

# ヒルベルト $C^*$ 加群における Birkhoff-James 型直交性の系列とその相互関係

東京理科大学 中村 淳平

Jumpei Nakamura

Tokyo university of science

## 1 導入

$C^*$  環はノルムによる幾何的な構造と、線形演算、積、対合による代数的な構造とを備えた数学的対象であり、これらの構造は内部で綿密に絡み合っている。その結果、幾何的な構造が代数的な構造をある程度決定づけるという現象がしばしば観測される。このように、部分的な構造が全体の構造に影響を及ぼす性質を剛性と呼ぶ。 $C^*$  環における幾何的構造の剛性を表す一例として、Kadison による以下の定理がある。

**定理 1.1 (Kadison[4])**  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  を単位的  $C^*$  環とする。この時  $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  が線形等距離同型写像であることと、 $\Phi$  が Jordan  $*$ -同型写像に左から  $\mathfrak{B}$  のユニタリ元を作用させたものであることは同値である。

上記の定理は単位的  $C^*$  環のバナッハ空間としての構造が、Jordan 積に関する代数的な構造を伴うことを示している。このように、一見独立した構造が互いに影響を及ぼすことは、 $C^*$  環の (幾何的・代数的) 分類問題などを調べる上で重要なテーマの一つである。

本稿では、内積空間における直交性のノルム空間への一般化である BJ 直交性と、そのヒルベルト  $C^*$  加群における強化である強 BJ 直交性、さらにそれら 2 つの中間的な強さを持つ準強 BJ 直交性に注目し、これら 3 つの BJ 型直交性の同値性と  $C^*$  環の代数的な性質との関係について調べた結果を報告する。

## 2 準備

### 2.1 ヒルベルト $C^*$ 加群

**定義 2.1**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  を右  $\mathfrak{A}$ -加群とする。 $\mathcal{M}$  が以下を満たすとき、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群という。

1.  $\mathcal{M}$  は以下を満たす  $\mathfrak{A}$  値内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{A}$  を備えている。  
 すべての  $x, y, z \in \mathcal{M}$  と  $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$  に対し
  - (a)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  かつ  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
  - (b)  $\langle x, y\alpha + z\beta \rangle = \langle x, y \rangle \alpha + \langle x, z \rangle \beta$
  - (c)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
2.  $\mathcal{M}$  は  $\langle x, x \rangle$  により定義されるノルム  $\|x\|_{\mathcal{M}} = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$  に関して完備である。

ヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群  $\mathcal{M}$  が **full** であるとは、 $\mathfrak{A}$  において  $\{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathcal{M}\}$  の線形包が稠密であることを表す。任意の  $C^*$  環  $\mathfrak{A}$  において  $\langle x, y \rangle = x^*y$  と  $\mathfrak{A}$  値内積を定めると、 $\mathfrak{A}$  自身は full ヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群となる。

### 2.2 BJ 型直交性

ヒルベルト空間における直交性の概念を、一般のノルム空間に拡張したものとして以下の BJ 直交性 (Birkhoff-James orthogonality) がある。

**定義 2.2 (BJ 直交性)** バナッハ空間  $X$  の元  $x, y \in X$  が全ての複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対し  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  を満たすとき、 $x$  が  $y$  に **BJ 直交** すると言い、 $x \perp_{BJ} y$  で表す。

ヒルベルト  $C^*$  加群は  $C^*$  環の元による右作用を備えるため、BJ 直交性のスカラー倍に関する性質を強化した以下の **強 BJ 直交性** を導入することができる。

**定義 2.3 (強 BJ 直交性)**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群とする。 $x, y \in \mathcal{M}$  に対し、 $\|x + ya\| \geq \|x\|$  が任意の  $a \in \mathfrak{A}$  に対して成り立つ時、 $x$  が  $y$  に **強 BJ 直交** すると言い  $x \perp_{BJ}^s y$  で表す。

特に、任意の  $a \in \mathfrak{A}$  に対して  $x \perp_{BJ} ya$  が成り立つことと  $x \perp_{BJ}^s y$  は同値である。また、ヒルベルト  $C^*$  加群はバナッハ空間であるため BJ 直交が定義できるが、状態を用いた BJ 直交性の特徴付けとして次の定理がある。

**定理 2.1**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群とする。 $\mathcal{M}$  の元  $x, y \in \mathcal{M}$  に対し  $x$  が  $y$  に BJ 直交することと、 $\mathfrak{A}$  のある状態  $\rho$  が存在して  $\rho(\langle x, x \rangle) = \|x\|^2$  かつ  $\rho(\langle x, y \rangle) = 0$  を満たすことは同値である [2, Theorem 2.7]。

