

Banach 空間の局所凸性に関する 幾何学的定数の計算例

梅屋 拓真（東京理科大学）

1 導入

本論文は [4] の概説である．Banach 空間における幾何学的定数は，その構造的性質を定量的に把握するための重要な道具である．これらの定数は，空間がどの程度凸性や滑らかさを備えているかを測る指標となり，異なるノルム構造を区別する上でも有効である．

代表的な例としては，一様凸性や一様平滑性を特徴づける modulus of convexity $\delta_X(\varepsilon)$ や modulus of smoothness $\rho_X(t)$ などが挙げられる．一様凸性や一様平滑性自体は，ノルム空間の単位球が一様に丸い，あるいは一様に滑らかであることを示す定性的なものであるが，その「丸さ」や「滑らかさ」を定量化することで， $\delta_X(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$ あるいは $\rho_X(t) \leq Dt^p$ のような幾何的な視点から，バナッハ空間をより深く研究することができる ([3])．また，それらの幾何学的定数を通して一様凸性と一様平滑性の間の双対性が明らかになるなど，幾何の「考え方」の面でも重要な示唆を与える．一方で，これらの幾何学的定数はいずれも空間全体の性質を記述するものであり，各点における局所的な幾何構造を直接反映するものではない．このような観点から，点ごとの局所的な凸性を測る量の導入が自然に考えられる．本論文では，Kadets [2] が「可分無限次元 Banach 空間は常に同相である」ことを示す際に用いた幾何学的定数 $\omega(x, \delta)$ に焦点を当て，その計算方法のアイデアと具体的な二次元空間への適用について述べる．

Definition 1.1 (Kadets, 1967 [2]). X を実 Banach 空間とし，local modulus of convexity $\omega(x, \delta)$ を次で定義する：

$$\omega(x, \delta) = \frac{1}{2} \sup_{z \in G(x, \delta)} \|x - z\| \quad (x \in S_X, \delta \in [0, 1]),$$

ここで,

$$G(x, \delta) = \{z \in B_X : \min_{\lambda \in [0,1]} \|(1-\lambda)x + \lambda z\| \geq 1 - \delta\}.$$

この定数 $\omega(x, \delta)$ は, 点 x の周辺でどの程度の凸性が保持されるかを定量化したものである. [2] における議論では理論的に重要な役割を果たしたが, 具体的な計算例は著者の知る限り, $\ell_1^2, \ell_2^2, \ell_\infty^2$ のような容易に計算できるものを除いてはおそらく知られていない. 本論文では, それら以外の具体例を与えるため, まずは計算方法を構築し, それを具体例に適用する. 具体例については, 定数の定義から 2 次元空間が本質であることが示唆されるため, まずは正六角形に由来するノルムを持つ 2 次元空間を考える.

2 計算方法の構築

2.1 2 次元部分空間への帰着

本節では, $\omega(x, \delta)$ の計算を有限次元の問題へ帰着することを考える. 定義より, $\omega(x, \delta)$ は

$$\omega(x, \delta) = \frac{1}{2} \sup_{z \in G(x, \delta)} \|x - z\|$$

によって与えられるが, この定義は一見すると Banach 空間 X 全体にわたる最適化問題であり, そのままでは具体的な計算は困難である.

しかしながら, 任意の $z \in G(x, \delta)$ に対して, x と z の張る部分空間 $M = \text{span}\{x, z\}$ は高々 2 次元である. さらに, 線分

$$\{(1-\lambda)x + \lambda z : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

はこの部分空間 M に完全に含まれるため, $G(x, \delta)$ の定義に現れる条件

$$\min_{\lambda \in [0,1]} \|(1-\lambda)x + \lambda z\| \geq 1 - \delta$$

も M の中で完結している.

したがって, $\omega(x, \delta)$ の値は, x を含む 2 次元部分空間上での値の上限として記述することができる.

Proposition 2.1. 任意の $(x, \delta) \in S_X \times [0, 1]$ に対して,

$$\omega(x, \delta) = \sup\{\omega_M(x, \delta) : M \subset X, \dim M = 2, x \in M\}$$

が成り立つ.

