

吸引点に関する平均収束定理

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治

Koji Aoyama

Graduate School of Social Sciences,

Chiba University

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47J25, 47H09.

Keywords and phrases. 吸引点, 平均収束定理, 擬非拡大写像, 不動点.

1 はじめに

C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, T を C から C への非拡大写像 ($x, y \in C \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$), $x \in C$ とする. C が閉凸という仮定のもとで, 以下が成り立つことが知られている [24, 定理 2.1.6, 定理 2.2.3].

(F1) 点列 $x, Tx, T^2x, \dots$ が有界ならば, T は不動点をもつ.

(F2) T が不動点をもつとき, (F1) の点列のチェザロ (Cesàro) 平均 $x, (x + Tx)/2, (x + Tx + T^2x)/3, \dots$ は, T の不動点へ弱収束する.

C が閉凸という仮定がないとき, 上記の (F1) および (F2) は成り立たない. しかし, 不動点を吸引点 [17] に置き換えると, それらと似た結果が得られる [17, Theorem 3.1]. すなわち

(A1) 点列 $x, Tx, T^2x, \dots$ が有界ならば, T は吸引点をもつ.

(A2) T が吸引点をもつとき, 点列 $x, (x + Tx)/2, (x + Tx + T^2x)/3, \dots$ は, T の吸引点へ弱収束する.

さらに, 上記の (A1), (A2) および「 C に属する T の吸引点は T の不動点である」こと^{*1}より, (F1) および (F2) がすぐに得られる [17, Theorem 3.6].

このように, C が閉凸とは限らない仮定のもとで, ある写像 T の吸引点の存在定理や収束定理を示しておく, C が閉凸という仮定を追加することで, T の不動点に関する結果を得ることができる. 吸引点に関連する先行研究として, 例えば, [1, 10, 18, 19] などがある.

^{*1} 第 2 節の (2.3)

本稿では、平均収束定理に関して上記の逆が可能なこと、具体的には、不動点への平均収束定理を使って、吸引点に関する平均収束定理 (定理 3.2) が導けることを説明する。

本稿の構成は次の通りである。次の第 2 節では、本稿で必要となる概念や記号の定義および後で使う定理を紹介する。第 3 節では、吸引点をもつ写像の擬非拡大拡張に関する結果 (補助定理 3.1) と主結果 (定理 3.2) を示す。最後の第 4 節では、第 3 節の結果を使ってある非線形写像の吸引点に関する平均収束定理を導く。

2 準備

本稿では、 $\mathbb{N}$ を正の整数の集合、 $\mathbb{R}$ を実数の集合、 H を実 Hilbert 空間、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積、 $\|\cdot\|$ を H のノルム、 C を空でない H の部分集合とする。また、 H の点列 $\{x_n\}$ が、 $z \in H$ に強収束するとき $x_n \rightarrow z$ 、弱収束するとき $x_n \rightharpoonup z$ と表す。

写像 $T: C \rightarrow H$ を所与とする。 T の不動点 (fixed point) を $F(T)$ で表す。つまり、 $F(T) = \{z \in C: Tz = z\}$ である。点 $z \in H$ が T の吸引点 (attractive point) であるとは、すべての $x \in C$ に対して

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\| \quad (2.1)$$

が成り立つときをいう [17]。 T の吸引点の集合を $A(T)$ で表す。つまり

$$A(T) = \bigcap_{x \in C} \{z \in H: \|Tx - z\| \leq \|x - z\|\} \quad (2.2)$$

である。定義より、 $A(T)$ は閉凸であることがわかる。実際、(2.2) の $\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$ は、 $-2\langle Tx - x, z \rangle \leq \|x\|^2 - \|Tx\|^2$ と同値なので、 $A(T)$ は閉凸である。また、定義より

$$C \cap A(T) \subset F(T) \quad (2.3)$$

が成り立つこともわかる。実際、 $z \in C \cap A(T)$ のとき、(2.1) より、 $\|Tz - z\| \leq \|z - z\| = 0$ だから $z = Tz$ 。つまり、 $z \in F(T)$ である。

