

p 通常的でないカスプ形式と肥田変形族に付随した二変数 p 進 RANKIN SELBERG L 級数

国立台湾大学 福永 健吾
KENGO FUKUNAGA
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

1. 導入

この講究録では筆者が 2026 年 1 月 5 日に RIMS 共同研究 (公開型) 「保型表現, 保型形式, L 関数の研究」において発表した内容についてまとめる. 筆者が研究集会にて発表したその内容は, 東京科学大学の落合理教授との共同研究の結果であり, 結果の全容は [2] にて確認できる. 紙面の都合上この講究録では省略せざるを得なかった細部や証明などは全て [2] の中にある. 加えてこの講究録の中で述べる主定理およびその他命題は, [2] の中で述べられているそれらに比べて結果が限定的であることも断っておく.

この講究録を通して, 5 以上の素数 p を一つ固定する. また体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}_p$ をそれぞれ固定する. ただし $\overline{\mathbb{Q}}$ は有理数体の代数閉包とし, $\mathbb{C}_p$ は p 進有理数体の代数閉包の完備化とする. 主結果を述べるためにまず Rankin Selberg L 級数に関する用語を準備する. $S_l(N, \psi)$ により重さ l , レベル N , 指標 ψ のカスプ形式のなす複素ベクトル空間を表す. ただし l, N は正の整数とし, ψ は $\bmod N$ のディリクレ指標とする. l_1, l_2 を $l_1 > l_2$ をみたす正の整数とする. $S_{l_1}(N, \psi_1)$ の元 f_1 と $S_{l_2}(N, \psi_2)$ の元 f_2 に対して, f_1, f_2 に付随した Rankin Selberg L 級数を

$$\mathcal{D}_N(s, f_1, f_2) = L_N(2s + 2 - l_1 - l_2, \psi_1 \psi_2) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_1) a_n(f_2) n^{-s}$$

により定める. ただし ψ_1, ψ_2 は共に $\bmod N$ のディリクレ指標とし, $L_N(s, \psi_1 \psi_2)$ は $\psi_1 \psi_2$ に付随したディリクレ L 級数とする. $\mathcal{D}_N(s, f_1, f_2)$ は $\operatorname{Re}(s) > \frac{l_1 + l_2}{2}$ の領域において広義一様絶対収束し, また $\mathbb{C}$ 上の正則関数として延長されることも知られている. $\mathcal{D}_N(s, f_1, f_2)$ の臨界値は $l_2 \leq k < l_1$ である. f_1, f_2 が共に正規化された同時 Hecke 固有形式と仮定したとき,

$$\Lambda(s, f_1, f_2) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s - l_2 + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \mathcal{D}_M(s, f_1^0, f_2^0)$$

と定める. ただし f_1^0, f_2^0 はそれぞれ f_1, f_2 に付随した原始的カスプ形式とし, M は f_1 の導手 c_{f_1} と f_2 の導手 c_{f_2} の最小公倍数とする. また $\Gamma(s)$ をガンマ関数とし, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$ とする. [4] と [5] により $\frac{\Lambda(m, f_1, f_2)}{\langle f_1^0, f_1^0 \rangle_{l_1, c_{f_1}}}$, $l_2 \leq m < l_1$ は代数的数であることが知られている. ただし

$$\langle f_1^0, f_1^0 \rangle_{l_1, c_{f_1}} = \int_{\Gamma_0(c_{f_1}) \backslash \mathfrak{H}} |f_1^0(z)|^2 y^{l_1-2} dx dy$$

とする. ここで $\mathfrak{H}$ は複素上半平面とし, $\Gamma_0(c_{f_1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{c_{f_1}} \right\}$ とする.

続いて肥田変形族の導入を行う. $\mathbb{C}_p$ 上の正規化された p 進加法付値を ord_p により表す. f を重さ k , レベル N , 指標 ψ の正規化された同時 Hecke 固有形式とする. このとき $\operatorname{ord}_p(a_p(f)) = 0$ をみたすとき, f は p 通常的であると呼ばれる.

