.

$A \subset E \times E^*, B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. このとき, 任意の $r > 0$ に対して

$$R(J + rA) = E^*, \quad R(I + rBJ) = E$$

となることが知られている ([5, 13, 23] を参照). また, 次の二つの写像が任意の $r > 0$ に対して定義されることもよく知られている.

$$Q_r = (J + rA)^{-1}J : E \rightarrow D(A),$$

$$R_r = (I + rBJ)^{-1} : E \rightarrow D(BJ).$$

これらの写像は順に (Q) 型リゾルベント (resolvent of type (Q)) と (R) 型リゾルベント (resolvent of type (R)) と呼ばれる. また, Q_r と R_r は順に (Q) 型写像と (R) 型写像であり, $F(Q_r) = A^{-1}0$ と $F(R_r) = (BJ)^{-1}0$ を満たすことも知られている ([3, 8, 10, 13] 等を参照). これらより, 定理 3.1, 定理 3.2, 定理 3.3 及び定理 3.4 の直接的な結果として次の四つの定理を得る.

定理 4.1 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. $A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とし, $r > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}, \{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E, x_1 = P_{D_1}x_0, u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle Q_ru_n - z, Ju_n - JQ_ru_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}}x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $P_{A^{-1}0}x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in A^{-1}0$ となる.

定理 4.2 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. $A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とし, $r > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}, \{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E, x_1 = \Pi_{D_1}x_0, u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle Q_ru_n - z, Ju_n - JQ_ru_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = \Pi_{D_{n+1}}x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : V(y, x_0) \leq V(x_{n+1}, x_0), y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in A^{-1}0$ となる.

定理 4.3 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とし, $r > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}, \{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E, x_1 = J^{-1}P_{JD_1}^*Jx_0, u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle u_n - R_ru_n, JR_ru_n - Jz \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = J^{-1}P_{JD_{n+1}}^*Jx_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|Jx_0 - Jy\| \leq \|Jx_0 - Jx_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $J^{-1}P_{B^{-1}0}^*Jx_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in (BJ)^{-1}0$ となる.

定理 4.4 ([11]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とし, $r > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E$, $x_1 = R_{D_1}x_0$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle u_n - R_r u_n, JR_r u_n - Jz \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = R_{D_{n+1}}x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : V(x_0, y) \leq V(x_0, x_{n+1}), y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}.$$

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in (BJ)^{-1}0$ となる.

均衡問題. E をバナッハ空間とし, E^* を E の共役空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数とする. このとき, 任意の C の元 y に対して

$$f(x_0, y) \geq 0$$

を満たす C の元 x_0 を求める問題を, f に関する均衡問題 (equilibrium problem) という. このとき, x_0 を均衡問題の解といい, 解全体の集合を $EP(f)$ で表す. ([4] を参照).

均衡問題の解への近似法を議論するために, f に次のような条件を設定する ([2, 4] を参照): E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする.

- (A1) 任意の C の元 x に対して, $f(x, x) = 0$ が成り立つ,
- (A2) 任意の C の元 x, y に対して, $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ が成り立つ,
- (A3) 任意の C の元 x, y, z に対して

$$\limsup_{t \downarrow 0} f(tz + (1-t)x, y) \leq f(x, y),$$

- (A4) 任意の C の元 x に対して, $f(x, \cdot)$ は下半連続な凸関数である.

このとき, E の任意の元 x と $\lambda > 0$ に対して

$$F_\lambda x := \left\{ z \in C : f(z, y) + \frac{1}{\lambda} \langle z - x, Jy - Jz \rangle \geq 0 \ (\forall y \in C) \right\}$$

を考える. f に (A1) から (A4) を仮定すると, F_λ は E から C への一価写像で, (Q) 型写像かつ $EP(f) = F(F_\lambda)$ を満たすことが知られている ([2, 4] を参照). これらより f に関する均衡問題の解は, F_λ の不動点に帰着することができる. したがって, 定理 3.1 および定理 3.2 の直接的な結果として次の二つの定理を得ることができる.

定理 4.5. E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. f を (A1) から (A4) および $EP(f) \neq \emptyset$ を満たす $C \times C$ 上で定義された実数値関数とし, $\lambda > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E$, $x_1 = P_{D_1}x_0$, $u_1 \in A_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle F_\lambda u_n - z, Ju_n - JF_\lambda u_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}}x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $P_{EP(f)}x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し, $u_{k-1} \in EP(f)$ となる.