H の空でない部分集合 F および写像 $T: C \rightarrow H$ を所与とする。このとき、 T が F に関して擬非拡大 (quasinonexpansive) であるとは、任意の $x \in C$ および $z \in F$ に対して (2.1) が成り立つときをいう [6]。写像 T が擬非拡大であるとは、 $F(T) \neq \emptyset$ であり、 T が $F(T)$ に関して擬非拡大であるときをいう。 C が閉凸で、 T が擬非拡大ならば、 $F(T)$ は閉凸であることが知られている [9, Theorem 1]。写像 T が非拡大であるとは、任意の $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。 $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。写像 T が λ -hybrid であるとは、任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda) \langle x - Tx, y - Ty \rangle \quad (2.4)$$

または

$$\begin{aligned} & \|Tx - Ty\|^2 \\ & \leq \|x - Ty\|^2 + \|Ty - y\|^2 + 2\langle \lambda x + (1 - \lambda)Tx - Ty, Ty - y \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

が成り立つときをいう [3–5, 21]. λ -hybrid 写像の族は, 非拡大写像, [16] の hybrid 写像, [11] の nonspreading 写像を含む. 実際, (2.4) より, T が 1-hybrid ならば T は非拡大であり, T が 1/2-hybrid ならば T は [16] の意味で hybrid であり, T が 0-hybrid ならば T は [11] の意味で nonspreading である*2ことがわかる.

補助定理 2.1. C を H の空でない部分集合, T を C から H への写像, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) T が擬非拡大ならば, $C \cap A(T) \supset F(T)$ であり, $A(T) \neq \emptyset$;
- (2) T が不動点をもつ λ -hybrid 写像ならば, T は擬非拡大である.

証明. (1) $z \in F(T)$ とする. T は擬非拡大だから, 任意の $x \in C$ に対して $\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$. よって, $z \in A(T)$. また, $z \in C$ だから, $z \in C \cap A(T)$. ゆえに, $A(T) \supset C \cap A(T) \supset F(T) \neq \emptyset$. (2) $x \in C, y \in F(T)$ のとき, (2.4) より, $\|Tx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2$. よって, T は擬非拡大である. $\square$

D を H の空でない閉凸部分集合とする. このとき, H から D の上への距離射影 (metric projection) を P_D で表す. つまり, $x \in H$ のとき, $P_D(x) \in D$ であり

$$\|P_D(x) - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in D\}$$

である. これより, $F(P_D) = D$ であることがわかる. また, $x \in H, y \in D$ のとき

$$\|y - x\| \leq \|P_D(x) - x\| \Rightarrow y = P_D(x)$$

が成り立つ. さらに, P_D は非拡大であることが知られている. 距離射影について詳しくは, [15] を参照されたい.

後で使う補助定理を列挙する.

補助定理 2.2 ([8, Theorem 2.16 (iv)], [14, Lemma 3.2]). C を H の空でない閉凸部分集合, $\{x_n\}$ を H の点列とし, 任意の $y \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|x_{n+1} - y\| \leq \|x_n - y\|$ が成り立つとする. このとき, $\{P_C(x_n)\}$ は強収束する.

*2 Banach 空間で定義されている [11] の nonspreading 写像を Hilbert 空間に限定した場合

補助定理 2.3 ([3, Lemma 5.1]). C を H の空でない閉凸部分集合, $T: C \rightarrow C$ を擬非拡大写像, $x \in C$, $\{z_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k-1}x$ で定義される C の点列とする. ここで, T^0 は H 上の恒等写像である. このとき, $\{P_{F(T)}T^n x\}$ は強収束する. さらに, $\{z_n\}$ のすべての弱収積点が T の不動点であるならば, $\{z_n\}$ は $\lim_n P_{F(T)}T^n x$ へ弱収束する.

注 1. 補助定理 2.3 の $\{z_n\}$ が弱収束するという結論は, [13, Lemma 1] から得られる.

