

Hausdorff 容量による Choquet-Sobolev 型空間について

齋藤 洋樹¹ (日本大学 理工学部)

1 導入

最初に本研究の主題となる Hausdorff 容量と Riesz ポテンシャルとの関係について概観する.

1.1 Hausdorff 容量

n を空間の次元とする. $E \subset \mathbb{R}^n$ と $0 < d \leq n$ に対し, d 次元 Hausdorff 容量 H^d を,

$$H^d(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j)^d : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

と定める. $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ の立方体全体とし, 各辺は各軸に平行なものとする. 立方体 $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\ell(Q)$ で Q の辺長を表す. 定義において E に Lebesgue の可測性を要求していないが, $d = n$ かつ Lebesgue 可測な E に対して, H^n は Lebesgue 測度 dx と同値なものになる. しかし $d < n$ の場合, 集合関数として H^d は加法性を持たない. このような集合関数に対する積分の理論は色々あるが, $0 < p < \infty$ に対し, Choquet 積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p dH^d := p \int_0^\infty t^{p-1} H^d(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) dt, \quad f \geq 0$$

を採用することにする. H^d は単調性: $E \subset F \implies H^d(E) \leq H^d(F)$, を持ち, H^d の定義から関数 f が Lebesgue の意味で可測でなかったとしても, 積分の右辺は通常の Lebesgue 積分として意味を持つ. Hausdorff 容量はフラクタル幾何学に起源をもち, 調和解析および非線形ポテンシャル論において重要な役割を果たす ([4, 7, 8]).

1.2 Riesz ポテンシャル

古典的なポアソン方程式

$$-\Delta u = f, \quad f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

を $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ で考える. このような u は, Newton ポテンシャルを用いて

$$u(x) = N * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy$$

¹The author is supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (23K03171), the Japan Society for the Promotion of Science.

で与えられることがよく知られている。これより,

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n$$

というポテンシャルの研究への端緒が開かれる。 $u(x) = N * f(x)$ の両辺を微分することで,

$$|\nabla u(x)| \lesssim I_1(|f|)(x) \quad (\text{A})$$

という関係も得られる。 I_α へ入力する関数 f によって出力の大きさを制御するのが、次の古典的な Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式である。

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

これと (A) と組み合わせると, $1/q = 1/p - 1/n$ であるとき, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば $\nabla u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ が成り立つことがわかり, ポアソン方程式の解のサイズを測ることができる。

このように, Riesz ポテンシャルは Newton ポテンシャルの一般化と考えることができるが, Fourier 変換によって

$$\mathcal{F}[I_\alpha f](\xi) \approx |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi), \quad \mathcal{F}[\partial^\alpha f](\xi) \approx |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

となることは良く知られている。 ∂ は微分であって, f の Fourier 変換に $|\xi|$ の負べきをかけるので, これは“積分”とみなすことができる。この意味で, I_α は分数冪積分作用素 (fractional integral operator) と呼ばれる。

1.3 Morrey 空間

$f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し, f の L^q ノルムが $\mathbb{R}^n$ 上どのように分布しているかを調べたい。もう少し正確に言えば, x を中心とする半径 r の球 $B(x, r)$ に対し, $\int_{B(x, r)} |f(y)|^q dx$ の大きさを調べる。例えば, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ で, $q \leq p$ であるとする。Hölder の不等式より,

$$\int_{B(x, r)} |f(y)|^q dy \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q |B(x, r)|^{1-q/p} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q r^{n(1-q/p)}$$

となるが, これは,

$$r \mapsto \int_{B(x, r)} |f(y)|^q dy$$

が, $r^{n(1-q/p)}$ よりも早く 0 に近づくことを意味する。伝統的に, $0 < \lambda \leq n$ に対し,

$$\|f\|_{L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(r^{-\lambda} \int_{B(x, r)} |f(y)|^q dy \right)^{1/q} < \infty$$

を満たす可測関数全体を Morrey 空間と呼び, $L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ で表された。このような条件を満たす関数は, $B(x, r)$ 上の局所的な L^q ノルムの振る舞いが, r の変化で記述・制御できる。この空間の名前になっている Morrey は次の事実を示している。

補題 1.1 *If $|\nabla u| \in L^{q,\lambda}$ with $q > n - \lambda$, then $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, with exponent $\alpha = 1 - (n - \lambda)/q$.*

ここで, $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ は, α -次 Hölder 連続関数の空間である. このことは, 2 階の楕円型方程式の解の正則性へ応用された.

