

マルティンゲール Morrey 空間上の 分数べき積分作用素

大阪教育大学 貞末 岳

Gaku Sadasue

Osaka Kyoiku University

筆者はこれまで共同研究者とともにマルティンゲールに対する分数べき積分の研究を進めていたが、それは離散パラメータ、さらにはフィルトレーションが atom で生成される限られたものだった。講演ではそれらを連続パラメータを含む一般のフィルトレーションへと拡張することを述べたが、この拡張のどこにどのような困難があるかは技術的な問題、ということもあり述べなかった。本文ではマルティンゲールの一般論において、連続パラメータの場合に生ずる困難について詳述し、さらに分数べき積分における離散パラメータと連続パラメータの違いについて述べてゆく。一般論については教科書 [3], [6] など広く知られていることではあるが、本文では非専門家向けということを意識して、冗長となることをいとわず述べている。なお、以下では、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とする。

1 càdlàg マルティンゲール

離散パラメータの確率過程、すなわち確率変数の可算族については、 $(X_n)_{n \geq 0}$ と $(Y_n)_{n \geq 0}$ とが各時点で同じ、すなわち

$$P(X_n = Y_n) = 1 \text{ for all } n \geq 0$$

と、 $\mathbb{Z}_+ \times \Omega$ 上の写像として同じ、すなわち

$$P(X_n = Y_n \text{ for all } n \geq 0) = 1$$

とは同値である。

しかし、 $[0, \infty)$ をパラメータとする確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ と $(Y_t)_{t \geq 0}$ については

$$P(X_t = Y_t) = 1 \text{ for all } t \geq 0 \tag{1.1}$$

The author was supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C), No. 22K033382, Japan Society for the Promotion of Science.

と

$$P(X_t = Y_t \text{ for all } t \geq 0) = 1 \quad (1.2)$$

とは同じではない。そのため (1.1) は

$$(Y_t)_{t \geq 0} \text{ は } (X_t)_{t \geq 0} \text{ の modification}$$

といい、(1.2) は

$$(X_t)_{t \geq 0} \text{ と } (Y_t)_{t \geq 0} \text{ は indistinguishable}$$

という。

この2つが同じとなるのは、たとえば「右連続過程」の場合である。

Definition 1.1. 確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ が

$$P(t \mapsto X_t \text{ is right continuous for every } t \geq 0) = 1$$

となるとき、 $(X_t)_{t \geq 0}$ を右連続という。

Theorem 1.1. 確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}, (Y_t)_{t \geq 0}$ は右連続とする。このとき $(Y_t)_{t \geq 0}$ が $(X_t)_{t \geq 0}$ の modification ならば、 $(X_t)_{t \geq 0}$ と $(Y_t)_{t \geq 0}$ は indistinguishable.

確率過程を考えるときは、フィルトレーションが与えられているとするが、連続パラメータの場合は少し条件が必要となる。

Definition 1.2. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を、 $\mathcal{F}$ の部分 σ -代数の族とする。 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が増大族であるときフィルトレーションとよび、フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に対して $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_{t-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s)$ とする。そして各 t に対して $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ となるとき右連続、 $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ となるとき左連続とよぶ。

そして、フィルトレーションに対しては多くの場合 usual condition と呼ばれる条件が仮定される。

Definition 1.3. $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\}$ とする。フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が右連続で $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ を満たすとき、 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ は usual condition を満たす、という。

フィルトレーションが定まると、マルティンゲールが定義される。なお $\mathcal{F}_t$ による条件付き期待値を $E[X|\mathcal{F}_t]$ と表し、確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に適合することを、各 t に対して X_t が $\mathcal{F}_{t-}$ -可測となるとき、と定める。

Definition 1.4. $(X_t)_{t \geq 0}$ を $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に適合した実数値確率過程とする。 $(X_t)_{t \geq 0}$ が各 t で $X_t \in L_1(\Omega)$ となり、さらに

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{a.s. for every } 0 \leq s < t.$$