注 2. 補助定理 2.3 に現れた収積点の定義を述べておこう. X を位相空間とし, $\{x_n\}$ を X の点列とする. このとき, $z \in X$ が $\{x_n\}$ の**収積点** (cluster point) であるとは

$$z \in \bigcap_n \overline{\{x_i : i \geq n\}}$$

となるときをいう [20, p.54]. なお, 収積点と位相空間の部分集合に対する概念である集積点 (accumulating point) とは異なる. 収積点に関しては, [23, p.167] も参照されたい.

補助定理 2.4 ([17, Lemma 2.2]). C を H の空でない閉凸部分集合, z を写像 $T: C \rightarrow C$ の吸引点とする. このとき, $P_C(z) \in F(T)$ である.

補助定理 2.4 を使うと, 次が得られる.

補助定理 2.5 ([7, Lemma 2.4]). C を H の空でない閉凸部分集合, $T: C \rightarrow C$ を擬非拡大写像とする. このとき, $x \in C$ に対して $P_{F(T)}(x) = P_{A(T)}(x)$ が成り立つ.

証明. $x \in C$ とする. 補助定理 2.1 より $A(T) \neq \emptyset$ であり, $A(T)$ は閉凸だから, $P_{A(T)}$ が存在する. $P_{A(T)}(x) \in A(T)$ であるから, 補助定理 2.4 より, $P_C P_{A(T)}(x) \in F(T)$. ゆえに

$$\|P_{F(T)}(x) - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in F(T)\} \leq \|P_C P_{A(T)}(x) - x\|.$$

$x = P_C(x)$ であり, P_C は非拡大だから

$$\|P_C P_{A(T)}(x) - x\| = \|P_C P_{A(T)}(x) - P_C(x)\| \leq \|P_{A(T)}(x) - x\|$$

が成り立つ. したがって, $\|P_{F(T)}(x) - x\| \leq \|P_{A(T)}(x) - x\|$. 補助定理 2.1 より, $C \cap A(T) \supset F(T)$ に注意すると, $P_{F(T)}(x) \in A(T)$. よって, $P_{F(T)}(x) = P_{A(T)}(x)$. $\square$

3 吸引点に関する平均収束定理

この節では、擬非拡大写像の不動点への平均収束定理 (補助定理 2.3) を使って、吸引点に関する平均収束定理 (定理 3.2) を示す.

まず、吸引点をもつ写像の擬非拡大拡張に関する補助定理^{*3}を準備する.

補助定理 3.1 ([7, Lemma 3.1]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, $T: C \rightarrow H$ を吸引点をもつ写像とし, 写像 $\tilde{T}: H \rightarrow H$ を次式で定義する.

$$\tilde{T}x = \begin{cases} Tx, & x \in [C \setminus F(T)] \cup [F(T) \cap A(T)]; \\ P_{A(T)}(x), & \text{上記以外の場合.} \end{cases} \quad (3.1)$$

このとき, $A(T) = F(\tilde{T})$ であり, $\tilde{T}$ は $A(T)$ に関して擬非拡大である.

証明. $D = [C \setminus F(T)] \cup [F(T) \cap A(T)]$ とおく. まず, $A(T) \subset F(\tilde{T})$ を示そう. $z \in A(T)$ とする. $z \in D$ のとき, $z \in C$ だから, (2.3) より, $z \in F(T)$. よって, $\tilde{T}z = Tz = z$. つまり, $z \in F(\tilde{T})$. $z \notin D$ のとき, $F(P_{A(T)}) = A(T)$ だから, $\tilde{T}z = P_{A(T)}(z) = z$. ゆえに, $z \in F(\tilde{T})$. したがって, $A(T) \subset F(\tilde{T})$ が示せた.

次に, $A(T) \supset F(\tilde{T})$ を示そう. $z \in F(\tilde{T})$ とする. $z \in D$ のとき, $z = \tilde{T}z = Tz$. よって, $z \in F(T)$. $z \in D$ に注意すると, $z \in F(T) \cap A(T) \subset A(T)$ を得る. $z \notin D$ のとき, $z = \tilde{T}z = P_{A(T)}(z)$. ゆえに, $z \in A(T)$. したがって, $A(T) \supset F(\tilde{T})$ が示せた.