$q = 1$ のときは少し注意が必要である. 関数の集合として $L^{1,\lambda}$ は意味を持つが, その上の作用素の理論を考えたときに破綻する事実が出てくる. この場合, 関数 f の代わりに Radon 測度 μ を考えるとよく, Morrey ノルムの条件は,

$$|\mu|(B(x, r)) \leq Cr^\lambda$$

を満たす $C > 0$ が存在することと述べることができる. この条件を満たす測度 μ と Hausdorff 容量 H^λ が深く関連している. 一方,

$$\|f\|_{L^{q,\lambda}} = c_n \|M_\alpha[|f|^q]^{1/q}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha = n - \lambda, 1 < q < \infty$$

とかける. ただし,

$$M_\alpha f(x) := \sup_{r>0} r^\alpha \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

は分数冪極大関数であり, Riesz ポテンシャル I_α と深く関わる. 以下, $f_B = |B|^{-1} \int_B$ で B 上の積分平均を表すものとする.

2 トレース不等式

Adams は [1, 2] において, Riesz ポテンシャルに対するトレース不等式を証明した.

定理 2.1 ([1, 2]) *Let $1 < p < q < \infty$ and let $0 < \alpha < n/p$. Suppose that μ is a Borel measure on $\mathbb{R}^n$. Then the inequality*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1)$$

holds if and only if

$$[\mu] := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q)^{\alpha - \frac{n}{p}} \mu(Q)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (2)$$

Moreover, $\|I_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mu)} \approx [\mu]$.

この結果は, Sobolev 空間の理論における古典的なトレース定理の拡張とみなすことができる. $\alpha = 1$ とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^1 級の滑らかさを持つ領域とし μ を $\partial\Omega$ 上の $(n-1)$ -次元 Hausdorff 測度とする: $\mu := \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega}$. また, Ω 上の関数として $f := |\nabla u|$ と定める. すると, Sobolev の積分表示から得られる公式

$$|u(x)| \lesssim I_1(|\nabla u|)(x),$$

により, 古典的なトレース定理

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

が得られる. 実際, $\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \lesssim \|I_1(|\nabla u|)\|_{L^q(\mu)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ とできることからわかる.

ここではもう一つ, Schrödinger 作用素に関連する応用を述べる. v を $\mathbb{R}^n$ 上の非負局所可積分関数 $\mathbb{R}^n$ とする. v に付随する Schrödinger 作用素

$$L := -\Delta - v$$

を考える. 部分積分により,

$$\langle Lf, f \rangle = \langle -\Delta f - fv, f \rangle = \langle \nabla f, \nabla f \rangle - \langle fv, f \rangle = \|\nabla f\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2(v)}^2$$

となる. そこで, もし次の荷重付き不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 v(x) dx \leq C_v \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx, \quad 0 < \exists C_v < 1,$$

が示されれば,

$$\langle Lf, f \rangle \geq (1 - C_v) \|\nabla f\|_{L^2}^2 > 0$$

となって, L の正值性が示される. このことが動機の一つとなって,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(v)} \leq K_v \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

を満たすような v に依存する定数を調べるという問題が生まれる. 特に, v を一般の Radon 測度 μ で考えて, (1) をトレース不等式と呼び, この不等式を成り立たせる μ を特徴付けたい. ([11] も参照のこと). 本稿の目的の一つは, (1) の右辺を Hausdorff 容量で定義された関数空間–Choquet 空間–となるような μ を特徴付けたい. 次の節でこの空間について詳しく議論する.