となるとき、 $(X_t)_{t \geq 0}$ をマルティンゲールとよぶ。

定義自体には、離散パラメータと連続パラメータとの違いはない。しかし、マルティンゲールには振動量に制約がつき、先に触れた右連続性を持つように代表元を選び出せることが知られている。このことを述べるため、

$$X_{t+} = \limsup_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow t} X_r, \quad X_{t-} = \limsup_{r \in \mathbb{Q}, r \uparrow t} X_r$$

とおく。振動量の制約から、次の定理が得られる。

Theorem 1.2. $(X_t)_{t \geq 0}$ がマルティンゲールであるとき、

$$P(X_{t+} = \liminf_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow t} X_r \text{ for every } t \geq 0) = P(X_{t-} = \liminf_{r \in \mathbb{Q}, r \uparrow t} X_r \text{ for every } t > 0) = 1.$$

証明は [6], 63 page など。

右からの極限を考えると、フィルトレーションは減少してゆくため、「逆向きマルティンゲール」とその収束定理を考えることになる。なお Theorem 1.3 の証明は [6], 62 page などにある。

Definition 1.5. $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ が $\mathcal{F}$ の部分 σ -代数の減少族であり、 $(X_n)_{n \geq 0}$ がそれに適合した実数値確率過程であるとする。このとき各 n で $X_n \in L_1(\Omega)$ で、さらに

$$E[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m \quad a.s. \text{ for every } 0 \leq n < m.$$

となるとき、 $(X_n)_{n \geq 0}$ を逆向きマルティンゲールとよぶ。

Theorem 1.3. 逆向きマルティンゲール $(X_n)_{n \geq 0}$ に対して $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ とおく。このとき $\inf_{n \geq 0} E[X_n] > -\infty$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_{L_1} = 0$

Theorem 1.3 を用いて、次のことが得られる。

Lemma 1.4. $(X_t)_{t \geq 0}$ を $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に適合した実数値確率過程とすると、 $(X_t)_{t \geq 0}$ が右連続であれば、 $(X_{t+})_{t \geq 0}$ も $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に適合した実数値確率過程となり、 $X_t = E[X_{t+} | \mathcal{F}_t]$ となる。

これらのことを合わせて、次のことが得られる。

Theorem 1.5. フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が *usual condition* を満たすとし、マルティンゲール $(X_t)_{t \geq 0}$ に対して

$$\Omega_0 = \{X_{t+} = \liminf_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow t} X_r \text{ for every } t \geq 0 \text{ and } X_{t-} = \liminf_{r \in \mathbb{Q}, r \uparrow t} X_r \text{ for every } t > 0\}$$

とおく。このとき

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_{t+}(\omega) & (\omega \in \Omega_0) \\ 0 & (\omega \notin \Omega_0) \end{cases}$$

と定めると、 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ は $(X_t)_{t \geq 0}$ の *càdlàg modification*、すなわち $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ は右連続で左極限を持つマルティンゲールで、さらに $(X_t)_{t \geq 0}$ の *modification* となる。

Theorem 1.5 の証明の概略を述べておく。右連続で左極限を持つことは定め方からわかり、Theorem 1.2 と確率空間の完備性、さらに $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ から modification となることと $\Omega_0 \in \mathcal{F}_0$ が得られる。そして $\Omega_0 \in \mathcal{F}_0$ と Lemma 1.4 からマルティンゲールとなることが得られる。

2 任意停止定理

マルティンゲールの定義における等式 $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ が停止時刻に対しても成り立つこと（任意停止定理）は広く知られているが、ここでは離散パラメータと連続パラメータでの証明の違いについて述べてゆく。まずは停止時刻の定義を思い出しておく。なお本節以降、 $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ を仮定する。

Definition 2.1. $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ が各 $t \geq 0$ について $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ を満たすとき、 τ を停止時刻と呼び、停止時刻 τ に対して $(X_\tau)(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$ とし、