最後に, $\tilde{T}$ は $A(T)$ に関して擬非拡大であることを示そう. $x \in H, z \in A(T)$ とする. $x \in D$ のとき, $x \in C$ だから, $\|\tilde{T}x - z\| = \|Tx - z\| \leq \|x - z\|$. $x \notin D$ のとき, $z = P_{A(T)}(z)$ であり, $P_{A(T)}$ は非拡大だから

$$\|\tilde{T}x - z\| = \|P_{A(T)}(x) - P_{A(T)}(z)\| \leq \|x - z\|.$$

以上より, $\tilde{T}$ は $A(T)$ に関して擬非拡大であることが示せた. □

補助定理 2.2, 2.3 および 3.1 を使うと, 次の定理 3.2 が得られる. なお, 2022 年 5 月に掲載した [7] (arXiv2205.11045v1) の Theorem 3.2 の証明は不完全である. 以下では修正した証明を記す.

^{*3} 吸引点をもつ写像の擬非拡大拡張に関しては, [2, 22] も参照されたい.

定理 3.2 ([7, Theorem 3.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, $T: C \rightarrow C$ を吸引点をもつ写像, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して次式で定義する.

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k-1}x \quad (3.2)$$

ここで, T^0 は C 上の恒等写像である. このとき, 点列 $\{P_{A(T)}T^n x\}$ は強収束する. さらに, $\{z_n\}$ のすべての弱収積点が T の吸引点ならば, $\{z_n\}$ は $\lim_n P_{A(T)}T^n x \rightarrow z_n$ へ弱収束する.

証明. $u \in A(T)$ とする. このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|T^{n+1}x - u\| \leq \|T^n x - u\|$$

が成り立つ. よって, 補助定理 2.2 より, $\{P_{A(T)}T^n x\}$ は強収束することがわかる.

次に, 定理の後半を示そう. $\{z_n\}$ のすべての弱収積点が T の吸引点であると仮定し

$$D = [C \setminus F(T)] \cup [F(T) \cap A(T)]$$

とおく. 以下, 二つの場合に分けて考える. (i) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $T^{m-1}x \in D$ のとき: $\tilde{T}$ を (3.1) で定義される写像, $\{\tilde{z}_n\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{T}^{k-1}x$$

で定義される点列とする. ここで, $\tilde{T}^0$ は H 上の恒等写像である. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tilde{T}^{n-1}x = T^{n-1}x$ である. さらに, 補助定理 3.1 より, $A(T) = F(\tilde{T})$ であり, $\tilde{T}$ は $A(T)$ に関して擬非拡大であることがわかる. よって, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\tilde{z}_n = z_n$, $P_{F(\tilde{T})}\tilde{T}^n x = P_{A(T)}T^n x$ である. さらに, 仮定より, $\{\tilde{z}_n\}$ のすべての弱収積点は $\tilde{T}$ の不動点である. ゆえに, 補助定理 2.3 より, $\{\tilde{z}_n\}$ は $\lim_n P_{F(\tilde{T})}\tilde{T}^n x \rightarrow \tilde{z}_n$ へ弱収束する. つまり, $\{z_n\}$ は $\lim_n P_{A(T)}T^n x \rightarrow z_n$ へ弱収束する. (ii) $T^{m-1}x \notin D$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在するとき:

$$C \setminus D = C \setminus \{[C \setminus F(T)] \cup [F(T) \cap A(T)]\} = F(T) \setminus A(T)$$

に注意すると, $T^{m-1}x \in F(T) \setminus A(T)$, つまり, $T^{m-1}x$ は T の不動点である. ゆえに, すべての $n \geq m$ に対して

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k-1}x = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{m-1} T^{k-1}x + (n - m + 1)T^{m-1}x \right).$$

