

Young's inequality for Banach function spaces

野ヶ山 徹* (東京理科大学)

1 Introduction

本稿では、畳み込み積 $f * g$ に対する Young の不等式

$$\|f * g\|_X \lesssim \|f\|_X \|g\|_{L^1}$$

について考察する. また応用として, Banach 関数空間に付随した Besov 空間における熱方程式の解に対する最大正則性評価を導出する.

まず, 一般的な関数空間の枠組みを定義する. $L^0(\mathbb{R}^n)$ で $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数全体の集合を表す.

Definition 1.1. $X \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ を可測関数からなる Banach 空間とする. 以下の条件を考える.

1. (Lattice property) 任意の $f \in X$ と $g \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対し $|g| \leq |f|$ ならば, $g \in X$ であり, $\|g\|_X \leq \|f\|_X$ が成り立つ.
2. (Fatou property) X の点列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $0 \leq f_n \uparrow f$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_X < \infty$ を満たすならば $f \in X$ であり, $\|f\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_X$ が成り立つ.
3. 任意の測度有限な可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対し $\chi_E \in X$ である.
4. 任意の $\mathbb{R}^n$ の球 B に対し $\chi_B \in X$ である.
5. 任意の測度有限な可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ と $f \in X$ に対し $\int_E |f(x)| dx \leq C \|f\|_X$ が成り立つ. ここで, C は f によらない定数である.
6. 任意の $\mathbb{R}^n$ の球 B と $f \in X$ に対し $\int_B |f(x)| dx \leq C \|f\|_X$ が成り立つ. ここで, C は f によらない定数である.

条件 1,2,3,5 をすべて満たしている X を Banach 関数空間という. また, 条件 1,2,4,6 をすべて満たしている X を ball Banach 関数空間という.

*toru.nogayama@gmail.com, 東京都新宿区神楽坂 1-3 東京理科大学 理学部第二部数学科
本研究は科研費 (課題番号:24K22839) の助成を受けたものである

簡単にわかることとして、球は測度有限な可測集合になっているので、条件3が成り立つならば条件4が、条件5が成り立つならば条件6がそれぞれ成り立つ。したがって、Banach 関数空間は ball Banach 関数空間になっていることが分かる。

詳しい性質については [1] を参照せよ。また、最近の survey として [8] が挙げられる。([8] では Lattice property と Sarturation property の2つのみを仮定して議論を進めている。より条件を弱めた Banach 関数空間については [4] も参照せよ。)

ball Banach 関数空間における Young の不等式が成り立つ条件を考えるために L^p 空間における Young の不等式の証明を思い出してみると

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L^p} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y)dy \right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y)\|_{L^p} |g(y)|dy \\ &= \|f\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}\end{aligned}$$

である。重要なのは Minkowski の不等式と L^p ノルムにおける平行移動不変性である。実際にこれらの条件が Young の不等式で大事になってくる。以下が今回の主定理である。

Theorem 1.2. X を ball Banach 関数空間であるとする。このとき、次が成り立つ。

(1) 任意の $f \in X$ と $z \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|f(\cdot - z)\|_X \lesssim \|f\|_X \quad (1.1)$$

が成り立っているならば、任意の $f \in X$ と $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し、Young の不等式

$$\|f * g\|_X \lesssim \|f\|_X \|g\|_{L^1}$$

が成り立つ。

(2) $f \in X$ とする。任意の $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し $\|f * g\|_X \lesssim \|f\|_X \|g\|_{L^1}$ が成り立っているならば、任意の $z \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$\|f(\cdot - z)\|_X \lesssim \|f\|_X$$

が成り立つ。

2 Preliminaries

証明にあたって Banach 関数空間の Köthe dual を定義する。

Definition 2.1. X を ball Banach 関数空間とする。 X の Köthe dual、もしくは X の associate space X' を

$$X' = \{g \in L^0(\mathbb{R}^n) : fg \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ for all } f \in X\}$$

として定義する。 $g \in X'$ に対して、associate norm を

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}$$

と定義する。

associate norm の形から Hölder の不等式が成り立つことがわかる.

Lemma 2.2. X を *ball Banach* 関数空間とする. このとき, $f \in X, g \in X'$ ならば $fg \in L^1$ であり,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}$$

が成り立つ.

この Hölder の不等式から $X \subset X''$ が成り立つことがすぐにわかる. 実は逆の包含も成り立つことが知られている.

Theorem 2.3 (Lorentz–Luxemburg theorem). X を *ball Banach* 関数空間とする. このとき, $X'' = X$ が成り立つ.