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ for every } t \geq 0\}$$

とする。（ $\mathcal{F}_\tau$ は σ -代数となる。）

Theorem 2.1 (任意停止定理). フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ は *usual condition* を満たすとし、 $(X_t)_{t \geq 0}$ を càdlàg マルティンゲールとする。このとき有界停止時刻 $\tau \leq \sigma$ に対して $E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau$ となる。

離散パラメータのときには X_τ が明示でき、任意停止定理の証明は以下にみるように簡明である。

Theorem 2.2. $X \in L_1(\Omega)$ に対して $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ とおく。 $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ が停止時刻であるとき、 $E[X | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau$

Proof. X_τ は定義関数 $1_{\{\tau=n\}}$ により

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{\tau=n\}} X_n + 1_{\{\tau=\infty\}} X$$

と表示され、Borel 集合 B に対して $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ と求まり X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ -可測である。そして $A \in \mathcal{F}_\tau$ とするとき

$$\begin{aligned} E[X_\tau 1_A] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[1_{A \cap \{\tau=n\}} X_n] + E[1_{A \cap \{\tau=\infty\}} X] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[1_{A \cap \{\tau=n\}} X] + E[1_{A \cap \{\tau=\infty\}} X] = E[X 1_A] \end{aligned}$$

となるので、 $E[X | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau$ が得られている。 □

連続パラメータでは、 X_τ が $\mathcal{F}_\tau$ -可測であることの証明は複雑となる。実際 $[0, \infty) \times \Omega$ 上の写像としての可測性を必要とする。

Definition 2.2. 確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ に対して、各 $t \geq 0$ で $X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を $X(s, \omega) = X_s(\omega)$ と定める。各 $t \geq 0$ で X が $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -可測となるとき、 X は発展的可測であるという。

右連続適合過程が発展的可測となることは、標準的な証明で得られる。

さて、記号 $a \wedge b = \min(a, b)$ を定め、停止時刻 τ に対して、停止過程 $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \geq 0}$ を $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$ と定める。このとき、 $T(s, \omega) = (\tau \wedge s, \omega)$ とすると $X^\tau = X \circ T$ と表され、 $T : [0, t] \times \Omega \rightarrow [0, t] \times \Omega$ は $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -可測写像なので X が発展的可測であれば停止過程 X^τ も発展的可測となる。以上のことを用いると、 X_τ が $\mathcal{F}_\tau$ -可測であることの証明が以下のように得られる。

Proposition 2.3. 確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が発展的可測であるとき、停止時刻 τ に対して X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ -可測。

Proof. $t \geq 0$ に対して $i_t : \Omega \rightarrow [0, t] \times \Omega$ を $i_t(\omega) = (t, \omega)$ と定める。 $X^\tau = X \circ T$ は発展的可測なので $X \circ T \circ i_t$ は $\mathcal{F}_t$ -可測となり、とくに Borel 集合 B に対して

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in B\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

となって $\{X_\tau \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$ が得られる。すなわち X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ -可測である。□

X_τ が $\mathcal{F}_\tau$ -可測となることを確かめたので、任意停止定理の証明が以下のように得られる。

[任意停止定理の証明の概略] $T > 0$ を $\tau \leq \sigma \leq T$ となるように定め、 τ_n, σ_n を

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{kT}{2^n} \chi_{\{(k-1)T/2^n < \tau \leq kT/2^n\}}, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{kT}{2^n} \chi_{\{(k-1)T/2^n < \sigma \leq kT/2^n\}}$$

と定める。 $\tau_n \leq \sigma_n$ で、それぞれ単調に減少して τ, σ に収束する。そして τ_n, σ_n とも有限個の値しかとらない停止時刻なので離散パラメータの任意停止定理が適用できて $E[X_{\sigma_n} | \mathcal{F}_{\tau_n}] = X_{\tau_n}$ が得られ、さらに $(X_{\tau_n})_{n \geq 0}, (X_{\sigma_n})_{n \geq 0}$ は減少族 $(\mathcal{F}_{\tau_n})_{n \geq 0}, (\mathcal{F}_{\sigma_n})_{n \geq 0}$ に関する逆向きマルティンゲールとなる。そして Theorem 1.3 を用いると、 $B \in \mathcal{F}_\tau$ に対して

$$E[X_\tau \chi_B] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{\tau_n} \chi_B] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{\sigma_n} \chi_B] = E[X_\sigma \chi_B]$$