よって, $\lim_n z_n = T^{m-1}x \notin A(T)$ となり, これは, すべての $\{z_n\}$ の弱収積点が T の吸引点であるという仮定に反する. $\square$

注 3. 定理 3.2 の証明で補助定理 2.3 を使ったが、定理 3.2 と補助定理 2.5 より、補助定理 2.3 が導ける。実際、 T が擬非拡大のとき、補助定理 2.1 より、 $A(T) \supset C \cap A(T) \supset F(T) \neq \emptyset$. u を $\{z_n\}$ の弱収積点とすると、仮定より $u \in F(T)$ だから、 $u \in A(T)$. また、補助定理 2.5 より、 $n \in \mathbb{N}$ に対して $P_{F(T)}T^n x = P_{A(T)}T^n x$. よって、定理 3.2 より、 $z_n \rightharpoonup \lim_n P_{A(T)}T^n x = \lim_n P_{F(T)}T^n x$.

注 4. 定理 3.2 および [12, Theorem 3.3] より、[12, Lemma 4.2] が得られる。

4 λ -hybrid 写像に関する収束定理

この節では、定理 3.2 を使って、吸引点をもつ λ -hybrid 写像の平均収束定理を示す。その後、その系として、不動点をもつ λ -hybrid 写像の平均収束定理を導く。

まず、定理 [3, Theorem 4.1] の証明を参考にして、次の補助定理を示そう。

補助定理 4.1 ([7, Lemma 4.1]). H を Hilbert 空間、 C を H の空でない部分集合、 $\lambda \in \mathbb{R}$ 、 $T: C \rightarrow C$ を λ -hybrid 写像、 $x \in C$ とし、点列 $\{z_n\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.2) で定義する。このとき、 $\{T^n x\}$ が有界ならば、 $\{z_n\}$ のすべての弱収積点は T の吸引点である。

証明. $y \in C$ とする。 T は λ -hybrid だから、(2.5) より、すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq \|T^{k-1}x - Ty\|^2 - \|T^k x - Ty\|^2 + \|Ty - y\|^2 + 2 \langle \lambda T^{k-1}x + (1 - \lambda)T^k x - Ty, Ty - y \rangle$$

が成り立つ。 $k = 1, \dots, n$ について上式を加え、 n で割ると

$$0 \leq \frac{1}{n} \left(\|x - Ty\|^2 - \|T^n x - Ty\|^2 \right) + \|Ty - y\|^2 + 2 \left\langle \lambda z_n + (1 - \lambda) \left(\frac{n+1}{n} z_{n+1} - \frac{x}{n} \right) - Ty, Ty - y \right\rangle \quad (4.1)$$

を得る。ここで、 z を $\{z_n\}$ の弱収積点とすると、 z に弱収束する $\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n_i}\}$ が存在する。よって、(4.1) より、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq \frac{1}{n_i} \|x - Ty\|^2 + \|Ty - y\|^2 + 2 \left\langle \lambda z_{n_i} + (1 - \lambda) \left(\frac{n_i+1}{n_i} z_{n_i+1} - \frac{x}{n_i} \right) - Ty, Ty - y \right\rangle \quad (4.2)$$

が成り立つことがわかる。ここで

$$z_{n_i+1} = \frac{n_i}{n_i+1}z_{n_i} + \frac{1}{n_i+1}T^{n_i}x$$

であり, $\{T^{n_i}x\}$ は有界だから, $\{z_{n_i+1}\}$ もまた z に弱収束する. したがって, (4.2) で $i \rightarrow \infty$ とすると, 次式を得る.

$$0 \leq \|Ty - y\|^2 + 2\langle \lambda z + (1 - \lambda)z - Ty, Ty - y \rangle = \|y - z\|^2 - \|Ty - z\|^2.$$

よって, 任意の $y \in C$ に対して $\|Ty - z\| \leq \|y - z\|$ が成り立つ. つまり, $z \in A(T)$. 以上より, $\{z_n\}$ のすべての弱収積点は T の吸引点であることが示せた. $\square$

定理 3.2 と補助定理 4.1 を使うと, λ -hybrid 写像の吸引点に関する平均収束定理が得られる.