3 Choquet 空間

3.1 2進 Hausdorff 容量

最初の節で, Hausdorff 容量 H^d と, $0 < p < \infty$ に対して H^d による Choquet 積分を定義した. H^d が加法性を持たないため, Choquet 積分も加法性を持たない (斉次性は満たされる). このことは, 例えば

$$\|f\|_{L^p(H^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dH^d \right)^{1/p}$$

と定義したとしても,

$$\|f + g\|_{L^p(H^d)} \leq c(\|f\|_{L^p(H^d)} + \|g\|_{L^p(H^d)})$$

で $c = 1$ とできず ($c > 1$ で成り立つ), “ノルム” にならない. また, 重なりを持たない有限個の立方体 $Q_1, \dots, Q_m$ に対しても,

$$\sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |f(x)| dH^d \leq C \int_{\bigcup_{j=1}^m Q_j} |f(x)| dH^d$$

となる定数 C があるとは限らないため、通常の Lebesgue 積分で成り立つ様々な性質が Choquet 積分では成り立たないという状況になる。この問題は、次の 2 進 Hausdorff 容量を考えることで、ある程度解決される。 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ を 2 進立方体全体とする:

$$\mathcal{D} := \{2^{-k}(m + [0, 1)^n) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n\}.$$

H^d の定義において、 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{D}$ に取り替えたものを $\tilde{H}^d$ とかいて、2 進 Hausdorff 容量と呼ぶ。こうしても、任意の $E \subset \mathbb{R}^n$ に対し、 $H^d(E)$ と $\tilde{H}^d(E)$ は比較可能 (次元に依存する定数倍の違いを除き等しい) となる。 $\tilde{H}^d$ を考える一番の理由は次の submodular (strong subadditive と呼ぶ文献もある) と呼ばれる性質が成り立つことである:

$$\tilde{H}^d(E \cup F) + \tilde{H}^d(E \cap F) \leq \tilde{H}^d(E) + \tilde{H}^d(F).$$

この性質を持つ集合関数に対する Choquet 積分は劣線形性を持つ (正確には同値となる):

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\tilde{H}^d \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\tilde{H}^d + \int_{\mathbb{R}^n} g d\tilde{H}^d.$$

このとき、通常の Lebesgue 積分の場合の証明と同じように考えて、

$$\|f\|_{L^p(\tilde{H}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\tilde{H}^d \right)^{1/p}$$

が三角不等式を満たすことが示され、 $\|\cdot\|_{L^p(\tilde{H}^d)}$ はノルムとなる。

例 3.1 $0 < d \leq n$ とする。 $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ を任意にとると、 $H^d(Q) = \ell(Q)^d$ である。実際、 Q 自身が Q の被覆となるから、 $H^d(Q) \leq \ell(Q)^d$ である。一方、 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ を Q の任意の被覆とすると、

$$\ell(Q)^d = |Q|^{\frac{d}{n}} \leq \left| \bigcup_{j=1}^\infty Q_j \right|^{\frac{d}{n}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |Q_j| \right)^{\frac{d}{n}} \leq \sum_{j=1}^\infty \ell(Q_j)^d$$

となり、右辺で下限をとれば $\ell(Q)^d \leq H^d(Q)$ となる。この議論は、2 進 Hausdorff 容量でも正しく、 $Q \in \mathcal{D}$ に対し、 $\tilde{H}^d(Q) = \ell(Q)^d$ となる。

次に、 $n = 1$ で、 $0 < d < 1$ としよう。 $Q := [0, 2)$ に対し、 $Q_1 = [0, 1)$, $Q_2 = [1, 2)$ と分割する。今の議論から、

$$\tilde{H}^d(Q) = 2^d < 2 = 1 + 1 = \tilde{H}^d(Q_1) + \tilde{H}^d(Q_2)$$

例 3.2 上記の例をみても、ある定数 $C > 0$ が存在し、 $Q_1, \dots, Q_m$ が互いに排反な 2 進立方体に対し、

$$\sum_{j=1}^m H^d(Q_j) \leq C H^d \left(\bigcup_{j=1}^m Q_j \right) \quad (3)$$

とできるか、と期待したくなるが、一般に成り立たない。再び $n = 1$, $0 < d < 1$ とし、 $Q = [0, 1)$ とかく。互いに排反な Q の分割として、 $Q_j^m = [\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m})$, $m \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$,

$0 \leq j \leq 2^m - 1$ を考える. これらは Q の被覆となっている. すると,

$$\sum_{j=1}^{2^m-1} H^d(Q_j^m) = \sum_{j=1}^{2^m-1} 2^{-md} = 2^{m(1-d)} - 2^{-md}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

だが, $d < 1$ なので m に関して有界でない. 一方,

$$H^d\left(\bigcup_{j=1}^{2^m-1} Q_j^m\right) = H^d([0, 1)) = 1$$

となっている. したがって, (3) を満たす C は存在しない.