Γ を位相群とし, $\chi: \Gamma \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ を連続指標とする. Γ は χ により $1+p\mathbb{Z}_p$ と位相群として同型であると仮定する. $\mathcal{K}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし, $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ を $\mathcal{K}$ の整数環とする. $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}[[\Gamma]] = \varprojlim_U \mathcal{O}_{\mathcal{K}}[\Gamma/U]$ により $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ 係数の岩澤代数を定める. ただし $\varprojlim_U$ において U は Γ の開部分群全体を走る

ものとし, $\mathcal{O}_K[\Gamma/U]$ は $\mathcal{O}_K$ 係数の群環とする. $X_{\text{fin}}(\Gamma)$ により, 有限指標 $\epsilon : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ 全体のなす集合とする. 任意の整数 k と有限指標 $\epsilon \in X_{\text{fin}}(\Gamma)$ に対して, 一意的な連続 $\mathcal{O}_K$ -代数準同型

$$\phi_{(k,\epsilon)} : \mathcal{O}_K[[\Gamma]] \rightarrow \mathcal{O}_{K(\epsilon)}$$

で, 任意の $x \in \Gamma$ に対して $\phi_{(k,\epsilon)}|_{\Gamma}(x) = \chi(x)^k \epsilon(x)$, $x \in \Gamma$ をみたすものが存在する. ξ を mod p のディリクレ指標とする. $G = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) q^n \in \mathcal{O}_K[[\Gamma]][[q]]$ を $\mathcal{O}_K[[\Gamma]]$ 係数の 1 変数べき級数とする. ただし $a_n(G) \in \mathcal{O}_K[[\Gamma]]$ とする. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と任意の有限指標 $\epsilon : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対して, $G_{(k,\epsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{(k,\epsilon)}(a_n(G)) q^n$ が重さ k , レベル p^∞ , 指標 $\xi \omega^{-k} \epsilon$ の p 通常の正規化されたカスプ同時 Hecke 固有形式となると, G は tame レベル 1, 指標 ξ の肥田変形族と呼ばれる. ただし ω は mod p のタイヒミュラー指標とする.

続いて主定理を述べるために二変数許容的測度を導入したい. しかし厳密な定義をここで導入しようとするこのセクションが冗長になってしまうので, 厳密な定義は次のセクションに回す. とりあえずこのセクションでは二変数許容的測度がどこに含まれる元なのか, それのみを述べることにする. Γ_1, Γ_2 を位相群とし, $\chi_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times, \chi_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ を連続指標とする. Γ_1, Γ_2 はそれぞれ χ_1, χ_2 により $1+p\mathbb{Z}_p$ と同型であると仮定する. $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ を $\mathbb{Z}^2$ の元で, $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ をみたすものとする. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 | a_1 \leq i_1 \leq b_1, a_2 \leq i_2 \leq b_2\}$ とおく. 今 $C^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{O}_K)$ により写像 $\phi : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{O}_K$ で, $\phi((x_1, x_2)) \chi_1^{-a_1}(x_1) \chi_2^{-a_2}(x_2)$ は次数が高々 $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ の $\mathcal{O}_K$ 係数局所多項式関数となるような元全体のなす $\mathcal{O}_K$ 加群を表す (次数が高々 $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ の局所多項式関数の定義は (2.1) の直前を参照). $\mathbf{h} \in \text{ord}_p(\mathcal{O}_K \setminus \{0\})^2$ を任意の元とする. $\mu \in \text{Hom}_K(C^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{O}_K), K)$ が, 増大度 $\mathbf{h}$ の許容的条件をみたすとき, μ は $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 上の増大度 $\mathbf{h}$ を持つ二変数許容的測度とよばれる (増大度 $\mathbf{h}$ の許容的条件の定義は (2.2) の直後を参照). $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, K)$ により, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 上の増大度 $\mathbf{h}$ を持つ二変数許容的測度全体のなす $\text{Hom}_K(C^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{O}_K), K)$ の部分 K ベクトル空間を表す.

