

# 測地距離空間の幾何学的性質と 凸関数のリゾルベント

東邦大学・理学部 木村泰紀

Yasunori Kimura

Department of Information Science

Faculty of Science

Toho University

## 概要

本稿では、曲率上界をもつ完備測地距離空間上の真凸下半連続関数に対するリゾルベント作用素を考察する。曲率上限の符号に応じた摂動関数を導入し、対応する最小化問題が一意解をもつことを示すことにより、リゾルベント作用素を定義する。さらに、得られたリゾルベント作用素が曲率を反映した非伸長型不等式を満たすことを示し、正曲率の場合と負曲率の場合を統一的な観点から整理する。

## 1 序論

測地距離空間上の凸解析は、ヒルベルト空間やバナッハ空間における凸解析を、線形構造をもたない空間へ拡張する研究として発展してきた。特に、有限な曲率上界をもつ  $\text{CAT}(\kappa)$  空間では、空間の幾何学的性質を利用することにより、凸関数の最小化問題やそのリゾルベント作用素を考察することができる。一方で、曲率上限  $\kappa$  の符号によって距離関数のみならず性質が異なるため、正曲率の場合と非正曲率の場合では異なる定式化や議論が必要となる。

ヒルベルト空間における凸関数のリゾルベント作用素は、関数に距離の 2 乗を摂動項として加えた最小化問題の一意解によって定義され、非伸長性に関連する重要な性質をもつ。 $\text{CAT}(\kappa)$  空間では、距離の 2 乗に代わって空間の曲率を反映する関数  $c_\kappa$  を用いることで、曲率上限の異なる空間を統一的に扱うことが期待される。本稿では、曲率上限が正の場合と負の場合のそれぞれについて適切な目的関数を導入し、その最小点の存在と一意性を示すことにより、凸関数のリゾルベント作用素を定義する。

本稿の構成は次のとおりである。第 2 節では、 $\text{CAT}(\kappa)$  空間および関数  $c_\kappa$  を導入し、後の議論で

---

2020 *Mathematics Subject Classification*. Primary 53C23; Secondary 47H09, 49J52.

*Key words and phrases*.  $\text{CAT}(\kappa)$  space, geodesic space, convex function, resolvent operator, nonspreading mapping.

中心的に用いる既知の結果を述べる．第 3 節および第 4 節では，それぞれ曲率上限が正の場合と負の場合について，リゾルベント作用素を定義する最小化問題が一意の解をもつことを示す．最後に第 5 節では，得られたリゾルベント作用素が  $c_\kappa$  を用いて表される非伸長型の不等式を満たすことを示す．

本稿は，Kajimura–Kimura–Kohsaka [2] の結果を基礎として，その後の発展も踏まえて若干の拡張を加えたものである．また，証明を改めて与えるとともに，曲率上限の符号による場合分けを統一的な観点から整理した．

## 2 準備

$X$  を測地距離空間とする．本稿を通して，任意の 2 点を結ぶ測地線がつねに一意的に定められると仮定する．このとき  $x, y \in X$  と  $t \in [0, 1]$  に対して， $x$  と  $y$  の凸結合  $tx \oplus (1-t)y$  が，測地線を  $(1-t):t$  に内分する点として自然に定義される．

$\kappa \in \mathbb{R}$  に対して，

$$D_\kappa = \begin{cases} \pi/\sqrt{\kappa} & (\kappa > 0), \\ \infty & (\kappa \leq 0) \end{cases}$$

と定義する．

$\text{CAT}(\kappa)$  空間の定義について，通常は測地三角形とモデル空間上の比較三角形との間に不等式を用いた距離の関係をj用いて定義される．本稿では Kajimura–Kimura [3] にしたがひ，認容的  $\text{CAT}(\kappa)$  空間を以下のような不等式をみたす空間として扱う [3, 5]．この条件は通常の比較三角形による定義と同値である．