が得られる。 X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ -可測だったので $X_\tau = E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau]$ である。□

任意停止定理や càdlàg modification などから平均振動量が停止時刻についても定まり、BMO-ノルムが

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{\tau} \|E(|f - f_{\tau-}| | \mathcal{F}_{\tau})\|_{L_{\infty}}$$

と定義される。なお規約 $f_{0-} = 0$ を用いる。

3 マルティンゲール Morrey 空間

本節では離散パラメータマルティンゲールに対する Morrey 空間の定義を思い出し、それをどのように連続パラメータへ拡張するのかを見てゆく。なお、フィルトレーション $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ が与えられているとき、 $B \in \mathcal{F}_n$ が $\{P(A \cap B) : A \in \mathcal{F}_n\} = \{P(B), 0\}$ をみたすとき、 B を $\mathcal{F}_n$ -atom とよぶ。

Definition 3.1. フィルトレーション $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ は、各 n で可算個の $\mathcal{F}_n$ -atom からなる集合 $\mathcal{A}_n$ により $\sigma(\mathcal{A}_n) = \mathcal{F}_n$ となると仮定する。 $p \in [1, \infty)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ とし、 $f \in L_0(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{L_{(p,\lambda)}} = \sup_{n \geq 0} \sup_{B \in \mathcal{A}_n} \left(\frac{1}{P(B)^{1+\lambda}} \int_B |f|^p dP \right)^{1/p}$$

と定め、マルティンゲール Morrey 空間 $L_{(p,\lambda)}$ を

$$L_{(p,\lambda)} = \{f \in L_0(\Omega) : \|f\|_{L_{(p,\lambda)}} < \infty\},$$

と定める。

Definition 3.1 は古典的な Morrey 空間の定義において、「球」を「atom 集合」に置き換えている。これがフィルトレーションに制約 $\sigma(\mathcal{A}_n) = \mathcal{F}_n$ がつく理由である。この制約は重要な例である 2 進マルティンゲールを含んでいる。そして離散パラメータマルティンゲールに対して深い解析が必要な場合には適切な制約である。さらにこの定義は $\lambda = -1$ の時にも有効で、 L_p 空間を与える。すなわち $L_{(p,\lambda)}$ は L_p 空間の拡張、ということになっていて、この点でも有効である。

しかし連続パラメータのマルティンゲールに対しては、各 $\mathcal{F}_t$ が atom で生成されるということは余りに制約が強く、意味をなさない。そこで講演では連続パラメータのマルティンゲールに対する Morrey 空間として、以下の定義を採用した。

Definition 3.2. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を usual condition を満たすフィルトレーションとし、 $T \in (0, \infty)$, $p \in [1, \infty)$, $\lambda \in (-\infty, 0]$ とする。このとき $f \in L_0(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)} = \sup_{t \in [0, T)} \left(\frac{\|E(|f|^p | \mathcal{F}_t)\|_{L_{\infty}(\Omega, P)}}{(T-t)^{\lambda/2}} \right)^{1/p}$$

とし、

$$L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T) = \{f \in L_0(\Omega) : \|f\|_{L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)} < \infty\},$$

とする。

Definition 3.2 において、フィルトレーションに対する制約は usual condition 以外は全くない。ただし、離散パラメータの場合と異なり、この定義は L_p 空間の拡張という意味はない。しかし、講演でも述べたように、この定義を連続パラメータのマルティンゲールに対する Morrey 空間と呼ぶ理由として、以下を挙げる。

Theorem 3.1. ([7]) $((X_t)_{t \in [0, \infty)}, (P^x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ を d 次元 Brownian family とし、 $p \in [1, \infty)$, $\lambda \in (-d, 0)$ とする。 $f \in L_0(\mathbb{R}^d)$ が古典的 Morrey 空間 $L_{(p,\lambda)}(\mathbb{R}^d)$ に属する必要十分条件は