上記の定理は BJ 直交性を特定の条件を満たす状態の存在に帰着させている。強 BJ 直交性に関しても、状態を純粋状態に制限し、さらに条件を強めることで同様な特徴づけを与えることができる (定理 2.2)。また、**準強 BJ 直交性** という BJ 型直交性もこのような観点から BJ 直交性を強めたものとしてみることができる (定義 2.4)。[1, Theorem 2.5]、[6, Definition 1.3]。

**定理 2.2 (強 BJ 直交性の特徴付け)**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群、 $x$  と  $y$  を  $\mathcal{M}$  の元とする。 $x$  が  $y$  に **強 BJ 直交** することと、 $\mathfrak{A}$  のある純粋状態  $\rho$  が存在して  $\rho(\langle x, x \rangle) = \|x\|^2$  かつ  $\rho(\langle x, y \rangle) = 0$  を満たすことは同値である。

**定義 2.4 (準強 BJ 直交性)**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群とする。 $x, y \in \mathcal{M}$  に対し、 $\mathfrak{A}$  のある純粋状態  $\rho$  が存在して  $\rho(\langle x, x \rangle) = \|x\|^2$  かつ  $\rho(\langle x, y \rangle) = 0$  を満たすとき、 $x$  が  $y$  に **準強 BJ 直交** と言い  $x \perp_{BJ}^q y$  で表す。

以上の 3 つの BJ 型直交性は、任意のヒルベルト  $C^*$  加群の元  $x, y$  に関して以下の包含関係を持つ。[5]

$$x \perp_{BJ}^s y \Rightarrow x \perp_{BJ}^q y \Rightarrow x \perp_{BJ} y$$

この包含関係に関して、特定の  $C^*$  環  $\mathfrak{A}$  では、逆の包含も成り立つことが分かっている。

**命題 2.3 (Remark 3.16, Remark 3.17[5])**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環とする。この時、以下が成り立つ

- $\mathfrak{A}$  が可換である時、準強 BJ 直交性と強 BJ 直交性は同値。
- $\mathfrak{A}$  が  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  と  $*$ -同型である時、BJ 直交性と準強 BJ 直交性は同値

上記をより洗練させ、BJ 型直交性の同値が成り立つような一般的な条件を調べるのが本稿の目的である。

## 2.3 $C^*$ 環の代数的な性質

BJ 型直交性と  $C^*$  環の代数的な性質との関係を調べるために、 $C^*$  環の代数的な性質を導入する。

**定義 2.5**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環とする。

- $\mathfrak{A}$  環が**初等的**であるとは、 $\mathfrak{A}$  が  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  と  $*$ -同型であることをいう。

- $\mathfrak{A}$  が単純であるとは、 $\mathfrak{A}$  が自明でない閉両側イデアルを持たないことをいう。
- $\mathfrak{A}$  が原始的であるとは、 $\mathfrak{A}$  が忠実な既約表現を持つことをいう。
- $\mathfrak{A}$  が素であるとは、 $\mathfrak{A}$  の 0 でない任意の閉両側イデアルの積イデアルが常に 0 でないことをいう。

上記の性質の間には以下の包含関係が成り立つ。

$$\text{初等的} \Rightarrow \text{単純} \Rightarrow \text{原始的} \Rightarrow \text{素}$$

可換  $C^*$  環においては、これらの性質はすべて  $C^*$  環が複素数体であることと同値になる。

### 3 主結果

この節では、3つの BJ 型直交性の同値性と  $C^*$  環の代数的な性質との関係について主結果とその証明の概略を述べる。

準強 BJ 直交性と強 BJ 直交性の同値性に関して、次の定理が成り立つ。

**定理 3.1**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群とする。この時、以下は同値。

- $\mathfrak{A}$  が可換である。
- $\mathcal{M}$  における準強 BJ 直交性と強 BJ 直交性が同値である。

$x \perp_{BJ}^q y$  とする。この時、ある純粋状態  $\rho$  が存在して  $\rho(\langle x, y \rangle) = 0$  が成り立つ。 $\mathfrak{A}$  が可換であるとする、 $\mathfrak{A}$  上の純粋状態はすべて乗法的である。従って任意の  $a \in \mathfrak{A}$  に対して、 $\rho(\langle x, ya \rangle) = \rho(\langle x, y \rangle)\rho(a) = 0$  が成り立つ。つまり任意の  $a \in \mathfrak{A}$  に対して  $x \perp_{BJ} ya$  が成り立ち、これは  $x \perp_{BJ}^s y$  を意味する。