以上により記号の導入は完了したので, 主定理を述べる. $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ を床関数とする.

Theorem 1.1. k を正の整数とし, f を重さ k , レベル $p^{m(f)}$, 指標 ψ のカスプ形式で, 正規化された同時 Hecke 固有形式であるものとする. ただし $m(f)$ は正の整数とする. また $G \in \mathcal{O}_K[[\Gamma_2]][[q]]$ を tame レベル 1, 指標 ξ の肥田変形族とする. $\alpha = \text{ord}_p(a_p(f))$ とおく. $\mathbf{d} = (0, 2), \mathbf{e} = (k-3, k-1)$ とおく. 以下を仮定する.

- (1) f^0 の root number および, f と f^0 のフーリエ係数は全て K に含まれている.
- (2) $k > \lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor \alpha \rfloor + 2$ がなりたつ.

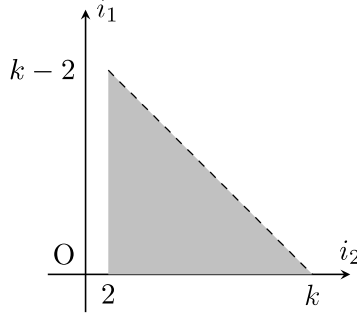
このとき $\mu_{(f,G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[\mathbf{d}, \mathbf{e}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, K)$ で,

$$(1.1) \quad \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 x_j^{i_j} \epsilon(x_j) d\mu_{(f,G)}(x_1, x_2) = \sqrt{-1}^{2i_1+i_2} G(\epsilon_1) G(\omega^{-i_2} \xi \epsilon_1 \epsilon_2) \\ \times E_{p, \epsilon_1}(i_1 + i_2, f, G_{(i_2, \epsilon_2)}) \frac{\Lambda(i_1 + i_2, f, (G_{(i_2, \epsilon_2)} \otimes \epsilon_1)^\rho)}{\langle f^0, f^0 \rangle_{k, c_f}}$$

を任意の $(i_1, i_2) \in [\mathbf{d}, \mathbf{e}]$ で $i_1 + i_2 < k$ をみたすものと, 任意の有限指標の組 $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1) \times X_{\text{fin}}(\Gamma_2)$ に対してみたすものが一意的に存在する. ただし $G(\epsilon_1)$ は (3.1) で定義されているガウス和を表し, $E_{p, \epsilon_1}(s, f, G_{(i_2, \epsilon_2)})$ は (3.2) で定義されている p 番目の Euler factor を表す. また $(G_{(i_2, \epsilon_2)} \otimes \epsilon_1)^\rho$ は $(G_{(i_2, \epsilon_2)} \otimes \epsilon_1)^\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\phi_{(i_2, \epsilon_2)}(a_n(G)) \epsilon_1(n)} q^n$ により定義される正規化された同時 Hecke 固有形式とする. ただし $\overline{\phi_{(i_2, \epsilon_2)}(a_n(G)) \epsilon_1(n)}$ は $\phi_{(i_2, \epsilon_1)}(a_n(G)) \epsilon_1(n)$ の複素共役を表すものとする.

Theorem 1.1 の補間公式 (1.1) をみたす $\mu_{(f,G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[\mathbf{d}, \mathbf{e}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, K)$ を二変数 p 進 Rankin Selberg L 級数とよぶ. また補間公式 (1.1) の中で整数の組 (i_1, i_2) は集合 $\{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} | j_1 + j_2 < k\}$ の元全体を動く. 集合 $\{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} | j_1 + j_2 < k\}$ を $\mu_{(f,G)}$ の補間

領域という．補間領域は以下のような三角形領域である．



Theorem 1.1 の先行研究として [6] を挙げておく．論文 [6] の中では, p 通常的とは限らないカスプ形式の組 (f, g) に付随した一変数 p 進 Rankin Selberg L 級数が構成されている．