Orobitg と Verdera は [15] において packing condition と呼ばれる条件を用いてこの難しさを克服し, Hardy-Littlewood の極大関数の end point における弱有界性を示した. Packing condition の初出は [15] よりも前である. 詳細は [15] を参照のこと.

3.2 極大定理

集合関数 $\mathcal{C}$ に対する Choquet 空間 $L^p(\mathcal{C})$ を, $\|f\|_{L^p(\mathcal{C})}$ が有限な関数全体と定義する². 本稿では $\mathcal{C}$ として H^d や $\tilde{H}^d$ を考えるが, 荷重付 Hausdorff 容量や, Sobolev の p -容量, Bessel 容量や Riesz 容量などでも同様に考えることができる. その際, submodular が成り立つかどうかによって, $\|f\|_{L^p(\mathcal{C})}$ が三角不等式を満たすかどうか注意する必要がある.

調和解析で重要な役割を果たす極大作用素の, Choquet 空間上の有界性について以下が成り立つ.

定理 3.1 (Orobitg-Verdera [15]) $0 < d \leq n$, $d/n < p < \infty$ とする. このとき,

$$\|Mf\|_{L^p(H^d)} \leq C\|f\|_{L^p(H^d)}.$$

が成り立つ. $p = d/n$ に対しては次が成り立つ.

$$\sup_{t>0} t H^d(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\})^{\frac{n}{d}} \leq C\|f\|_{L^{\frac{d}{n}}(H^d)}.$$

この定理の p は 1 を下回ることを許容しており, 通常の Lebesgue 空間では成り立たないことであった. 後半の左辺を

$$\|Mf\|_{L^{\frac{d}{n}, \infty}(H^d)}$$

とかくこともある.

Adams はこの結果を分数冪積分作用素 M_α へ拡張した.

²後で議論するように, 稠密な関数空間として連続性や微分可能性をもつものを考える際は, $L^p(\mathcal{C})$ を $C_0(\mathbb{R}^n)$ や $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ などの完備化として定義することもある.

定理 3.2 (Adams [3]) $0 < d \leq n$, $0 \leq \alpha < n$ とする. $d/n < p < d/\alpha$ に対し, 次が成り立つ.

$$\|M_\alpha f\|_{L^p(H^{d-\alpha p})} \leq C \|f\|_{L^p(H^d)}.$$

この不等式の積分指数は両辺とも p であるが, α の影響を Hausdorff 容量のフラクタル次元が受けていると理解することができる. 一方, Lebesgue 空間のときと同様, Hardy-Littlewood-Sobolev 型の指数条件 $1/q = 1/p - \alpha/d$ のもとで (n が d になっていることに注意) 次も示すことができる.

$$\|M_\alpha f\|_{L^q(H^d)} \leq C \|f\|_{L^p(H^d)}.$$

Y.-W. Chen, K. H. Ooi, and D. Spector [6] による最近の研究によって, 容量型極大関数 (capacitary maximal function)

$$M_{H^d} f(x) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{1}_Q(x) \frac{1}{H^d(Q)} \int_Q |f(x)| dH^d$$

に対し, 次のような極大定理が示された:

定理 3.3 ([6]) $0 < d \leq n$ とする. このとき, $1 < p < \infty$ に対し, 次が成り立つ.

$$\|M_{H^d} f\|_{L^p(H^d)} \leq C \|f\|_{L^p(H^d)}.$$

証明は $d = n$ のときと同様の手法で示すことができる. Oróbitg-Verdera の極大定理のときとことなり, $1 < p < \infty$ で成り立つ.

4 主結果とその応用

4.1 Choquet-Sobolev の埋込不等式

本稿の主題は, Adams のトレース定理を Hausdorff 容量による Choquet 空間で考えることで, 次の定理が主定理の一つである.