Remark 2.4. [8] で定義される Banach 関数空間は Lattice property と Saturation property の2つしか仮定しない. このとき, 一般に $X'' = X$ は成り立たない. $X'' = X$ となる必要十分条件は X が Fatou property をもつことであると知られている. (詳しくは [8] を参照せよ.)

次に Minkowski の不等式について考える. 実は次のように一般的な形で書ける.

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_{X''} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_X dy.$$

証明は [4, p.45-46] に載っている. 実際, Köthe dual の定義と Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_{X''} &= \sup_{g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) g(x) \right| dx \\ &= \sup_{g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) g(x) dx \right| dy \end{aligned}$$

となる. Hölder の不等式を使うことで

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_{X''} \leq \sup_{g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_X \|g\|_{X'} dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_X dy$$

が成り立つ.

もちろん, いま X は *ball Banach* 関数空間なので, $X'' = X$ が成り立ち, 通常の Minkowski の不等式が成り立つことになる.

3 Proof of main theorem

まず (1) を示す. 任意の $f \in X$ と $z \in \mathbb{R}^n$ に対して (1.1) が成り立つと仮定する. $g \in L^1$ とする. このとき, Minkowski の不等式と (1.1) より

$$\begin{aligned} \|f * g\|_X &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y) g(y) dy \right\|_X \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y)\|_X |g(y)| dy \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_X |g(y)| dy = \|f\|_X \|g\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

したがって、Young の不等式を得る。

次に (2) を示す。 $f \in X$ とする。関数 f に対して、Young の不等式が成り立つと仮定する。 $z \in \mathbb{R}^n$ とする。 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$g_k = k^n \chi_{[0,1]^n}(k(\cdot - z))$$

とおく。明らかに $g_k \in L^1$ であり、 $\|g_k\|_{L^1} = 1$ となる。さらに $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$f * g_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) k^n \chi_{[0,1]^n}(k(y-z)) dy = \int_{[0,k^{-1}]^n} k^n f(x-y-z) dy$$

が成り立つ。したがって、Young の不等式より

$$\left\| \frac{1}{k^{-n}} \int_{[0,k^{-1}]^n} f(\cdot - y - z) dy \right\|_X \lesssim \|f\|_X \|g_k\|_{L^1} = \|f\|_X$$

が成り立つ。よって、ルベークの微分定理 (ball Banach 関数空間の条件 6 より適用できる) と Fatou property より

$$\|f(\cdot - z)\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k^{-n}} \int_{[0,k^{-1}]^n} f(\cdot - y - z) dy \right\|_X \lesssim \|f\|_X \|g_k\|_{L^1} = \|f\|_X \quad (3.2)$$

を得る。したがって、結論を得る。

4 Application to maximal regularity estimate

Young の不等式を応用して Besov 型の関数空間において熱方程式に対する最大正則性評価を導出する。次の形の熱方程式を考える。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.1)$$

非線型項 f と初期値 u_0 は後ほど定義する Besov 型の関数空間に属しているとする。

Besov 空間を定義するためにいくつか定義を与えておく。 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して、Fourier 変換と逆 Fourier 変換をそれぞれ

$$\mathcal{F}f(\xi) \equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}f(x) \equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

と定義する。

よく知られているように $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素として自然に拡張できる。 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して、 $\psi(D)f = \mathcal{F}^{-1}[\psi \mathcal{F}f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と定義する。

$B(r)$ で原点中心、半径 $r > 0$ の開球を表す。 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を

$$\chi_{B(4) \setminus B(2)} \leq \varphi \leq \chi_{B(8) \setminus B(1)}$$

を満たすものとし、 $\varphi_j \equiv \varphi(2^{-j} \cdot)$ と定める。 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で多項式全体からなる集合とする。

以下、 X は (1.1) を満たす ball Banach 関数空間とする。この準備の下、 X に付随した (斉次) Besov 空間を次のように定義する。

Definition 4.1 (X に付随した (斉次) Besov 空間). $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq \infty$ とする. このとき, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|f\|_{\dot{B}_{X,r}^s} \equiv \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{js} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F}f]\|_X)^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

と定める. X に付随した (斉次) Besov 空間 $\dot{B}_{X,r}^s(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\dot{B}_{X,r}^s} < \infty$ となる $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合とする.

この空間は [7] にある generalized Besov type space の特別な場合となっている. 数列空間 ℓ^r の埋め込みを考えることで, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\dot{B}_{X,r_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{X,r_2}^s(\mathbb{R}^n) \quad (4.2)$$

が成り立つことに注意する.

