

Complex Interpolation of Banach Lattices

澤野 嘉宏 (中央大学)

Abstract

本稿では, モレー空間を中心とした関数空間の補間について概観する.

以下は, 主にモレー空間についての補間についてのサーベイである. 記号は [20, 21, 22] に準ずる. これらの文献に従い, 用語を整理する. 用語はすべてカルデロンの 1964 年の有名な論文 [4] で導入されたものである.

定義 1. $0 < q \leq p < \infty$ とする. モレー空間 $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ とは,

$$f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n)$$

であって

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^n} |B(a,r)|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

が有限となるような関数 f 全体からなる関数空間である.

定義 2. $0 < q \leq p < \infty$ とする. 局所 モレー空間 $\text{LM}_q^p = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ とは,

$$f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n)$$

であって

$$\|f\|_{\text{LM}_q^p} := \sup_{B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n} |B(0,r)|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

が有限となるような関数 f 全体からなる関数空間である.

定義 3 (Calderón の第一複素補間空間). $\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ を複素 Banach 空間の整合対とする.

- (1) 空間 $\mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ を, 次の条件を満たすすべての関数 $F: \bar{S} \rightarrow \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1$ の集合として定義する:

- (i) F は $\bar{S}$ 上連続であり,

$$\sup_{z \in \bar{S}} \|F(z)\|_{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1} < \infty$$

が成り立つ.

(ii) F は S 上正則である.

(iii) 各 $j = 0, 1$ に対し, $t \in \mathbb{R} \mapsto F(j + it) \in \mathcal{X}_j$ は $\mathbb{R}$ 上有界かつ連続である.

空間 $\mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ には次のノルムを入れる:

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)} \equiv \max_{j=0,1} \left(\sup_{z \in j+i\mathbb{R}} \|F(z)\|_{\mathcal{X}_j} \right).$$

(2) $\theta \in (0, 1)$ とする. $\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ に関する**第一複素補間空間** $[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]_\theta$ を, ある $F \in \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ が存在して $f = F(\theta)$ と書けるすべての $f \in \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1$ の集合として定義する. $[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]_\theta$ 上のノルムを

$$\|f\|_{[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]_\theta} \equiv \inf \left\{ \|F\|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)} : f = F(\theta) \text{ となる } F \in \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1) \right\}$$

により定める. 空間 $[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]_\theta$ は *Calderón の第一複素補間空間*, と呼ばれる.

$\mathcal{X}$ を複素 Banach 空間とする. このとき, $\mathcal{X}$ 値 Lipschitz 空間 $\text{Lip}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ を, 次の量 (半ノルム)

$$\|F\|_{\text{Lip}(\mathbb{R}, \mathcal{X})} \equiv \sup_{-\infty < s < t < \infty} \frac{\|F(t) - F(s)\|_{\mathcal{X}}}{|t - s|}$$

が有限となるすべての関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ の集合として定義する.

定義 4 (Calderón の第二複素補間空間). $\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ を複素 Banach 空間の整合対とする.

(1) $\mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ を, 次の条件を満たすすべての関数 $G: \bar{S} \rightarrow \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1$ の集合として定義する:

(i) G は $\bar{S}$ 上連続であり,

$$\sup_{z \in \bar{S}} \left\| \frac{G(z)}{1 + |z|} \right\|_{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1} < \infty$$

が成り立つ.

(ii) G は S 上正則である.

(iii) 各 $j = 0, 1$ に対し,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto G(j + it) - G(j) \in \mathcal{X}_j$$

は $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 連続である.

空間 $\mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ には次のノルムを入れる:

$$\|G\|_{\mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)} \equiv \max \left\{ \|G(i \cdot)\|_{\text{Lip}(\mathbb{R}, \mathcal{X}_0)}, \|G(1 + i \cdot)\|_{\text{Lip}(\mathbb{R}, \mathcal{X}_1)} \right\}. \quad (0.1)$$

- (2) $\theta \in (0, 1)$ とする. $\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ に関する**第二複素補間空間** $[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]^\theta$ を, ある $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$ が存在して $f = G'(\theta)$ と書けるすべての $f \in \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1$ の集合として定義する. $[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]^\theta$ 上のノルムを

$$\|f\|_{[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]^\theta} \equiv \inf \left\{ \|G\|_{\mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)} : f = G'(\theta) \text{ となる } G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1) \right\}$$

により定める. 空間 $[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1]^\theta$ は *Calderón の第二複素補間空間*, と呼ばれる.