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{T > 0} \|f(X_T)\|_{L_{(p,\lambda)}(\Omega, P^x; T)} < \infty \quad (3.1)$$

であり、このとき $\|f\|_{L_{(p,\lambda)}(\mathbb{R}^d)} \sim \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{T > 0} \|f(X_T)\|_{L_{(p,\lambda)}(\Omega, P^x; T)}$ となっている。

4 マルティンゲールに対する分数べき積分

離散パラメータマルティンゲールに対しては、[4] において、各 n で可算個の $\mathcal{F}_n$ -atom からなる集合 $\mathcal{A}_n$ により $\sigma(\mathcal{A}_n) = \mathcal{F}_n$ となる場合に、以下のようマルティンゲール変換として定義した。

Definition 4.1. フィルトレーション $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ は、各 n で可算個の $\mathcal{F}_n$ -atom からなる集合 $\mathcal{A}_n$ により $\sigma(\mathcal{A}_n) = \mathcal{F}_n$ となると仮定する。このとき

$$\beta_n = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} P(B) \chi_B, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

と定め、 $\alpha > 0$ とマルティンゲール $f = (f_n)_{n \geq 0}$ に対し、マルティンゲール $I_\alpha f = ((I_\alpha f)_n)_{n \geq 0}$ を

$$(I_\alpha f)_n = \sum_{k=0}^n (\beta_{k-1})^\alpha (f_k - f_{k-1}) \quad (4.2)$$

と定める。なお規約 $\beta_{-1} = \beta_0$ と $f_{-1} = 0$ を採用する。

分数べき積分 I_α の有界性については、[4] においてはフィルトレーションに regular 条件、すなわち

正の数 R が定まり、非負関数 f と $n \geq 1$ すべてで $E[f|\mathcal{F}_n] \leq RE[f|\mathcal{F}_{n-1}]$ となるの仮定の下で、次のように示している。

Theorem 4.1. フィルトレーション $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ は、各 n で可算個の $\mathcal{F}_n$ -atom からなる集合 $\mathcal{A}_n$ により $\sigma(\mathcal{A}_n) = \mathcal{F}_n$ となり、さらに *regular* 条件を仮定する。 $1 < p < \infty, 1/p - 1/q = \alpha/(-\lambda)$ であるとき I_α は $L_{(p,\lambda)}-L_{(q,\lambda)}$ 有界である。

Remark 4.1. 前節でも注意したように、 $\lambda = -1$ とすると I_α の L_p-L_q 有界性が得られる。

連続パラメータマルティンゲールに対して、Geiss-Nguyen [2] により Riemann-Liouville operator が導入された。

Definition 4.2. $T, \alpha > 0$ とする。 $f \in L_1(\Omega, P)$ に対して $(f_t)_{t \in [0, T]}$ を、 $(E[f|\mathcal{F}_t])_{t \in [0, T]}$ の càdlàg modification とする。このとき $\mathcal{I}_\alpha^{(T)} f$ を

$$(\mathcal{I}_\alpha^{(T)} f)(\omega) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T (T-t)^{\alpha/2-1} f_t(\omega) dt \quad (\omega \in \Omega).$$

と定める。

Remark 4.2. $p \in [1, \infty)$ に対して、 $\|\mathcal{I}_\alpha^{(T)} f\|_{L_p(\Omega, P)} \leq T^{\alpha/2} \|f\|_{L_p(\Omega, P)}$ となる。

Geiss-Nguyen は確率積分の離散近似などの観点から $\mathcal{I}_\alpha^{(T)}$ を導入している。なお、以下にみるように、 $\mathcal{I}_\alpha^{(T)}$ は単純な L_p-L_q 有界性をもたない。

Proposition 4.2. $1 \leq p < q < \infty$ とし、 $T, \alpha > 0$ とする。 $(\Omega, \mathcal{F}_{T/2}, P)$ が非原子的であるとき、 $\sup_{\|f\|_{L_p}=1} \|\mathcal{I}_\alpha^{(T)} f\|_{L_q} = \infty$