X に付随した (斉次) Besov 空間 $\dot{B}_{X,r}^s$ における最大正則性評価を述べる. 1 つ目は L^ρ 最大正則性評価である.

Theorem 4.2. $1 \leq \rho \leq \infty$ とする. $u_0 \in \dot{B}_{X,\rho}^{2-2/\rho}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\rho}^0(\mathbb{R}^n))$ とする. このとき, 熱方程式 (4.1) の解 u に対して

$$\|\partial_t u\|_{L^\rho(0,\infty;\dot{B}_{X,\rho}^0)} + \|\Delta u\|_{L^\rho(0,\infty;\dot{B}_{X,\rho}^0)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{B}_{X,\rho}^{2-2/\rho}} + \|f\|_{L^\rho(0,\infty;\dot{B}_{X,\rho}^0)}$$

が成り立つ.

2 つ目は Lorentz 最大正則性評価である.

Theorem 4.3. $1 < \rho < \infty$, $1 \leq w \leq \infty$, $1 \leq \sigma \leq \infty$ とする. $u_0 \in \dot{B}_{X,w}^{2-2/\rho}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^{\rho,w}(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0(\mathbb{R}^n))$ とする. このとき, 熱方程式 (4.1) の解 u に対して

$$\|\partial_t u\|_{L^{\rho,w}(0,\infty;\dot{B}_{X,\sigma}^0)} + \|\Delta u\|_{L^{\rho,w}(0,\infty;\dot{B}_{X,\sigma}^0)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{B}_{X,w}^{2-2/\rho}} + \|f\|_{L^{\rho,w}(0,\infty;\dot{B}_{X,\sigma}^0)}$$

が成り立つ.

注意として, リフト作用素を考えることで Besov 空間の微分指数は 0 から一般の $s \in \mathbb{R}$ に変えることができる. (そのとき, $2 - 2/\rho$ は $2 - 2/\rho + s$ となる.)

最大正則性評価は偏微分方程式の解析に重要な役割を果たしている. ([3, 5, 6, 13] やその中の文献を参照せよ.) しかしながら, 非反射的 ($X^{**} \neq X$) な関数空間に対しては一般論を適用できない. したがってそのような関数空間に対しては個別に評価を導出する必要がある. 例えば, 小川氏と清水氏は Besov 空間 $\dot{B}_{1,r}^s$ における評価を導出している ([12]). Besov–Morrey 空間においては筆者と澤野氏により [10, 11] で評価を導出した. Theorems 4.2 と 4.3 はこれらの結果を含む形になっている. (例えば, X を Morrey 空間とすると, $\dot{B}_{X,r}^s$ は斉次 Besov–Morrey 空間となり, これは非反射的である.)

証明は, Duhamel の原理から, 積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s) ds \quad (t > 0)$$

を考え, これを評価していく. ここでは非線型項の評価を与える.

Lemma 4.4. $1 \leq \sigma \leq \infty$, $1 < \rho < \infty$ とする. このとき, $f \in L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0(\mathbb{R}^n))$ に対して

$$\left\| \Delta \int_0^t e^{(t-\tilde{t})\Delta} [f(\tilde{t})] d\tilde{t} \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0)} \lesssim \|f\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0)} \quad (4.3)$$

が成り立つ.

Proof. まず, $1 < \sigma < \infty$ とする. このとき, 定義通り書き下すと

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta \int_0^t e^{(t-\tilde{t})\Delta} [f(\tilde{t})] d\tilde{t} \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0)} \\ &= \left\{ \int_0^\infty \left[\sum_{j=-\infty}^\infty \left\{ \left\| \int_0^t \Delta e^{(t-\tilde{t})\Delta} \varphi_j(D) f(\tilde{t}) d\tilde{t} \right\|_X \right\}^\sigma \right]^{\frac{\rho}{\sigma}} dt \right\}^{\frac{1}{\rho}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる. $\text{supp } \varphi_j \subset B(2^{j+3}) \setminus B(2^{j-1})$ なので, Minkowski の不等式と Theorem 1.2 より,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \Delta e^{(t-\tilde{t})\Delta} \varphi_j(D) f(\tilde{t}) d\tilde{t} \right\|_X &\sim \left\| \int_0^t \Delta e^{(t-\tilde{t})\Delta} \left(\sum_{k=j-2}^{j+2} \varphi_k(D) \right) \varphi_j(D) f(\tilde{t}) d\tilde{t} \right\|_X \\ &\leq \int_0^t \sum_{k=j-2}^{j+2} \left\| \Delta e^{(t-\tilde{t})\Delta} \varphi_k(D) \varphi_j(D) f(\tilde{t}) \right\|_X d\tilde{t} \\ &\lesssim \int_0^t \sum_{k=j-2}^{j+2} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[|\cdot|^2 e^{-(t-\tilde{t})|\cdot|^2} \varphi_k \right] \right\|_{L^1} \left\| \varphi_j(D) f(\tilde{t}) \right\|_X d\tilde{t} \\ &\sim \int_0^t 4^j e^{-4^j(t-\tilde{t})} \left\| \varphi_j(D) f(\tilde{t}) \right\|_X d\tilde{t} \end{aligned}$$