以後の考察のために, 我々は格子上で議論していることを念頭に置きつつ, 次のように問題を変形しておくのが便利である. $0 < \theta < 1$ とし, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする. $E_0(\mu)$ および $E_1(\mu)$ を, この測度空間上の準 Banach 格子とする. $f \in E_0(\mu)$, $g \in E_1(\mu)$ に対して積 $|f|^{1-\theta}|g|^\theta$ を, $E_0(\mu)$ と $E_1(\mu)$ の格子構造を考慮に入れて特徴づけたい. そのため, 次の定義を与える.

定義 5. $0 < \theta < 1$ とし, $\overline{E}(\mu) = (E_0(\mu), E_1(\mu))$ を, 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の準 Banach 格子の組で, $L^0(\mu)$ に連続的に埋め込まれているものとする. *Calderón (Lozanovskii) 積* $E_0(\mu)^{1-\theta}E_1(\mu)^\theta$ を次により定義する:

$$\begin{aligned} & E_0(\mu)^{1-\theta}E_1(\mu)^\theta \\ & \equiv \{g|f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta : g \in L^\infty(\mu), f_0 \in E_0(\mu), f_1 \in E_1(\mu)\} \\ & = \{f \in L^0(\mu) : |f| \leq |f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta, f_0 \in E_0(\mu), f_1 \in E_1(\mu)\}. \end{aligned}$$

$f \in E_0(\mu)^{1-\theta}E_1(\mu)^\theta$ に対し,

$$\begin{aligned} & \|f\|_{E_0(\mu)^{1-\theta}E_1(\mu)^\theta} \\ & \equiv \inf \{ \|f_0\|_{E_0(\mu)}^{1-\theta} \|f_1\|_{E_1(\mu)}^\theta : f_0 \in E_0(\mu), f_1 \in E_1(\mu), |f| \leq |f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta \} \\ & = \inf \{ \|f_0\|_{E_0(\mu)}^{1-\theta} \|f_1\|_{E_1(\mu)}^\theta : f_0 \in E_0(\mu), f_1 \in E_1(\mu), |f| = |f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta \} \end{aligned}$$

と定める.

定義 6 $(\mathcal{X}(\rho'), \mathcal{X}'(\rho))$. (X, ρ) を Banach 格子とする. ρ' を ρ の随伴ノルムとする. すなわち, ρ' は可測関数 g に対して

$$\rho'(g) \equiv \sup \{ \|f \cdot g\|_{L^1} : f \in \mathbb{M}^+(\mathbb{R}^n), \rho(f) \leq 1 \} \quad (g \in \mathbb{M}^+(\mathbb{R}^n)) \quad (0.2)$$

により定義される. ρ' によって定まる Banach 関数空間 $\mathcal{X}(\rho') = \mathcal{X}'(\rho)$ を, $\mathcal{X}$ の**随伴空間**, あるいは *Köthe 双対* と呼ぶ.

$X'' = (X')'$ と定めると, 常に

$$X \subset X''$$

が成り立つ.

Theorem 0.1. Banach 格子 X が極大であるとは,

$$X'' = X$$

が成り立つことをいう.

Theorem 0.2. 極大 *Banach* 格子 X_0, X_1 に対して,

$$[X_0, X_1]^\theta = (X_0)^{1-\theta}(X_1)^\theta$$

が成り立つ.

この結果を用いることにより, これまで知られてきたモレー空間の複素補間に関する結果を一般化した. 以下では, モレー空間の補間理論に関する研究の歴史を簡単にまとめる.