定理 4.2 ([7, Corollary 4.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T: C \rightarrow C$ を吸引点をもつ λ -hybrid 写像, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.2) で定義する. このとき, $\{z_n\}$ は $\lim_n P_{A(T)}T^n x$ へ弱収束する.

証明. $z \in A(T)$ とする. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|T^n x\| \leq \|T^n x - z\| + \|z\| \leq \|x - z\| + \|z\|$$

である. よって, $\{T^n x\}$ は有界である. T は λ -hybrid だから, 補助定理 4.1 より, $\{z_n\}$ のすべての弱収積点は T の吸引点である. したがって, 定理 3.2 より結論が得られる. $\square$

定理 4.2 と補助定理 2.5 より, λ -hybrid 写像に不動点に関する平均収束定理が得られる.

系 4.3 ([3, Theorem 5.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T: C \rightarrow C$ を不動点をもつ λ -hybrid 写像, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.2) で定義する. このとき, $\{z_n\}$ は $\lim_n P_{F(T)}T^n x$ へ弱収束する.

証明. 補助定理 2.1 より, T は擬非拡大で, $A(T) \neq \emptyset$. よって, 補助定理 2.5 より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P_{A(T)}T^n x = P_{F(T)}T^n x$. ゆえに, 定理 4.2 より結論が得られる. $\square$

謝辞

この度, 講演の機会を与えて頂いたことにより, [7, Theorem 3.2] の初版の証明が不完全であることに気付くことができました. 研究代表者の松岡勝男先生 (東邦大学) および研究副代表者の大和田智義先生 (静岡大学) に感謝申し上げます.

参考文献

- [1] S. Akashi and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for nonexpansive mappings on star-shaped sets in Hilbert spaces*, Appl. Math. Comput. **219** (2012), 2035–2040.
- [2] K. Aoyama, *A quasinonexpansive extension of a mapping with an attractive point in a Hilbert space* (2022), available at [arXiv:2202.01419\[math.FA\]](#).
- [3] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ -hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.
- [4] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ -hybrid mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim. **2** (2011), 87–95.
- [5] ———, *Uniform mean convergence theorems for hybrid mappings in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2012), 2012:193, 13.
- [6] ———, *Strongly quasinonexpansive mappings, III*, Linear Nonlinear Anal. **6** (2020), 1–12.
- [7] K. Aoyama and M. Toyoda, *Mean convergence theorems with respect to attractive points in a Hilbert space* (2022), available at [arXiv:2205.11045\[math.FA\]](#).
- [8] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, *On projection algorithms for solving convex feasibility problems*, SIAM Rev. **38** (1996), 367–426.
- [9] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.
- [10] S.-M. Guu and W. Takahashi, *Existence and approximation of attractive points of the widely more generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2013), Art. ID 904164, 10.
- [11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.
- [12] L.-J. Lin and W. Takahashi, *Attractive point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **16** (2012), 1763–1779.
- [13] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.

- [14] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.
- [15] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
- [16] ———, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.
- [17] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.
- [18] W. Takahashi, N.-C. Wong, and J.-C. Yao, *Attractive point and weak convergence theorems for new generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **13** (2012), 745–757.
- [19] ———, *Attractive points and Halpern-type strong convergence theorems in Hilbert spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **17** (2015), 301–311.
- [20] 前田周一郎, 函数解析 (数学全書 6), 森北出版, 1984.
- [21] 青山耕治, ハイブリッド写像の不動点定理と平均収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1820** (2012), 1–10.
- [22] ———, 吸引点に関する収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **2260** (2023), 22–29.
- [23] 青木利夫, 高橋渉, 平野載倫, 演習・集合位相空間, 培風館, 1985.
- [24] 高橋渉, 非線形関数解析学 - 不動点定理とその周辺 (現代数学ゼミナール), 近代科学社, 1988.