を得る. (4.4) に代入して

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta \int_0^t e^{(t-\tilde{t})\Delta} [f(\tilde{t})] d\tilde{t} \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0)} \\ &\lesssim \left\{ \int_0^\infty \left[\sum_{j=-\infty}^\infty \left\{ \int_0^t 4^j e^{-4^j(t-\tilde{t})} \left\| \varphi_j(D) f(\tilde{t}) \right\|_X d\tilde{t} \right\}^\sigma \right]^{\frac{\rho}{\sigma}} dt \right\}^{\frac{1}{\rho}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

区間 $(0, \infty)$ 上の非負値可測関数 F に対し,

$$\int_0^t a e^{-a(t-s)} F(s) ds \leq (1 + e^{-1}) M F(t)$$

([11, Lemma 2.7]) が成り立つので,

$$\left\| \Delta \int_0^t e^{(t-\tilde{t})\Delta} [f(\tilde{t})] d\tilde{t} \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X,\sigma}^0)} \lesssim \left\{ \int_0^\infty \left(\sum_{j=-\infty}^\infty M \left[\left\| \varphi_j(D) f(\cdot) \right\|_X \right] (t)^\sigma \right)^{\frac{\rho}{\sigma}} dt \right\}^{\frac{1}{\rho}}$$

と評価できる. $1 < \rho, \sigma < \infty$ であったので, Fefferman–Stein のベクトル値不等式を用いて

$$\left\| \Delta \int_0^t e^{(t-\tilde{t})\Delta} [f(\tilde{t})] d\tilde{t} \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X, \sigma}^0)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\varphi_j(D)f\|_X^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right\|_{L_t^\rho} = \|f\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X, \sigma}^0)}.$$

を得る. $\sigma = \infty$ のときも同じ議論で示すことができる.

$\sigma = 1$ のときは双対性の議論から, 非負値関数の列 $\{g_j\} \subset L^{\rho'}(0, \infty; \ell^\infty)$ に対し

$$\left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} \int_s^\infty 4^j e^{-4^j(t-s)} [g_j(t)] dt \right\|_{L_s^{\rho'}(0, \infty)} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} g_j \right\|_{L_s^{\rho'}(0, \infty)} \quad (4.6)$$

を示せば十分である. 実際に, (4.6) が示せたら (4.5) によって

$$\left\| \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [f(s)] ds \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X, 1}^0)} \lesssim \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^t 4^j e^{-4^j(t-s)} \|\varphi_j(D)f(s)\|_X ds \right\|_{L^\rho(0, \infty)}$$

が成り立つ. $\|g_j\|_{L^{\rho'}(0, \infty; \ell^\infty)} = 1$ なる $g_j \in L^{\rho'}(0, \infty; \ell^\infty)$ に対して, 双対性と Fubini の定理から

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [f(s)] ds \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X, 1}^0)} \\ & \lesssim \int_0^\infty \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t 4^j e^{-4^j(t-s)} \|\varphi_j(D)f(s)\|_X ds \right] g_j(t) dt \\ & = \int_0^t \int_s^\infty \sum_{j=-\infty}^{\infty} 4^j e^{-4^j(t-s)} \|\varphi_j(D)f(s)\|_X g_j(t) dt ds \\ & = \int_0^t \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\varphi_j(D)f(s)\|_X \left(\int_s^\infty 4^j e^{-4^j(t-s)} g_j(t) dt \right) ds. \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [f(s)] ds \right\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X, 1}^0)} \\ & \lesssim \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\varphi_j(D)f(s)\|_X \right\|_{L^\rho} \left\| \sup_j \int_s^\infty 4^j e^{-4^j(t-s)} g_j(t) dt \right\|_{L^{\rho'}} \lesssim \|f\|_{L^\rho(0, \infty; \dot{B}_{X, 1}^0)} \end{aligned}$$