測地距離空間  $X$  が認容的  $\text{CAT}(\kappa)$  空間であるとは，任意の  $x, y \in X$  が  $d(x, y) < D_\kappa/2$  をみたし，さらに不等式

$$\begin{aligned} c_\kappa(d(tx \oplus (1-t)y, z))c'_\kappa(d(x, y)) \\ \leq c'_\kappa(td(x, y))c_\kappa(d(x, z)) + c'_\kappa((1-t)d(x, y))c_\kappa(d(y, z)) \\ - c'_\kappa(td(x, y))c_\kappa((1-t)d(x, y)) - c'_\kappa((1-t)d(x, y))c_\kappa(td(x, y)) \end{aligned}$$

をみたすことをいう．ここで， $c_\kappa: [0, D_\kappa/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$\begin{aligned} c_\kappa(t) &= \frac{t^2}{2} - \frac{\kappa t^4}{24} + \frac{\kappa^2 t^6}{720} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \kappa^{n-1} t^{2n}}{(2n)!} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\kappa} (1 - \cos(\sqrt{\kappa}t)) & (\kappa > 0); \\ \frac{1}{2} t^2 & (\kappa = 0); \\ \frac{1}{-\kappa} (\cosh(\sqrt{-\kappa}t) - 1) & (\kappa < 0), \end{cases} \end{aligned}$$

で定義される．このとき，

$$(2.1) \quad c''_\kappa(t) = 1 - \kappa c_\kappa(t)$$

が成り立つ. さらに, 次が成立する:

- $\kappa > 0$  のとき  $0 \leq c_\kappa(t) \leq 1/\kappa$ ,  $0 \leq c_\kappa''(t) \leq 1$ ;
- $\kappa \leq 0$  のとき  $0 \leq c_\kappa(t)$ ,  $1 \leq c_\kappa''(t)$ .

関数  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  に対し,  $f$  が真であるとは,  $f(x) \in \mathbb{R}$  をみたす  $x \in X$  が存在することをいう. また, 任意の  $x, y \in X$  と  $t \in ]0, 1[$  に対し  $f(tx \oplus (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$  が成り立つとき  $f$  を凸という. さらに,  $f$  を下半連続であるとは, 任意の収束点列  $\{x_n\} \subset X$  に対して  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  が成り立つことをいう.

次の定理は, 本稿において中心的な役割を果たす定理であり, 以後の議論で繰り返し用いられる.

**定理 2.1** (Kajimura–Kimura [3]).  $X$  を認容的な  $\text{CAT}(\kappa)$  空間,  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  を真凸な下半連続関数とし,  $\phi: [0, c_\kappa(D_\kappa/2)[ \rightarrow [0, \infty[$  を微分可能な単調増加関数とする. 各  $p \in X$  に対して

$$Tp = \operatorname{argmin}_{y \in X} (f(y) + \phi(c_\kappa(d(y, p))))$$

として一価関数  $T: X \rightarrow X$  が定義できると仮定するとき, 任意の  $x, y \in X$  に対して

$$\begin{aligned} & (\phi'(K_x)K_x + \phi'(K_y)K_y)c_\kappa''(d(Tx, Ty)) + (\phi'(K_x) + \phi'(K_y))c_\kappa(d(Tx, Ty)) \\ & \leq \phi'(K_y)c_\kappa(d(Tx, y)) + \phi'(K_x)c_\kappa(d(x, Ty)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし,  $z \in X$  に対して  $K_z = c_\kappa(d(Tz, z))$  とする.

### 3 空間の曲率上限が正の場合の凸関数のリゾルベント

本節では, 空間の曲率上限が正の場合を扱う. まず, リゾルベント作用素の定義に必要となる最小点の存在と一意性を示すため, Kimura–Kohsaka による結果を準備する. これらを用いて, 本稿で扱うリゾルベント作用素が適切に定義されることを示す.

**定理 3.1** (Kimura–Kohsaka [4]).  $\kappa \in ]0, \infty[$  とする. 認容的な完備  $\text{CAT}(\kappa)$  空間  $X$  上で定義された, 真凸な下半連続関数  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  は  $\inf_{y \in X} f(y) > -\infty$  をみたす.