定理 4.6. E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち、カデック・クリー条件を満たすとし、 C を E の空でない閉凸部分集合とする. f を (A1) から (A4) および $EP(f) \neq \emptyset$ を満たす $C \times C$ 上で定義された実数値関数とし、 $\lambda > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし、点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E$, $x_1 = \Pi_{D_1} x_0$, $u_1 \in A_1$ とし、 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle F_\lambda u_n - z, Ju_n - JF_\lambda u_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = \Pi_{D_{n+1}} x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : V(y, x_0) \leq V(x_{n+1}, x_0), y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき、次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し、 $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $\Pi_{EP(f)} x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し、 $u_{k-1} \in EP(f)$ となる.

次にバナッハ空間におけるもう一つの均衡問題を紹介する. E を滑らかなバナッハ空間とし、 E^* をその共役空間とする. C を JC が閉凸集合となるような空でない E の閉部分集合とし、 f^* を $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. このとき、任意の C の元 y に対して

$$f^*(Jx_0, Jy) \geq 0$$

を満たす C の元 x_0 を求める問題を、 f^* に関する均衡問題 (equilibrium problem) という. このとき、 x_0 をこの問題の解といい、解全体の集合を $EP(f^*)$ で表す (詳細は [4, 28] を参照).

均衡問題の解への近似法を議論するために、 f^* に次のような条件を設定する ([4, 28] を参照): E を回帰的な滑らかな狭義凸バナッハ空間とする.

- (B1) 任意の JC の元 x^* に対して、 $f^*(x^*, x^*) = 0$ が成り立つ、
- (B2) 任意の JC の元 x^*, y^* に対して、 $f^*(x^*, y^*) + f(y^*, x^*) \leq 0$ が成り立つ、
- (B3) 任意の JC の元 x^*, y^*, z^* に対して

$$\limsup_{t \downarrow 0} f^*(tz^* + (1-t)x^*, y^*) \leq f^*(x^*, y^*),$$

- (B4) 任意の JC の元 x^* に対して、 $f(x^*, \cdot)$ は下半連続な凸関数である.

このとき、 E の任意の元 x と $\lambda > 0$ に対して

$$F_\lambda^* x := \left\{ z \in C : f^*(Jz, Jy) + \frac{1}{\lambda} \langle z - x, Jy - Jz \rangle \geq 0 \ (\forall y \in C) \right\}$$

を考える. f^* に (B1) から (B4) を仮定すると、 F_λ^* は E から C への一価写像で、(R) 型写像かつ $EP(f^*) = F(F_\lambda^*)$ を満たすことが知られている ([4, 28] を参照). これらより f^* に関する均衡問題の解は、 F_λ^* の不動点に帰着することができる. したがって、定理 3.3 および定理 3.4 の直接的な結果として次の二つの定理を得ることができる.

定理 4.7. E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち、カデック・クリー条件を満たすとし、 C を E の空でない閉凸部分集合とする. f^* を (B1) から (B4) および $EP(f^*) \neq \emptyset$ を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とし、 $\lambda > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし、点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E$, $x_1 = J^{-1} P_{JD_1}^* Jx_0$, $u_1 \in A_1$ とし、 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{n+1} = \{z \in D_n : \langle u_n - F_\lambda^* u_n, JF_\lambda^* u_n - Jz \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = J^{-1} P_{JD_{n+1}}^* Jx_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|Jx_0 - Jy\| \leq \|Jx_0 - Jx_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき、次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し、 $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $J^{-1} P_{JEP(f^*)}^* Jx_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し、 $u_{k-1} \in EP(f^*)$ となる.

定理 4.8. E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち、カデック・クリー条件を満たすとし、 C を E の空でない閉凸部分集合とする. f^* を (B1) から (B4) および $EP(f^*) \neq \emptyset$ を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とし、 $\lambda > 0$ とする. $x_0 \in E$ とし、点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = A_1 = E$, $x_1 = R_{D_1}x_0$, $u_1 \in A_1$ とし、 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \{z \in D_n : \langle u_n - F_\lambda^* u_n, JF_\lambda^* u_n - Jz \rangle \geq 0\}, & x_{n+1} &= R_{D_{n+1}}x_0, \\ A_{n+1} &= \{y \in D_n : V(x_0, y) \leq V(x_0, x_{n+1}), y \neq u_n\}, & u_{n+1} &\in A_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき、次のいずれかが成立する.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ が成立し、 $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $R_{EP(f^*)}x_0$ へ強収束する.
- (2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ が成立し、 $u_{k-1} \in EP(f^*)$ となる.