- 1970 年代には, 作用素ノルムに関する補間公式が Peetre らによって研究され, 補間空間の理論が体系的に整備された. この時期に確立された抽象的補間理論は, Bergh–Löfström [1] によって教科書レベルで包括的にまとめられている.
- 1990 年代には, Lebesgue 空間における補間理論がモレー空間にはそのまま移行しないことが, Blasco, Ruiz, Vega によって示された. [2] や [17, Theorem] を参考のこと. この結果は, モレー空間に固有の非局所性が補間理論に本質的な障害を与えることを明らかにしたものであり, その後の研究の出発点となった (関連する問題意識については Lemarié–Rieusset [14] も参照).
- 複素補間に関しては, 例えば報告者自身によって, 後に誤りであることが判明する公式が得られたこともあった. このような状況を背景として, モレー空間の前双対や閉部分空間に着目した再検討が進められ, Hakim により, 一般化 モレー空間およびその前双対に関する複素補間理論が体系的に整理された [7, 8, 9]. 関連する空間の複素補間については, [3, 10, 11, 12] を参考のこと.
- $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$ の場合でさえ, 2013 年に Lemarié–Rieusset によって, モレー空間の補間に本質的な問題が存在することが明確に指摘された [14]. この問題意識はその後, Yang, Yuan, Sickel の 3 名によって補完され, smoothness モレー空間と呼ばれる関数空間の枠組みのもとで, 詳細な解析が行われた [19, 25, 26, 27, 28, 29] を参照のこと. とくに, [27] では smoothness モレー空間における補間理論の礎が完成した. さらに, この論文では講演者の論文 [24] の瑕疵が指摘された.
- さらに, [27] において滑らかさを伴う Morrey 型空間の構造については, Hakim–Nakamura–Sawano [12, 13] において, 精密な研究がなされている. モレー空間の複素補間のサーベイとしては, [9] を参考のこと.
- $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$ の場合について, 2019 年に Mastyló と報告者により, 局所 モレー空間に対しては複素補間 (実補間を本質的に含む) の問題が完全に解決された [15]. この結果は, モレー空間における局所化の導入が補間理論において決定的な役割を果たすことを示している.
- さらに 2019 年に, Mastyló と報告者によって, $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$ を満たさない場合においても,

$$[\mathcal{M}_{q_0}^{p_0}, \mathcal{M}_{q_1}^{p_1}]^\theta$$

の明示的な表示が与えられた [15]. これは, 従来困難とされてきた一般指数の場合に対する複素補間理論の到達点の一つである.

- 2021 年には, [23] において, 報告者と菅野により, $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$ を満たさない場合の

$$[\mathcal{M}_{q_0}^{p_0}, \mathcal{M}_{q_1}^{p_1}]^\theta$$

の具体的な応用例が見いだされた. さらに, これは [18] で一般化されている. さらに, 楕円型偏微分方程式への応用については, Mastyló–Sawano [16] により詳細に論じられている.

- 近年において, 報告者と Yang, Yuan, Zhang により, 今まで得られた結果 (極大バナッハ格子に対する複素補間の具体形, その閉部分空間の複素補間の表示) は一般化された形で具体的に表示が得られた. たとえば, [7] において得られなかった表示もこの報告者と Yang, Yuan, Zhang による進行中の研究により具体形が得られた.

Acknowledgement

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

- [1] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 223, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976. [4]
- [2] O. Blasco, A. Ruiz and L. Vega, Non-interpolation in Morrey–Campanato and block spaces, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **28** (1999), 31–40. [4]
- [3] V. I. Burenkov, D. I. Hakim, E. Nakai, Y. Sawano, T. Sobukawa and T. V. Tararykova, Complex interpolation of the predual of Morrey spaces over measure spaces, *Georgian Math. J.* **28** (2021), 341–348. [4]
- [4] A. P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* **24** (1964), 113–190. [1]
- [5] D. I. Hakim and Y. Sawano, Interpolation of generalized Morrey spaces, *Rev. Mat. Complut.* **29** (2016), 295–340. [–]
- [6] D. I. Hakim and Y. Sawano, Calderón’s first and second complex interpolations of closed subspaces of Morrey spaces, *J. Fourier Anal. Appl.* **23** (2017), 1195–1226. [–]
- [7] D. I. Hakim, Complex interpolation of certain closed subspaces of generalized Morrey spaces, *Tokyo J. Math.* **41** (2018), 487–514. [4, 5]