**定理 3.2** (Kimura–Kohsaka [4]).  $\kappa \in ]0, \infty[$  とする.  $X$  を認容的な完備  $\text{CAT}(\kappa)$  空間,  $g: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  が真凸な下半連続関数であるとし,  $p \in X$  とする.  $d(x_n, p) \rightarrow D_\kappa/2$  をみたす任意の点列  $\{x_n\} \subset X$  に対し  $g(x_n) \rightarrow \infty$  が成り立つと仮定する. このとき,  $g$  は最小値をもつ. さらに  $x \neq y$  をみたす任意の  $x, y \in X$  に対して

$$g\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y)$$

であるならば,  $g$  の最小点は一意である.

以下では, 上記の結果を用いて, 本稿で導入する目的関数が一意の最小点をもつことを示す.

**定理 3.3.**  $\kappa \in ]0, \infty[$  とする.  $X$  を認容的な完備  $\text{CAT}(\kappa)$  空間,  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  が真凸な下半連続関数であるとし,  $s \in [0, 1[$  とする.  $p \in X$  に対し,  $g_p: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  を

$$g_p(x) = f(x) + \frac{1}{\kappa} (s(1 - \cos(\sqrt{\kappa}d(x, p))) + (1 - s)(-\log \cos(\sqrt{\kappa}d(x, p))))$$

で定義するとき,  $g_p$  は一意の最小点をもつ.

**証明.** まず,  $g_p$  が凸であることを示す.  $u, v \in X$  と  $t \in ]0, 1[$  に対し,  $u \neq v$  を仮定すると,

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & \cos(\sqrt{\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \\ & \geq \frac{\sin(t\sqrt{\kappa}d(u, v))}{\sin(\sqrt{\kappa}d(u, v))} \cos(\sqrt{\kappa}d(u, p)) + \frac{\sin((1-t)\sqrt{\kappa}d(u, v))}{\sin(\sqrt{\kappa}d(u, v))} \cos(\sqrt{\kappa}d(v, p)) \\ & > t \cos(\sqrt{\kappa}d(u, p)) + (1-t) \cos(\sqrt{\kappa}d(v, p)). \end{aligned}$$

よって,  $u = v$  の場合も含め,

$$\cos(\sqrt{\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \geq t \cos(\sqrt{\kappa}d(u, p)) + (1-t) \cos(\sqrt{\kappa}d(v, p)).$$

このことから,

$$s(1 - \cos(\sqrt{\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p))) \leq ts(1 - \cos(\sqrt{\kappa}d(u, p))) + (1-t)s(1 - \cos(\sqrt{\kappa}d(v, p))).$$

さらに, 対数関数が単調増加な凹関数であることから,

$$\log \cos(\sqrt{\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \geq t \log \cos(\sqrt{\kappa}d(u, p)) + (1-t) \log \cos(\sqrt{\kappa}d(v, p)),$$

すなわち

$$\begin{aligned} & (1-s)(-\log \cos(\sqrt{\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p))) \\ & \leq t(1-s)(-\log \cos(\sqrt{\kappa}d(u, p))) + (1-t)(1-s)(-\log \cos(\sqrt{\kappa}d(v, p))). \end{aligned}$$

以上と  $f$  の凸性を合わせると,

$$g_p(tu \oplus (1-t)v) \leq tg_p(u) + (1-t)g_p(v)$$

が成り立つ. よって,  $g_p$  は凸関数である. さらに,  $f$  が真であることから  $g_p$  も真であることがわかる. また,  $f$  は下半連続であることから,  $g_p$  も下半連続であることが導かれる.

点列  $\{x_n\} \subset X$  が  $n \rightarrow \infty$  で  $d(x_n, p) \rightarrow D_\kappa/2 = \pi/(2\sqrt{\kappa})$  をみたすと仮定する. このとき,  $\cos \sqrt{\kappa}d(x_n, p) \rightarrow 0$  より

$$(1-s)(-\log \cos(\sqrt{\kappa}d(x_n, p))) \rightarrow \infty.$$

さらに, 定理 3.1 より  $f$  は下に有界であることを用いると  $g_p(x_n) \rightarrow \infty$  が得られる. したがって, 定理 3.2 より  $g_p$  は最小点  $q \in X$  をもつ. 最小点の一意性を示すために  $q_1, q_2 \in X$  が

$$g_p(q_1) = g_p(q_2) = \inf_{x \in X} g_p(x)$$

をみたすとする. このとき, もし  $q_1 \neq q_2$  ならば, (3.1) で  $u = q_1, v = q_2, t = 1/2$  とすることで,

$$\cos \left( \sqrt{\kappa} d \left( \frac{1}{2} q_1 \oplus \frac{1}{2} q_2, p \right) \right) > \frac{1}{2} \cos(\sqrt{\kappa} d(q_1, p)) + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{\kappa} d(q_2, p)).$$