可換でないヒルベルト  $C^*$  加群の例として  $(\mathcal{M}, \mathfrak{A}) = (M_2(\mathbb{C}), M_2(\mathbb{C}))$  を考える。 $(A, B \in M_2(\mathbb{C}))$  に対して  $\langle A, B \rangle := B^*A$  と定める) この時、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  と定めると

$$\langle A|e_1, e_1\rangle = 1 \text{ かつ } \langle Ae_1, Be_1\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 0$$

より  $\mathcal{P}_A$  の元として  $e_1$  のベクトル状態  $\omega_{e_1}$  ( $T \in \mathfrak{A}$  に対して  $\omega_{e_1}(T) := \langle Te_1, e_1 \rangle$ ) をとることにより、 $A \perp_{BJ}^q B$  である。一方で  $\|A + B(-B)\| = \|0\| = 0$  より  $A \not\perp_{BJ}^s B$  である。このような有限次元での現象を Kadison の推移定理を用いて無限次元に拡張することで、 $\mathfrak{A}$  が可換でないときに準強 BJ 直交性と強 BJ 直交性が同値でないことが示される。この定理により、準強 BJ 直交性と強 BJ 直交性の同値性は  $C^*$  環の可換性によって完全に特徴づけ

られることが分かる。

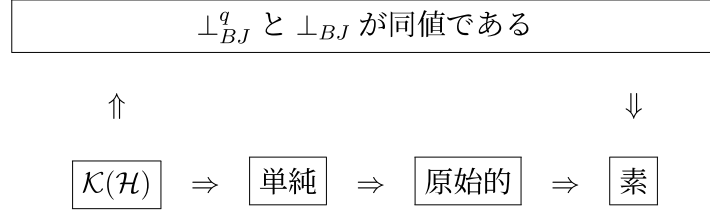
$$\boxed{\perp_{BJ}^q \text{ と } \perp_{BJ} \text{ が同値}} \iff \boxed{\mathfrak{A} \text{ が可換}}$$

次に、BJ 直交性と準強 BJ 直交性の同値性に関して以下の定理が成り立つ。

**定理 3.2**  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$  環、 $\mathcal{M}$  をヒルベルト  $\mathfrak{A}$  加群とする。この時  $\mathcal{M}$  において BJ 直交性と準強 BJ 直交性が同値であるならば  $\mathfrak{A}$  は素である。

証明においては、prime でない  $C^*$  環によるヒルベルト  $C^*$  加群に対して、BJ 直交性と準強 BJ 直交性が同値でない例を一般的に構成できることを示す。

これまでに分かっていることを整理すると次のような図になる。



今度疑問となるのは、代数的な条件として単純性や原始的であることが、BJ 直交性と準強 BJ 直交性の同値性を特徴づけるかどうかである。しかし、これは成り立たないことが以下の議論から分かっている。

以下の定理は  $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$  において、作用するヒルベルト空間の可分性によって  $\perp_{BJ}$  と  $\perp_{BJ}^q$  の同値性が特徴づけを与える。

**定理 3.3**  $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間とする。この時次が同値。

- $\mathcal{H}$  が可分でない。
- $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$  において準強 BJ 直交性と BJ 直交性が同値である。

上記の定理の  $\mathcal{H}$  の非可分性から 2 つの BJ 直交性の同値性を導く部分のみ証明の概略を説明する。まず、BJ 直交  $\perp_{BJ}$  の特徴付けと準強 BJ 直交の定義は  $\perp_{BJ}^q$  は次のようであった。  $A, B \in \mathfrak{A}$  に対して

$$A \perp_{BJ} B \iff \text{ある状態 } \rho \text{ が存在して } \rho(|A|) = \|A\| \text{ かつ } \rho(B^*A).$$

$$A \perp_{BJ}^q B \iff \text{ある純粋状態 } \rho \text{ が存在して } \rho(|A|) = \|A\| \text{ かつ } \rho(B^*A) = 0.$$

この 2 つの直交性は汎関数  $\rho$  を状態から取るか、純粋状態から取るかかの違いしかない。そのため、直交を示す状態の存在が、純粋状態の存在を導くことを示せば十分である。  $A + \alpha I \perp_{BJ} B + \beta I$  (ただし  $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ) と仮定すると  $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$  は  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  の単位化である