定理 4.1 $0 < d \leq n$, $d/n < p < q < \infty$, $0 < \alpha < d/p$ とし, μ を $\mathbb{R}^n$ 上の Borel 測度とする. このとき,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(H^d)} \quad (4)$$

となるための μ の必要十分条件は

$$[\mu]_d := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\ell(Q)^\alpha \mu(Q)^{\frac{1}{q}}}{H^d(Q)^{\frac{1}{p}}} < \infty \quad (5)$$

であり, $\|I_\alpha\|_{L^p(H^d) \rightarrow L^q(\mu)} \approx [\mu]_d$ が成り立つ.

注意 4.1 条件 (5) において $d = n$ とすれば, 条件 (2) を復帰する.

証明の本質は, Orobitg-Verdera [15] による, 極大関数の Choquet 空間上での強有界性の証明による.

次の不等式

$$|f(x)| \lesssim I_1(|\nabla f|)(x),$$

を上記の定理に適用することで, 次の埋込不等式が得られる.

系 4.1 $0 < d \leq n$, $d/n < p < q < \infty$, $p < d$ とし, μ を $\mathbb{R}^n$ 上の Borel 測度とする. このとき,

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(H^d)} \quad (6)$$

が $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つための μ の必要十分条件は

$$[\mu]_d = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q)^{1-\frac{n}{p}} \mu(Q)^{1/q} < \infty \quad (7)$$

であり, $C \approx [\mu]_d$ が成り立つ.

注意 4.2 この系も $d = n$ のとき良く知られた Sobolev の埋込不等式を復帰する. (6) の右辺はちょうど斉次 Sobolev ノルムの積分が Haudorff 容量になっている. このノルムによる関数空間の性質を, 本稿の最後に述べる.

さらに, この系において $d\mu(x) = |x|^\beta dx$ とし, β を適切に選ぶことで, 次の不等式を得る. これは, Hardy の不等式の一般化となっている.

系 4.2 $0 < d \leq n$, $d/n < p < d$ とし, $p < q < np/(d-p)$ とする. β を

$$\frac{d-p}{p} = \frac{n+\beta}{q} \quad (8)$$

を満たすようにとる. このとき, $-n < \beta \leq 0$ かつ

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q |x|^\beta dx \right)^{1/q} \lesssim [\mu]_d \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dH^d \right)^{1/p}$$

が $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.

注意. 右辺の積分は, Choquet 積分で定義された斉次 Sobolev ノルムとも呼べるものである. Sobolev の不等式や, Poincaré-Sobolev の不等式を通じて, **Choquet 積分による Sobolev ノルム**の研究は近年 Harjulehto と Hurri-Syrjänen らによる研究を中心に精力的に行われている [9, 10].

4.2 2 荷重問題 (Two-weight problem)

前小節において, $d\mu = w(x)dx$ と考えると, 荷重付き不等式とみなすこともできる. そうすると自然に 2 荷重問題を考えることができるが, いくつかのヴァージョンがあり得る. すなわち,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(H_w^d)} \quad \text{or} \quad \|I_\alpha f\|_{L^q(H_w^d)} \leq C \|f\|_{L^p(H_w^d)},$$

をみたすような w, μ あるいは, v, w を特徴付けよ, という問題である. ここで荷重付き Hausdorff 容量は,

$$H_w^d(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j)^d \int_{Q_j} w(x) dx : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

で定義される. 測度論における Radon-Nikodym の定理を知っていると,

$$dH_w^d \approx w(x) dH^d$$

などの関係を期待したいが, 現在までのところこれらの問題は未解決である.

2 荷重問題については次のように, 十分条件を得ることができる. 逆は $d = n$ の場合でも成り立たず, 知られている特徴付けは, 異なる定式化がある. Hausdorff 容量での特徴付けは現在までのところ難しい.

定理 4.2 $0 < \alpha < n, d/n < p \leq q < \infty$ かつ

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{n-d}{d}. \quad (9)$$

と仮定する. また荷重の組 (w, v) がある $r > 1$ に対して以下を満たすとする.

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q)^\alpha H^d(Q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_Q v^{-\frac{rS'}{p}} \right)^{\frac{1}{rS'}} \cdot \left(\int_Q w^r dH^d \right)^{\frac{1}{rq}} < \infty, \quad (10)$$

ここで $S := np/d$ である. このとき,

$$\|I_\alpha f w^{1/q}\|_{L^q(H^d)} \lesssim \|f v^{1/p}\|_{L^p(H^d)}$$

が右辺が有限となるような任意の f に対して成り立つ.