5. 考察

本節では許容範囲を持つ縮小射影法に関する考察を行う. 定理 3.1 において、点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{A_n\}$ は以下のような手順で生成される. まず、 $D_1 = A_1 = C (\neq \emptyset)$ であるから D_1 と A_1 は空集合でない. それゆえ、 A_1 から u_1 が選択でき、 D_2 を生成できる. D_2 が空でない閉凸集合となることも容易に確認でき、 x_2 と A_2 が生成できる. ただし、 A_2 は空集合になる可能性がある. ここで、 $A_2 \neq \emptyset$ とすると、 A_2 から u_2 が選択でき、 D_3 を生成できる. D_2 の時と同様に、 D_3 が空でない閉凸集合となることも容易に確認でき、 x_3 と A_3 が生成できる. ここでも A_3 は空集合になる可能性がある. 以下同様にこの手順を進めていくと、次の二つのケースのいずれかになることが分かる.

- (i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \neq \emptyset$ となる,
- (ii) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $A_k = \emptyset$ となる.

この手順では各ステップで A_n が空集合か否かを判定する必要があるが、このことは困難ではないかという疑問が出てくることが予想される. そこで (ii) の場合を考える. まず、集合列 $\{K_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$K_1 = C, \quad K_{n+1} = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|\}$$

で定義する. このとき $A_{n+1} = K_{n+1} \setminus \{u_n\}$ となることは容易に分かる. 先の手順から、ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して、 u_{k-1} , D_k , x_k , x_{k-1} および A_k が生成されていることが分かり、 $x_{k-1}, x_k \in K_k$ より $K_k \neq \emptyset$ も得る. しかし $K_k \setminus \{u_{k-1}\} = A_k = \emptyset$ であるため、 K_k は u_{k-1} の一点集合であることも分かる. これより $u_{k-1} = x_{k-1} = x_k$ となり、 $u_{k-1} = x_k \in D_k$ であることから

$$\langle Tu_{k-1} - u_{k-1}, Ju_{k-1} - JT u_{k-1} \rangle \geq 0$$

を得るが、双対写像 J は単調作用素であるので

$$\langle Tu_{k-1} - u_{k-1}, Ju_{k-1} - JT u_{k-1} \rangle \leq 0$$

である. したがって

$$\langle Tu_{k-1} - u_{k-1}, Ju_{k-1} - JT u_{k-1} \rangle = 0$$

となり、 E が狭義凸なので $Tu_{k-1} = u_{k-1}$ である. すなわち、定理 3.1 の結論 (2) となる.

ここで定理 3.1 において、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n を K_n に置き換えることを考える. いま $A_k = \emptyset$ であるが $K_k = \{u_{k-1}\}$ であるため、 K_k からは u_k として u_{k-1} のみを選択でき、 D_{k+1} が生成できる. $u_k = u_{k-1} \in F(T)$ より、任意の $z \in D_k$ に対して

$$\langle Tu_k - z, Ju_k - JT u_k \rangle = \langle u_k - z, Ju_k - Ju_k \rangle = \langle u_k - z, 0 \rangle = 0.$$

これより $D_{k+1} = D_k$ となり

$$x_{k+1} = P_{D_{k+1}}x_0 = P_{D_k}x_0 = x_k$$

を得る. したがって K_{k+1} が生成でき, $x_{k+1}, x_k \in K_{k+1}$ となるため $K_{k+1} \neq \emptyset$ である. $x_{k+1} = x_k$ と $x_k = P_{D_k} x_0$ の一意性より,

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \{y \in D_k : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{k+1}\|\} \\ &= \{y \in D_k : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_k\|\} = \{x_k\} = \{u_{k-1}\}. \end{aligned}$$

よって K_{k+1} から u_{k+1} として u_{k-1} のみを選択できる. この操作を繰り返せば, $n \geq k$ に対して

$$D_n = D_k, K_n = \{u_{k-1}\}, x_n = u_n = u_{k-1}$$

を得る. これらの議論より定理 3.1 において, A_n を K_n に置き換えることで以下を得る.

定理 5.1. E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. C を E の空でない閉凸部分集合で, T を $F(T)$ が空でないような C から E への (Q) 型写像とする. $x_0 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ と集合列 $\{D_n\}$, $\{K_n\}$ を次のように生成する: $D_1 = K_1 = C$, $x_1 = P_{D_1} x_0$, $u_1 \in K_1$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \{z \in D_n : \langle Tu_n - z, Ju_n - JT u_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}} x_0, \\ K_{n+1} &= \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|\}, \quad u_{n+1} \in K_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ と $\{u_n\}$ は $P_{F(T)} x_0$ へ強収束する.