から常にこの形で書ける)、定義よりある状態  $\rho$  が存在して  $\rho((A + \alpha I)^*(B + \beta I)) = 0$  等を満たす。 $\rho$  をベクトル状態の線形和  $\rho_u$  と特異状態  $\rho_s$  に分解 ( $\rho = \rho_u + \rho_s$ ) すると、コンパクト作用素に対する特異状態の性質から

$$\rho_u((A + \alpha I)^*(B + \beta I)) = -\bar{\alpha}\beta\|\rho_s\|$$

を得る。一方で、 $A, B$  はコンパクトであり  $\mathcal{H}$  は非可分であるため、 $A\xi = B\xi = 0$  を満たす単位ベクトル  $\xi \in \mathcal{H}$  が存在する。この  $\xi$  が定める純粋状態  $\omega_\xi$  による評価値は  $\omega_\xi((A + \alpha I)^*(B + \beta I)) = \bar{\alpha}\beta$  となる。正規化した  $\rho_u$  と  $\omega_\xi$  による評価値は、複素平面上において 0 を挟んで反対側に位置する。Toeplitz-Hausdorff の定理 [3] によれば有界線形作用素の数域は凸集合であるため、この 2 点間にある 0 も数域に含まれ、 $0 \in W((A + \alpha I)^*(B + \beta I))$  が従う。以上より、

$$\omega_x((A + \alpha I)^*(B + \beta I)) = 0 \text{ かつ } \omega_x(|A + \alpha I|^2) = \|A + \alpha I\|^2$$

を満たす純粋状態  $\omega_x$  の存在が導かれ、 $A + \alpha I \perp_{BJ}^q B + \beta I$  が示される。

$\mathcal{K}(\mathcal{H})$  の単位化である  $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$  は、 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  を閉両側イデアルとして含むため単純性は持たず、 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  自身が  $B(\mathcal{H})$  の中で既約に作用することから、それを含む  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  も既約に作用し、原始的であることが分かる。これらのことから、次のことが分かる。

- $\mathcal{H}$  が可分である時、 $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$  は単純でなく、 $\perp_{BJ}$  と  $\perp_{BJ}^q$  は同値。
- $\mathcal{H}$  が非可分である時、 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  は原始的であり、 $\perp_{BJ}$  と  $\perp_{BJ}^q$  は同値でない。

このことから、図式について以下のように修正できる。

|                                                                                                      |   |                                                                    |                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\perp_{BJ}^q \text{ と } \perp_{BJ} \text{ が同値である}$                                                  |   |                                                                    |                                                                  |
| ↑                                                                                                    | ↯ | ↯                                                                  | ↓                                                                |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>\mathcal{K}(\mathcal{H})</math></div> | ⇒ | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">単純</div>  | ⇒                                                                |
|                                                                                                      |   | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">原始的</div> | ⇒                                                                |
|                                                                                                      |   |                                                                    | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">素</div> |

以上が本稿の主結果である。準強 BJ 直交性と BJ 直交性の代数的な特徴づけを調べるために、今後の課題としては以下のようなものが挙げられる。

- $C^*$  環の単純性が、準強 BJ 直交性と BJ 直交性の同値性を導くか？
- 準強 BJ 直交性と BJ 直交性の同値性が、 $C^*$  環が原始的であることを導くか？

## 参考文献

- [1] Arambašić, Ljiljana, Rajić, and Rajna, *A strong version of the Birkhoff-James orthogonality in Hilbert  $C^*$ -modules*, Ann. Funct. Anal., **5** (2014), 109–120.
- [2] Ljiljana Arambašić, Rajić, and Rajna, *The Birkhoff-James orthogonality in Hilbert  $C^*$ -modules*, Linear Algebra Appl., **437** (2012), 1913–1929.
- [3] Karl E. Gustafson and Duggirala K. M. Rao, *Numerical range*, pp. 1–26, Springer New York, New York, NY, 1997.
- [4] Richard V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, The Annals of Mathematics **54** (1951), 325.
- [5] Saikat Roy Koki Igarashi, Jumpei Nakamura and Ryotaro Tanaka, *On order isomorphisms of locally parallel sets between  $C^*$ -algebras: The case of matrix algebras*, Linear Algebra Appl., **722** (2025), 190–219.
- [6] Soumitra Daptari Koki Igarashi, Jumpei Nakamura and Ryotaro Tanaka, *On relationship among three types of birkhoff-james orthogonality.*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.15086>.

Tokyo University of Science

東京都新宿区神楽坂 1-3

JAPAN

E-mail address: 1425526@ed.tus.ac.jp