対数関数が狭義増加な凹関数であることから

$$\begin{aligned} \log \cos \left( \sqrt{\kappa} d \left( \frac{1}{2} q_1 \oplus \frac{1}{2} q_2, p \right) \right) &> \log \left( \frac{1}{2} \cos(\sqrt{\kappa} d(q_1, p)) + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{\kappa} d(q_2, p)) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \log \cos(\sqrt{\kappa} d(q_1, p)) + \frac{1}{2} \log \cos(\sqrt{\kappa} d(q_2, p)). \end{aligned}$$

$s < 1$  より

$$\begin{aligned} - (1-s) \log \cos \left( \sqrt{\kappa} d \left( \frac{1}{2} q_1 \oplus \frac{1}{2} q_2, p \right) \right) \\ < -\frac{1}{2} (1-s) \log \cos(\sqrt{\kappa} d(q_1, p)) - \frac{1}{2} (1-s) \log \cos(\sqrt{\kappa} d(q_2, p)) \end{aligned}$$

であり, よって

$$g_p \left( \frac{1}{2} q_1 \oplus \frac{1}{2} q_2 \right) < \frac{1}{2} g_p(q_1) + \frac{1}{2} g_p(q_2) = \inf_{x \in X} g_p(x) \leq g_p \left( \frac{1}{2} q_1 \oplus \frac{1}{2} q_2 \right)$$

となり矛盾. したがって  $q_1 = q_2$  となり, 最小点は一意であることが示された.  $\square$

$\kappa \in ]0, \infty[$  とするとき, 完備  $\text{CAT}(\kappa)$  空間  $X$  上の真凸な下半連続関数  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  に対し,  $f$  のリゾルベント作用素  $R_f: X \rightarrow X$  を,  $x \in X$  に対し

$$\begin{aligned} R_f x &= \operatorname{argmin}_{y \in X} g_x(y) \\ &= \operatorname{argmin}_{y \in X} \left( f(y) + \frac{1}{\kappa} (s(1 - \cos(\sqrt{\kappa} d(y, x))) + (1-s)(-\log \cos(\sqrt{\kappa} d(y, x)))) \right) \end{aligned}$$

で定義する.

## 4 空間の曲率上限が負の場合の凸関数のリゾルベント

本節では, 空間の曲率上限が負の場合を扱う. なお, 曲率上限  $\kappa = 0$  の場合, 摂動項は  $\kappa \rightarrow 0$  のときの極限として  $d(x, p)^2/2$  となる. したがって, この場合のリゾルベント作用素は通常の完備  $\text{CAT}(0)$  空間上のリゾルベント作用素 [1] に一致する.

空間の曲率上限が負の場合は, 次に示す  $\text{CAT}(0)$  空間上の凸関数に関する結果を利用し, 前節と同様にリゾルベント作用素の定義に必要な最小点の存在と一意性を示す.

**定理 4.1** (Mayer [6]).  $X$  を完備  $\text{CAT}(0)$  空間とし,  $g: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  が真凸な下半連続関数とする. このとき, ある  $C \in [0, \infty[$  が存在して, 任意の  $p \in X$  と  $d(x_n, p) \rightarrow \infty$  をみたす  $\{x_n\} \subset X$  に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n)}{d(x_n, p)} \geq -C.$$

**定理 4.2** (Mayer [6]).  $X$  を完備 CAT(0) 空間,  $g: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  が真凸な下半連続関数であるとし,  $p \in X$  とする.  $d(x_n, p) \rightarrow \infty$  をみたす任意の点列  $\{x_n\} \subset X$  に対し  $g(x_n) \rightarrow \infty$  が成り立つと仮定する. このとき,  $g$  は最小値をもつ. さらに  $x \neq y$  をみたす任意の  $x, y \in X$  に対して

$$g\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y)$$

であるならば,  $g$  の最小点は一意的である.