この命題により、 $\omega(x, \delta)$ の計算は、2次元ノルム空間における問題として扱えば十分であることが分かる。特に、後に扱う具体例においては、この2次元化により問題が幾何的に可視化され、明示的な計算が可能となる。

2.2 関数 D

$x \in S_X$ を固定し、 $z \in B_X$ に対して

$$D(z) := \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z\|$$

と定める。

この関数 D は、点 x と z を結ぶ直線上においてノルムが最小となる値を表している。すなわち、 $D(z)$ は、線分 $[x, z]$ およびその延長が単位球の内側にどの程度入り込むかを測る量と解釈できる。

特に、 $D(z)$ が小さいほど、直線 xz は原点方向へ大きく近づくことを意味し、逆に $D(z)$ が大きいほど、その直線は単位球の外側にとどまる。

この関数を用いると、集合 $G(x, \delta)$ を $D(z) \geq 1 - \delta$ と $0 \leq D(z) < 1 - \delta$ の二つの領域に分割することができ、それぞれ別に処理することが可能となる。さらに、 D は連続関数であり、2次元ノルム空間においては、単位球面上で連続的に変化するパラメータに対して単調な振る舞いを示すことが知られている。このような性質は、後に最大値がどの位置で達成されるかを調べる上で重要となる。

2.3 $G(x, \delta)$ の分解と接点による評価

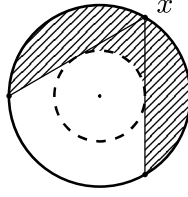
集合 $G(x, \delta)$ を次の2つの部分に分ける：

$$A = \{z \in G(x, \delta) : \min_{t \in \mathbb{R}} \|(1 - t)x + tz\| \geq 1 - \delta\},$$

$$B = \{z \in G(x, \delta) : \min_{t \in \mathbb{R}} \|(1 - t)x + tz\| < 1 - \delta\}.$$

ここで A は、線分 $[x, z]$ だけでなくその延長を含む直線全体で見ても、縮小球 $(1 - \delta)B_X$ の外側にある点の集合であり、 B はそうでない点の集合である。

まず、 $z \in A$ とする。もし z が A の内部にあれば、線分 $[x, z]$ の延長と単位球面の交点 z' について $z' \in A$ かつ $\|x - z\| \leq \|x - z'\|$ となる。よって、 A と単位球面の共通部分で $\|x - z\|$ が最大となる点を考えればよい。この仮定のもとでは、Alonso-Martín [1] の結果から、直線 xz が $(1 - \delta)B_X$ に接するときに $\|x - z\|$ が最大となることがわかる。2次

図1 $G(x, \delta)$ の点と境界点の関係

元ノルム空間で $0 < \delta < 1$ の場合は、このような点はちょうど二点ある．これらを z_1, z_2 とする．

次に、 $z \in B$ とする．このとき、直線 xz は縮小球 $(1 - \delta)B_X$ の内部に入り込むため、その境界と交わる点が存在する．特に、この直線上には、縮小球に接する2点 h, h' をとることができる．これらの点 h, h' は、条件 $D(z) = 1 - \delta$ を満たす点であり、集合 A と B の境界に位置する．さらに、 X の凸性および $G(x, \delta)$ の定義から、次の評価が成り立つ：

$$\|x - z\| \leq \max\{\|x - h\|, \|x - h'\|\}.$$

すなわち、 B に属する任意の点 z に対して、より大きな距離を与える点が、境界上の点 $h, h' \in A$ のいずれかとして存在する．

以上より、

$$G_0(x, \delta) = \{z \in S_X : \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z\| = 1 - \delta\}$$

と定めると、

$$\omega(x, \delta) = \frac{1}{2} \sup_{z \in G_0(x, \delta)} \|x - z\|$$

が成り立つ．特に、 $\dim X = 2$ かつ $0 < \delta < 1$ ならば、 $G_0(x, \delta) = \{z_1, z_2\}$ である．