となり, 欲しい不等式を得る. そこで (4.6) を示そう. $s \in (0, \infty)$ を固定する. $s < t$ に対し, $G_j(t) = \int_s^t g_j(\tilde{t}) d\tilde{t}$ とおくと, $G_j(t) \leq (t-s)M[g_j](s)$ であり, $G_j'(t) = g_j(t)$ となる. 部分積分をすることで

$$\int_s^\infty 4^j e^{-4^j(t-s)} [g_j(t)] dt \leq M[g_j](s)$$

を得る. あとは Fefferman–Stein のベクトル値不等式を用いて (4.6) を得る. $\square$

最後に Lorentz 最大正則性評価については次のベクトル値の実補間を用いることで得られる．記号を1つ用意する． X を Banach 空間とする． $s \in \mathbb{R}$, $q > 0$ とする．このとき, X の点列 (a_m) に対し

$$\|(a_m)\|_{\dot{\ell}_q^s(X)} = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (2^{sm} \|a_m\|_X)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

と定め, $\dot{\ell}_q^s(X)$ で $\|(a_m)\|_{\dot{\ell}_q^s(X)} < \infty$ なる X の点列 (a_m) 全体の集合とする．

Lemma 4.5 ([2, 5.3.1 Theorem]). X を Banach 空間とする． $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ とする．このとき,

$$(L^{p_0}(X), L^{p_1}(X))_{\theta, q} = L^{p, q}(X)$$

が成り立つ．ここで p は $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$ と定める．

Lemma 4.6 ([2, 5.6.1 Theorem]). $0 < \theta < 1$ とする． $0 < q_0 \leq \infty$, $0 < q_1 \leq \infty$ とし, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ を $s_0 \neq s_1$ のようにとる．このとき, 任意の $0 < q \leq \infty$ に対し,

$$\left(\dot{\ell}_{q_0}^{s_0}(X), \dot{\ell}_{q_1}^{s_1}(X) \right)_{\theta, q} = \dot{\ell}_q^s(X)$$

が成り立つ．ここで, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ である．さらに, $s = s_0 = s_1$ のときは, $1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$ ならば,

$$\left(\dot{\ell}_{q_0}^s(X), \dot{\ell}_{q_1}^s(X) \right)_{\theta, q} = \dot{\ell}_q^s(X)$$

が成り立つ．

References

- [1] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics, Vol 129, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [2] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [3] G. Dore and A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z. **196** (1987), no. 2, 189–201.
- [4] S. G. Kreĭn, Ju. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*. Translated from the Russian by J. Szűcs Transl. Math. Monogr., 54 American Mathematical Society, Providence, RI, 1982. xii+375 pp.
- [5] P. C. Kunstmann and L. Weis, *Maximal L_p -regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ -functional calculus*, Functional analytic methods for evolution equations, 65–311, Lecture Notes in Math., 1855, Springer-Verlag, Berlin, 2004

- [6] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type* (Russian), Translated from the Russian by S. Smith Transl. Math. Monogr., Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, RI, 1968. xi+648 pp.
- [7] Y. Liang, D. Yang, W. Yuan, Y. Sawano, and T. Ullrich, *A new framework for generalized Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces*, Dissertationes Math. **489** (2013), 114 pp.
- [8] E. Lorist and Z. Nieraeth, *Banach function spaces done right*, Indag. Math. (N.S.) **35** (2024), no. 2, 247–268.
- [9] T. Nogayama, *Young's inequality for Banach function spaces and its application to the maximal regularity estimate*, preprint, arXiv:2509.05252.
- [10] T. Nogayama and Y. Sawano, *Maximal regularity in Morrey spaces and its application to two-dimensional Keller–Segel system*, Adv. Math. Sci. Appl. **32** (1) (2023) 97–134.
- [11] T. Nogayama and Y. Sawano, *Singular limit problem for the Keller–Segel system and drift-diffusion system in scaling critical Besov–Morrey spaces*, J. Math. Anal. Appl. **529** (2024), no. 2, Paper No. 127207, 51 pp.
- [12] T. Ogawa, S. Shimizu, *End-point maximal regularity and its application to two-dimensional Keller–Segel system*, Math. Z., **264** (2010) 601–628.
- [13] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity*, Math. Ann. **319** (2001), no. 4, 735–758.