前節と同様に, 上記の結果を用いて本稿で用いる目的関数  $g_p$  が一意の最小点をもつことを示す. これにより, 曲率上限が負の場合についてもリゾルベント作用素を一価写像として定義することができる.

**定理 4.3.**  $\kappa \in ]-\infty, 0[$  とする.  $X$  を完備 CAT( $\kappa$ ) 空間,  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  が真凸な下半連続関数であるとし,  $s \in ]0, 1[$  とする.  $p \in X$  に対し,  $g_p: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  を

$$g_p(x) = f(x) + \frac{1}{-\kappa}(s(\cosh(\sqrt{-\kappa}d(x, p)) - 1) + (1 - s)(\log(\cosh(\sqrt{-\kappa}d(x, p))))))$$

で定義するとき,  $g_p$  は一意の最小点をもつ.

**証明.** まず,  $g_p$  が凸であることを示す.  $u, v \in X$  と  $t \in ]0, 1[$  に対し,  $u \neq v$  を仮定すると,

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & \cosh(\sqrt{-\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \\ & \leq \frac{\sinh(t\sqrt{-\kappa}d(u, v))}{\sinh(\sqrt{-\kappa}d(u, v))} \cosh(\sqrt{-\kappa}d(u, p)) \\ & \quad + \frac{\sinh((1-t)\sqrt{-\kappa}d(u, v))}{\sinh(\sqrt{-\kappa}d(u, v))} \cosh(\sqrt{-\kappa}d(v, p)) \\ & < t \cosh(\sqrt{-\kappa}d(u, p)) + (1-t) \cosh(\sqrt{-\kappa}d(v, p)). \end{aligned}$$

よって,  $u = v$  の場合も含め,

$$\cosh(\sqrt{-\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \leq t \cosh(\sqrt{-\kappa}d(u, p)) + (1-t) \cosh(\sqrt{-\kappa}d(v, p)).$$

このことから,

$$s(\cosh(\sqrt{-\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) - 1) \leq ts(\cosh(\sqrt{-\kappa}d(u, p)) - 1) + (1-t)s(\cosh(\sqrt{-\kappa}d(v, p)) - 1)$$

が成り立つ. また,  $\kappa < 0$  のとき, CAT( $\kappa$ ) 空間は CAT(0) 空間であり, 距離関数は凸であるから

$$d(tu \oplus (1-t)v, p) \leq td(u, p) + (1-t)d(v, p).$$

さらに,  $\log \cosh$  は  $[0, \infty[$  上で単調増加な凸関数であることから,

$$\log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \leq t \log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(u, p)) + (1-t) \log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(v, p)),$$

すなわち

$$\begin{aligned}
& (1-s) \log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(tu \oplus (1-t)v, p)) \\
& \leq t(1-s) \log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(u, p)) + (1-t)(1-s) \log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(v, p)).
\end{aligned}$$

以上と  $f$  の凸性を合わせると,

$$g_p(tu \oplus (1-t)v) \leq tg_p(u) + (1-t)g_p(v)$$

が成り立つ. よって,  $g_p$  は凸関数である. さらに,  $f$  が真であることから  $g_p$  も真であることがわかる. また,  $f$  は下半連続であることから,  $g_p$  も下半連続であることが導かれる.

点列  $\{x_n\} \subset X$  が  $n \rightarrow \infty$  で  $d(x_n, p) \rightarrow D_\kappa = \infty$  をみたすと仮定する. このとき, 定理 4.1 より, ある  $C \in [0, \infty[$  が存在して

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g_p(x_n)}{d(x_n, p)} \\
& \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{d(x_n, p)} + s \frac{1}{-\kappa} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh(\sqrt{-\kappa}d(x_n, p)) - 1}{d(x_n, p)} \\
& \quad + (1-s) \frac{1}{-\kappa} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \cosh(\sqrt{-\kappa}d(x_n, p))}{d(x_n, p)} \\
& \geq -C + s \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh(\sqrt{-\kappa}d(x_n, p)) - 1}{\sqrt{-\kappa}d(x_n, p)} \\
& = \infty
\end{aligned}$$