3 正六角形ノルムへの適用

前節の計算方法を具体例に適用する．以降、 $\mathbb{R}^2$ 上のノルムを

$$\|(x, y)\| = \begin{cases} |x| + \frac{1}{2}|y| & (|y| \leq 2|x|), \\ |y| & (|y| \geq 2|x|) \end{cases}$$

で定め、 $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ とする．このとき、 X の単位球面は線形変換により正六角形と一致する．ここでは、 $\|\cdot\|$ を正六角形ノルムと呼ぶ．

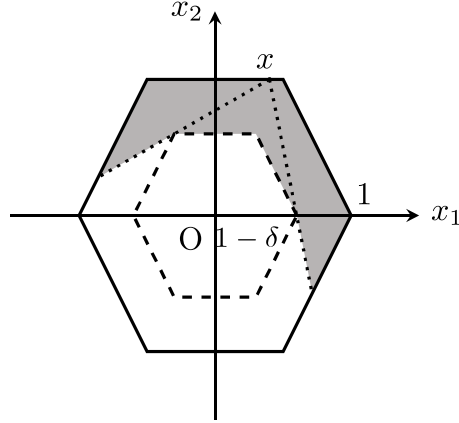


図2 正六角形ノルムの単位球

3.1 対称性による簡約

正六角形ノルムは座標軸および原点における対称性を持つため、 $\omega(x, \delta)$ の値はこれらの対称変換に関して不変である。したがって、一般性を失うことなく、 x は第一象限に属すると仮定してよい。さらに、単位球の構造から、 x を適切に回転することで

$$x = (\alpha, 1) \quad (0 \leq \alpha \leq 1/2)$$

の形に帰着することができる。以降ではこの形の x のみを考える。

3.2 $G_0(x, \delta)$ の具体的記述

前節の結果より、

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z\| = 1 - \delta$$

を満たす単位球面上の2点 z_1, z_2 を求めることで、

$$\omega(x, \delta) = \frac{1}{2} \max\{\|x - z_1\|, \|x - z_2\|\}$$

と計算できる。

3.3 各線分上での評価

単位球 S_X は有限個の線分から構成されるため、各線分上で点 z をパラメータ表示することができる。

例えば、ある線分上では

$$z(t) = (t, 1) \quad (t \in [-1/2, 1/2])$$

のように表すことができる．このとき、

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda z(t)\|$$

を計算することで、条件

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z(t)\| = 1 - \delta$$

を満たす t を求めることができる．さらに、

$$f(t) = \|x - z(t)\|$$

を考え、その最大値を求めることで、当該線分上での候補値を決定する．

3.4 場合分け

$G_0(x, \delta)$ は単位球 S_X の各線分上で条件

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z\| = 1 - \delta$$

を満たす点からなる集合である．ここで、単位球 S_X は有限個の線分から構成されており、各線分上ではノルムの表現が異なるため、関数

$$z \mapsto \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z\|$$

の具体的な形も線分ごとに異なる．その結果、条件

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(1 - \lambda)x + \lambda z\| = 1 - \delta$$

を満たす点の位置は、パラメータ α および δ の値に応じて変化し、異なる線分上で達成される場合が生じる．したがって、 $\omega(x, \delta)$ の値は、これらの幾何的状況の違いに応じて複数の場合に分けて記述する必要がある．

このような方針で計算を行うことで、正六角形ノルムの場合には、 $\omega(x, \delta)$ を完全に決定することができる．具体的な計算および結果については、[4] を参照のこと．



図 3 $G_0(x, \delta)$ の位置の変化

参考文献

- [1] J. Alonso and P. Martín, *Moving triangles over a sphere*, Math. Nachr., **279** (2006), 1735–1738.
- [2] M. I. Kadets, *Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces*, Funct. Anal. Appl., **1** (1967), 53–62.
- [3] G. Pisier, *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math., **20** (1975), 326–350.
- [4] R. Tanaka and T. Umeya, *The local modulus of convexity for the regular hexagonal norm*, in preparation.