定理 5.1 では, 各ステップにおいて u_n として u_{n-1} の選択を認めることで, 定理 3.1 の結論のうち, (1) に対応する結果のみが得られる. この違いは, 各ステップで A_n が空集合か否かの判定を不要とする点にある. しかしながら, これまでの議論のとおり途中で不動点 (= 解) へ到達しても, 手順は終了せず途中のステップから点列 $\{u_n\}$ は不動点の一点繰り返し点列となる.

一方, 定理 3.1 の主張は, 有限回のステップで不動点へ到達した場合は途中で終了し, そうでない場合は不動点へ強収束するような点列が構成されるということである. このことは点列 $\{u_n\}$ の不動点への挙動がより詳細に把握できる結論と考えられる.

すなわち, 定理 5.1 は点列の構成の容易さが優先され, 定理 3.1 は点列の挙動の詳細な把握を優先していると考えられる. 定理 3.2, 定理 3.3, 及び定理 3.4 や定理 1.1(竹内 [29]) もこの議論と同様である.

また, 定理 1.1 と定理 3.1 では結論 (2) の挙動に少し違いがあるが, 初期集合 A_1 の設定の仕方による. 前者は A_1 を空集合か否かを確認する必要があるが, w_1 の選択の仕方によっては $n = 1$ で手順は終了する. 後者では必ず $n = 2$ まで進むが, A_1 は C とするだけでよい.

ここまで許容範囲を持つ縮小射影法に関して, 点列の構成の容易さと不動点への挙動の把握という異なる観点から考察した. より詳細については, 竹内 [29] 及び茨木 [11] を参照されたい.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 23K25512, 24K06807 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.
- [2] K. Aoyama, Y. Kimura and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal., **15** (2008), 395–409.
- [3] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal., **10** (2009), 131–147.
- [4] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student, **63** (1994), 123–145.
- [5] F. E. Browder, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann., **175** (1968), 89–113.
- [6] R. E. Bruck, *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math., **47** (1973), 341–355.
- [7] T. Honda, T. Ibaraki and W. Takahashi, *Duality theorems and convergence theorems for nonlinear mappings in Banach spaces and applications*, Int. J. Math. Stat., **6** (2010), 46–64.

- [8] T. Ibaraki, *Approximation of zero point of monotone operators with nonsummable errors*, Fixed Point Theory Appl., **2016**:48 (2016), 14 pages.
- [9] T. Ibaraki, *Iterative approximation with errors of zero points of maximal monotone operators in a Hilbert space*, Linear Nonlinear Anal., **3** (2017), 171–178.
- [10] T. Ibaraki, *Iterative approximation with errors of zero points of monotone operators in a Banach space*, Yokohama Math. J., **63** (2017), 91–109.
- [11] T. Ibaraki, *Shrinking projection method with allowable ranges for nonlinear mappings of firmly nonexpansive type*, Appl. Anal. Discrete Math., **19** (2025), 559–576.
- [12] T. Ibaraki and Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of generalized firmly nonexpansive mappings with nonsummable errors*, Linear Nonlinear Anal., **2** (2016), 301–310.
- [13] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory, **149** (2007), 1–14.
- [14] T. Ibaraki and S. Saejung, *On shrinking projection method for cutter type mappings with nonsummable errors*, J. Inequal. Appl., **2023**:92 (2023), 20 pages.
- [15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **10** (2009), 21–32.
- [16] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.
- [17] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2012, 157–164.
- [18] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan), (L. Maligranda, M. Kato, and T. Suzuki eds.), 2014, 303–311.
- [19] Y. Kimura, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal., **15** (2014), 429–436.
- [20] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **357** (2009), 356–363.
- [21] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **8** (2007), 197–209.
- [22] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim., **19** (2008), 824–835.
- [23] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 75–88.
- [24] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
- [25] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.
- [26] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 276–286.
- [27] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Nonlinear operators of monotone type and convergence theorems with equilibrium problems in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 787–818.
- [28] W. Takahashi and K. Zembayashi, *A strong convergence theorem for the equilibrium problem with a bifunction defined on the dual space of a Banach space*, in Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, 2008, 83–93.
- [29] Y. Takeuchi, *Shrinking projection method with allowable ranges*, J. Nonlinear Anal. Optim., **10**(2019), 83–94.