注意 4.3 (10) は bump condition, あるいは Fefferman-Phong condition と呼ばれる [18].

この定理の応用として, Stein-Weiss の不等式の拡張が得られる. $w(x) = |x|^{-q\gamma_2}$, $v(x) = |x|^{p\gamma_1}$ とする. (10) の条件は

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \gamma_1 - \gamma_2}{d}$$

と表され, 次の不等式が得られる.

$$\||x|^{-\gamma_2} I_\alpha f(x)\|_{L^q(H^d)} \lesssim \||x|^{\gamma_1} f(x)\|_{L^p(H^d)}.$$

注意 4.4 古典的な Stein-Weiss の不等式は, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \gamma_1 - \gamma_2}{n}$ のとき,

$$\||x|^{-\gamma_2} I_\alpha f(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \||x|^{\gamma_1} f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

が成り立つことを主張するものである.

定理 4.2 の証明は, sparse domination argument と呼ばれる手法と, 次の双対定理を用いる: $0 < d < n$, $\mathbb{R}^n$ 上の非負下半連続関数 f に対し

$$\|f\|_{L^p(H^d)} \approx \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu : \|\mu\|_{\mathbb{M}^{p'}(H^d)} \leq 1, \right\}. \quad (11)$$

ただし,

$$\|\mu\|_{\mathbb{M}^{p'}(H^d)} := \|M_d \mu\|_{L^{p'}(H^d)}, \text{ かつ } M_d \mu(x) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{1}_Q(x) \frac{|\mu|(Q)}{\ell(Q)^d} \text{ である.}$$

References

- [1] D. R. Adams, *Traces of potentials arising from translation invariant operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **25**, (1971), 203–217.
- [2] D. R. Adams, *A trace inequality for generalized potentials*, Studia Math., **48** (1973), 99–105.
- [3] D. R. Adams, *Choquet integrals in potential theory*, Publ. Mat., **42** (1998), no. 1, 3–66.
- [4] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg-New York, 1996.
- [5] C. Cascante, J. Ortega and I. Verbitsky, *On L^p - L^q trace inequalities*, J. London Math. Soc. (2), **74** (2006), no. 2, 497–511.
- [6] Y.-W. Chen, K. H. Ooi, and D. Spector, *Capacitary Maximal Inequalities and Applications*, J. Funct. Anal. **12** (2024).
- [7] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
- [8] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969.
- [9] P. Harjulehto and R. Hurri-Syrjänen, *On Choquet integrals and Poincaré-Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **284** (2023), Paper No. 109862, 18 pp.
- [10] P. Harjulehto and R. Hurri-Syrjänen, *On Choquet Integrals and Pointwise Estimates*, Adv. Math. Sci. (2025), 147–164.
- [11] R. Kerman and E. T. Sawyer, *The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **36** (1986), 207–228.
- [12] T. Kilpeläinen and J. Malý, *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations*, Acta Math. **172** (1994), 137–161.
- [13] A. K. Lerner, *On pointwise estimates involving sparse operators*, New York J. Math., **22** (2016), 341–349.
- [14] V. G. Maz’ya and I. E. Verbitsky, *Capacitary inequalities for fractional integrals, with applications to partial differential equations and Sobolev multipliers*, Ark. Mat., **33** (1995), 81–115.
- [15] J. Orobitg and J. Verdera, *Choquet integrals, Hausdorff content and the Hardy-Littlewood maximal operator*, Bull. London Math. Soc., **30** (1998), no. 2, 145–150.
- [16] H. Saito and H. Tanaka, *Dual of the Choquet spaces with general Hausdorff content*, Studia Math. **266** (2022), no. 3, 323–335.
- [17] H. Saito, H. Tanaka and T. Watanabe, *Abstract dyadic cubes and the dyadic maximal operator with the Hausdorff content*, Bull. Sci. Math., **140** (2016), no. 6, 757–773.
- [18] H. Tanaka, *A characterization of two-weight trace inequalities for positive dyadic operators in the upper triangle case*, Potential Anal., **41** (2014), 487–499.