であることから,  $g_p(x_n) \rightarrow \infty$  を得る. 一般に,  $\kappa < 0$  のとき,  $\text{CAT}(\kappa)$  空間は  $\text{CAT}(0)$  空間でもあるので, 定理 4.2 より  $g_p$  は最小点  $q \in X$  をもつ. 最小点の一意性を示すために  $q_1, q_2 \in X$  が

$$g_p(q_1) = g_p(q_2) = \inf_{x \in X} g_p(x)$$

をみたすとする. このとき, もし  $q_1 \neq q_2$  ならば, (4.1) で  $t = 1/2$  とすることで,

$$\cosh\left(\sqrt{-\kappa}d\left(\frac{1}{2}q_1 \oplus \frac{1}{2}q_2, p\right)\right) < \frac{1}{2} \cosh(\sqrt{-\kappa}d(q_1, p)) + \frac{1}{2} \cosh(\sqrt{-\kappa}d(q_2, p)).$$

$s > 0$  より

$$\begin{aligned}
& s \left( \cosh\left(\sqrt{-\kappa}d\left(\frac{1}{2}q_1 \oplus \frac{1}{2}q_2, p\right)\right) - 1 \right) \\
& < \frac{1}{2} s (\cosh(\sqrt{-\kappa}d(q_1, p)) - 1) + \frac{1}{2} s (\cosh(\sqrt{-\kappa}d(q_2, p)) - 1)
\end{aligned}$$

であるから,

$$g_p\left(\frac{1}{2}q_1 \oplus \frac{1}{2}q_2\right) < \frac{1}{2}g_p(q_1) + \frac{1}{2}g_p(q_2) = \inf_{x \in X} g_p(x) \leq g_p\left(\frac{1}{2}q_1 \oplus \frac{1}{2}q_2\right)$$

となり矛盾. したがって  $q_1 = q_2$  となり, 最小点は一意であることが示された.  $\square$

## 5 リゾルベント作用素の非伸長性

前節までの結果を用いることで、任意の  $\kappa \in \mathbb{R}$  に対してリゾルベント作用素が一価写像として定義される。本節では、そのリゾルベント作用素が  $c_\kappa$  を用いた意味で非伸長性をもつことを示す。

**定理 5.1.**  $\kappa \in \mathbb{R}$  とする。認容的完備  $\text{CAT}(\kappa)$  空間  $X$  上の真凸な下半連続関数  $f: X \rightarrow ]-\infty, \infty]$  に対して定義されたリゾルベント作用素  $R_f: X \rightarrow X$  は次の性質をもつ: 任意の  $x, y \in X$  に対して

$$c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \leq \frac{1}{2}c_\kappa(d(R_fx, y)) + \frac{1}{2}c_\kappa(d(x, R_fy)).$$

**証明.**  $\phi(a) = sa - (1-s)(\log(1-\kappa a))/\kappa$  とすると  $\phi'(a) = s + (1-s)/(1-\kappa a)$  である。(2.1) より、定理 2.1 を適用して得られた式を整理すると、 $x, y \in X$  に対して

$$\begin{aligned} & (s(c''_\kappa(d(R_fx, x)) + c''_\kappa(d(R_fy, y)))) + 2(1-s)c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ & + s(c_\kappa(d(R_fx, x)) + c_\kappa(d(R_fy, y))) + (1-s) \left( \frac{c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ & \leq s(c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) + (1-s) \left( \frac{c_\kappa(d(x, R_fy))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fx, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} f_1 &= (c''_\kappa(d(R_fx, x)) + c''_\kappa(d(R_fy, y)))c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ &+ (c_\kappa(d(R_fx, x)) + c_\kappa(d(R_fy, y))) \\ &- (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))), \\ f_2 &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ &+ \left( \frac{c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &- \left( \frac{c_\kappa(d(x, R_fy))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fx, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \end{aligned}$$