Proof. $A \in \mathcal{F}_{T/2}$ とするとき、

$$\mathcal{I}_\alpha^{(T)}(\chi_A) \geq \frac{\alpha}{2} \int_{T/2}^T (T-u)^{\alpha/2-1} du \chi_A = \left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha/2} \chi_A$$

となるので

$$\|\mathcal{I}_\alpha^{(T)}(\chi_A)\|_{L_q} / \|\chi_A\|_{L_p} \geq \left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha/2} P(A)^{1/q-1/p} \rightarrow \infty \quad (P(A) \rightarrow 0)$$

□

Proposition 4.2 から、連続パラメータマルティンゲールに対する Morrey 空間を L_p -空間の拡張として定義すると、Geiss-Nguyen の Riemann-Liouville operator は $L_{(p,\lambda)}-L_{(q,\lambda)}$ 有界性を持たないことになる。しかし前節でも注意したように、Definition 3.2 のマルティンゲール Morrey 空間は L_p -空間の拡張ではなく、次の $L_{(p,\lambda)}-L_{(q,\lambda)}$ 有界性が成り立つ。

Theorem 4.3. ([7]) $1 < p < q < \infty, \lambda < 0$ とし、 $T, \alpha > 0$ とする。 $1/p - 1/q = \alpha/(-\lambda)$ であるとき、 p, q, λ のみによる正の定数 $C_{p,q,\lambda}$ により、

$$\|\mathcal{I}_\alpha^{(T)} f\|_{L_{(q,\lambda)}(\Omega, P; T)} \leq C_{p,q,\lambda} \|f\|_{L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)} \quad \text{for all } f \in L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T) \quad (4.3)$$

証明は Hedberg の方法を用いる。

5 交換子の有界性と BMO の特徴づけ

$p > 1$ のときには、 $f \in L_p(\Omega)$ に対しては $b \in \text{BMO}$ と $\mathcal{I}_\alpha^{(T)}$ との交換子

$$[b, \mathcal{I}_\alpha^{(T)}]f := b\mathcal{I}_\alpha^{(T)}f - \mathcal{I}_\alpha^{(T)}(bf)$$

が定まる。この交換子の有界性を記述するため、次の空間を導入する。なお、この空間は Geiss により導入された weighted BMO 空間の特別な場合である。

Definition 5.1. $1 \leq p < \infty, \lambda < 0$ とし、 $T, \alpha > 0$ とする。 $f \in L_p(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)} = \sup_{\tau \leq T} \|(T - \tau)^{-\lambda/2} E(|f - f_{\tau-}|^p | \mathcal{F}_\tau)\|_\infty^{1/p}$$

と定める。なお $\sup_{\tau \leq T}$ は T 以下の停止時刻に関する上限である。そして空間 $\mathcal{L}_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)$ を

$$\mathcal{L}_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T) = \{f \in L_p(\Omega) : \|f\|_{\mathcal{L}_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)} < \infty\}$$

と定める。

離散パラメータの場合には、[5] で交換子の $L_{(p,\lambda)}-L_{(q,\lambda)}$ 有界性を示している。連続パラメータの場合には、一般には $L_{(p,\lambda)}-L_{(q,\lambda)}$ 有界性や $\mathcal{L}_{(p,\lambda)}-\mathcal{L}_{(q,\lambda)}$ 有界性は成り立たず、 $L_{(p,\lambda)}-\mathcal{L}_{(q,\lambda)}$ 有界性しか示すことができない。すなわち交換子の有界性の記述には $L_{(p,\lambda)}$ と $\mathcal{L}_{(p,\lambda)}$ が両方必要となる。この部分が離散パラメータと連続パラメータの違いである。