- [8] D. I. Hakim, Complex interpolation of predual spaces of general local Morrey-type spaces, *Banach J. Math. Anal.* **12** (2018), 541–571. [4]
- [9] D. I. Hakim, Calderón complex interpolation of Morrey spaces, *J. Indones. Math. Soc.* **26** (2020), 137–164. [4]
- [10] D. I. Hakim, M. Izuki and Y. Sawano, Complex interpolation of grand Lebesgue spaces, *Monatsh. Math.* **184** (2017), 245–272. [4]
- [11] D. I. Hakim, S. Nakamura, Y. Sawano and T. Sobukawa, Complex interpolation of B_w^u -spaces, *Complex Var. Elliptic Equ.* **63** (2018), 569–590. [4]
- [12] D. I. Hakim, S. Nakamura and Y. Sawano, Complex interpolation of smoothness Morrey subspaces, *Constr. Approx.* **46** (2017), 489–563. [4]
- [13] D. I. Hakim, S. Nakamura and Y. Sawano, Weighted Morrey spaces—complex interpolation and the boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator, in *Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, pp. 109–140, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B65, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto, 2017. [4]
- [14] P. G. Lemarié-Rieusset, Erratum to: Multipliers and Morrey spaces, *Potential Anal.* **41** (2014), 1359–1362. [4]
- [15] M. Mastyło and Y. Sawano, Complex interpolation and Calderón–Mityagin couples of Morrey spaces, *Anal. PDE* **12** (2019), 1711–1740. [4]
- [16] M. Mastyło and Y. Sawano, Applications of interpolation methods and Morrey spaces to elliptic PDEs, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **21** (2020), 999–1021. [5]
- [17] A. Ruiz and L. Vega, Corrigenda to “Unique continuation for Schrödinger operators with potential in Morrey spaces” and a remark on interpolation of Morrey spaces, *Publ. Mat.* **39** (1995), 405–411. [4]
- [18] D. Salim, M. T. Hakiki, Y. Sawano, D. I. Hakim and M. Jamaludin, Fractional operators with homogeneous kernel on the Calderón product of Morrey spaces, *Math. Nachr.* **297** (2024), no. 9, 3567–3573. [5]
- [19] Y. Sawano and H. Tanaka, Decompositions of Besov–Morrey spaces and Triebel–Lizorkin–Morrey spaces, *Math. Z.* **257** (2007), 871–905. [4]
- [20] Y. Sawano, *Theory of Besov Spaces*, Developments in Mathematics, Vol. 56, Springer, Singapore, 2018. [1]
- [21] Y. Sawano, G. Di Fazio and D. I. Hakim, *Morrey Spaces—Introduction and Applications to Integral Operators and PDEs. Vol. I*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2020. [1]

- [22] Y. Sawano, G. Di Fazio and D. I. Hakim, *Morrey Spaces—Introduction and Applications to Integral Operators and PDEs. Vol. II*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2020. [1]
- [23] Y. Sawano and S. Sugano, Complex interpolation and the Adams theorem, *Potential Anal.* **54** (2021), no. 2, 299–305. [5]
- [24] Y. Sawano and H. Tanaka, Besov–Morrey spaces and Triebel–Lizorkin–Morrey spaces for non-doubling measures, *Math. Nachr.* **282** (2009), no. 12, 1788–1810. [4]
- [25] J. Sun, D. Yang and W. Yuan, A framework of Besov–Triebel–Lizorkin type spaces via ball quasi-Banach function sequence spaces I: real-variable characterizations, *Math. Ann.* **390** (2024), 4283–4360. [4]
- [26] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2005, Springer, Berlin, 2010. [4]
- [27] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Interpolation of Morrey–Campanato and related smoothness spaces, *Sci. China Math.* **58** (2015), 1835–1908. [4]
- [28] D. Yang and W. Yuan, A new class of function spaces connecting Triebel–Lizorkin spaces and Q spaces, *J. Funct. Anal.* **255** (2008), 2760–2809. [4]
- [29] D. Yang and W. Yuan, New Besov-type spaces and Triebel–Lizorkin-type spaces including Q spaces, *Math. Z.* **265** (2010), 451–480. [4]