とすれば、 $sf_1 + (1-s)f_2 \leq 0$  が得られる。

$\kappa > 0$  のとき、(2.1) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} f_1 &= (2 - \kappa c_\kappa(d(R_fx, x)) - \kappa c_\kappa(d(R_fy, y)))c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ &+ (c_\kappa(d(R_fx, x)) + c_\kappa(d(R_fy, y))) \\ &- (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))), \\ &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ &+ (c_\kappa(d(R_fx, x)) + c_\kappa(d(R_fy, y)))(1 - \kappa c_\kappa(d(R_fx, R_fy))) \\ &- (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))), \\ &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) \\ &+ (c_\kappa(d(R_fx, x)) + c_\kappa(d(R_fy, y)))c''_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \end{aligned}$$

$$\geq 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))).$$

さらに,

$$\begin{aligned} f_2 &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) \\ &\quad + \left( \frac{c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &\quad + c_\kappa(d(x, R_fy)) \left( 1 - \frac{1}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} \right) + c_\kappa(d(R_fx, y)) \left( 1 - \frac{1}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) \\ &\quad + \left( \frac{c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &\quad - c_\kappa(d(x, R_fy)) \frac{\kappa c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} - c_\kappa(d(R_fx, y)) \frac{\kappa c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \\ &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) \\ &\quad + c''_\kappa(d(x, R_fy)) \frac{c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + c''_\kappa(d(R_fx, y)) \frac{c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \\ &\geq 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))). \end{aligned}$$

したがって,

$$2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) \leq sf_1 + (1-s)f_2 \leq 0$$

となり,

$$c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \leq \frac{1}{2}c_\kappa(d(R_fx, y)) + \frac{1}{2}c_\kappa(d(x, R_fy))$$

を得る.

$\kappa \leq 0$  のときは,  $c_\kappa(d) \geq 0$ ,  $c_\kappa(d)'' \geq 1$  なので

$$\begin{aligned} f_1 &\geq (1+1)c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ &\quad + (c_\kappa(d(R_fx, x)) + c_\kappa(d(R_fy, y))) \\ &\quad - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))), \\ &\geq 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(R_fx, y)) + c_\kappa(d(x, R_fy))) \end{aligned}$$

であり, さらに

$$\begin{aligned} f_2 &= 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) \\ &\quad + \left( \frac{c_\kappa(d(R_fx, x))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fy, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &\quad - \left( \frac{c_\kappa(d(x, R_fy))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fx, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &\geq 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - \left( \frac{c_\kappa(d(x, R_fy))}{c''_\kappa(d(R_fx, x))} + \frac{c_\kappa(d(R_fx, y))}{c''_\kappa(d(R_fy, y))} \right) \\ &\geq 2c_\kappa(d(R_fx, R_fy)) - (c_\kappa(d(x, R_fy)) + c_\kappa(d(R_fx, y))) \end{aligned}$$

したがって,

$$2c_{\kappa}(d(R_fx, R_fy)) - (c_{\kappa}(d(R_fx, y)) + c_{\kappa}(d(x, R_fy))) \leq sf_1 + (1-s)f_2 \leq 0$$

となり,

$$c_{\kappa}(d(R_fx, R_fy)) \leq \frac{1}{2}c_{\kappa}(d(R_fx, y)) + \frac{1}{2}c_{\kappa}(d(x, R_fy))$$

を得る. よって定理が証明された.

## 参考文献

- [1] M. Bačák, *The proximal point algorithm in metric spaces*, Israel J. Math. **194** (2013), 689–701.
- [2] T. Kajimura, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Resolvents for convex functions on geodesic spaces and their nonspreadingness*, Axioms **14** (2025), 295.
- [3] T. Kajimura and Y. Kimura, *A vicinal mapping on geodesic spaces*, Proceedings of International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis & International Conference on Optimization: Techniques and Applications –I– (Hakodate, Japan, 2019), 2021, (Y. Kimura, M. Muramatsu, W. Takahashi, and A. Yoshise eds.), pp. 183–195.
- [4] Y. Kimura and F. Kohsaka, *Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016), 93–115.
- [5] Y. Kimura and S. Sudo, *New type parallelogram laws in Banach spaces and geodesic spaces with curvature bounded above*, Arab. J. Math. **12** (2023), 389–412.
- [6] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 199–253.