Theorem 5.1. ([7]) $1 < p < q < \infty, \lambda < 0$ とし、 $T, \alpha > 0$ とする。 $1/p - 1/q = \alpha/(-\lambda)$ であるとき、 p, q, λ のみによる正の定数 $C'_{p,q,\lambda}$ により、

$$\|([b, \mathcal{I}_\alpha^{(T)}]f)_T\|_{\mathcal{L}_{(q,\lambda)}(\Omega, P; T)} \leq C'_{p,q,\lambda} \|b\|_{\text{BMO}} \|f\|_{L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)} \quad (5.1)$$

for all $b \in \text{BMO}, f \in L_{(p,\lambda)}(\Omega, P; T)$ となる。

$L_{(p,\lambda)}-\mathcal{L}_{(q,\lambda)}$ 有界性の証明は、交換子の計算においては [1] の方法を用いる。主要な評価においては、よく知られた不等式

$$\begin{aligned} \tau \leq \sigma \text{ となる停止時刻 } \tau, \sigma \text{ すべてで } E(|X_\sigma - X_{\tau-}| | \mathcal{F}_\tau) &\leq E(U | \mathcal{F}_\tau) \\ \text{となるなら、} \|X_\infty\|_{L_p} &\leq C_p \|U\|_{L_p} \end{aligned}$$

を用いる。

なお $L_{(p,\lambda)}-L_{(q,\lambda)}$ 有界性や $\mathcal{L}_{(p,\lambda)}-\mathcal{L}_{(q,\lambda)}$ 有界性が成り立たないことは、Theorem 3.1 を用い、非有界で $\mathcal{F}_1$ -可測となる $b \in \text{BMO}$ を、各 $t \in [0, 1)$ に対して b_t が有界関数となるように構成することにより確かめられる。

さらに、交換子の有界性を用いた BMO-マルティンゲールの特徴づけを行った。

Theorem 5.2. ([7]) d を正の整数とし、 $T \in (0, \infty)$, $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in (-d, 0)$, $\alpha \in (0, -\lambda/p)$ とする。そして q を $1/p - 1/q = \alpha/(-\lambda)$ となるように定める。 $b \in L_{p/(p-1)}(\Omega, P)$ は $E(|b| | \mathcal{F}_0) \in L_\infty(\Omega, P)$ を満たすとし、 d 次元 $\mathcal{F}_t$ -Brownian motion $(B_t)_{t \geq 0}$ が存在すると仮定する。このとき $b \in \text{BMO}$ となる必要十分条件は

$$\sup_{T \in (0, \infty)} \|E_T[b, \mathcal{I}_\alpha^{(T)}]\|_{L_{(p, \lambda)}(\Omega, P; T) \rightarrow \mathcal{L}_{(q, \lambda)}(\Omega, P; T)} < \infty$$

である。なお $E_T : L_1(\Omega, P) \rightarrow L_1(\Omega, P)$ は条件付き期待値作用素 $E_T f = E[f | \mathcal{F}_T]$ である。

Theorem 5.2 の証明は [1] で用いた方法に基づく。[1] との違いは、試験関数の構成を、Theorem 3.1 (の証明) を用いて行う点である。

References

- [1] R. Arai, E. Nakai, G. Sadasue, Fractional integrals and their commutators on martingale Orlicz spaces, J. Math. Anal. Appl. 487 (2) (2020) 123991.
- [2] S. Geiss and N. T. Thuan, On Riemann–Liouville type operators, bounded mean oscillation, gradient estimates and approximation on the Wiener space. Stochastic Processes and their Applications, 187 (2025), 104651.
- [3] I. Karatzas and S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics vol. 113. Springer, New York, 1998.
- [4] E. Nakai and G. Sadasue, Martingale Morrey-Campanato spaces and fractional integrals, J. Funct. Spaces Appl. 2012 (2012), Article ID 673929, 29 pages.
- [5] E. Nakai and G. Sadasue, Characterizations of boundedness for generalized fractional integrals on martingale Morrey spaces, Math. Inequalities Appl. 20 (2017), No 4, 929–947.
- [6] D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion. Third edition. Grundlehren Math. Wiss., vol. 293. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [7] G. Sadasue, New martingale Morrey spaces and a characterization of BMO martingales by commutators, in preparation.