このセクションの最後に, 主定理 Theorem 1.1 の条件 (2) について筆者の考えを述べておく．保型形式の p 進族や p 進 L 関数に詳しい人からすれば, 条件 (2) はあまりにも厳しすぎる条件に見えるかもしれない．特に Coleman 変形族という [1] で定義された保型形式の p 進族について知っている人は, 条件 (2) は $k > \alpha + 1$ という条件に置き換えられるべきではないのか, という疑問を持つかもしれない．その疑問に対する筆者の考えは以下の二つである．

(α) 補間公式 (1.1) をみたすような $\mu_{(f,G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha,\alpha)}^{[d,e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ の一意性を示すためには, 条件 (2) は必要不可欠であると思う．

(β) しかしながら 補間公式 (1.1) をみたすような $\mu_{(f,G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha,\alpha)}^{[d,e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ の存在を示すだけならば, 条件 (2) は $k > \alpha + 1$ まで弱められると思う．

(α) の理由は, §3 の一意性の証明の概略で説明するのでここではこれ以上触れない．(β) について非常におおざっぱに説明する．(β) の理由の説明をするためにまず, Coleman 変形族について少しだけ説明する．Coleman 変形族という p 通常的でない保型形式の族が Coleman [1] によって導入された．Coleman 変形族 F は $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}[[X]][[q]]$ の元として実現され ([3] 参照), ある可算無限個の射の族 $\phi_i : \mathcal{O}_{\mathcal{K}}[[X]] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ により, その特殊化 $F_i = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_i(a_n(F))q^n$ が p 通常的でないカスプ形式となるようなものである．そして [1] において, 同時 Hecke 固有形式 $f \in S_k(p^{m(f)}, \psi)$ が $k > \alpha + 1$, $\alpha = \text{ord}_p(f)$ という条件をみたすとき, f を補間するような Coleman 変形族 F が存在することも示されている．

(β) の理由の説明に戻る． $f \in S_k(p^{m(f)}, \psi)$ を $k > \alpha + 1$, $\alpha = \text{ord}_p(f)$ という条件をみたす同時 Hecke 固有形式とする．そして F を f を補間する Coleman 変形族とする． G を肥田変形族とする．筆者は組 (F, G) に付随した三変数 p 進 Rankin Selberg L 級数 $\mu_{(F,G)}$ が一意的に存在するはずだと考えている．そしてもし $\mu_{(F,G)}$ が存在すれば, F を f に特殊化することにより, 求める二変数 p 進 Rankin Selberg L 級数 $\mu_{(f,G)}$ が得られるはずである．

2. 多変数許容的測度

このセクションでは多変数許容的測度の導入と, 基本的な性質の紹介を行う．我々の主定理 Theorem 1.1 を述べるためだけならば, 二変数の許容的測度を導入すれば充分であった．しかしその証明の流れを紹介するためには, 実は一変数の許容的測度を導入しておく必要がある．なのでこのセクションでは一般の正の整数 k に対して, k 変数の許容的測度の導入を行う．

Γ_i , $1 \leq i \leq k$ を位相群とし, $\chi_i : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ を連続指標とする．今 Γ_i は χ_i により $1 + p\mathbb{Z}_p$ と同型とする． $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_k$ とおく．また $X_{\text{fin}}(\Gamma) = X_{\text{fin}}(\Gamma_1) \times \cdots \times X_{\text{fin}}(\Gamma_k)$ とおく． $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ を任意の元とする． $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}[X_1, \dots, X_k]_{\leq \mathbf{d}}$ により k 変数の $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ 係数多項式で, 任意の $1 \leq i \leq k$ に対して X_i に関する次数が d_i 以下であるようなものの全体のなす $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ 加群を表す． $\phi : \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ を任意の写像とする．任意の $\mathbf{a} \in \Gamma$ に対して, ある $\mathbf{a}$ の開近傍 U とある $p_{\mathbf{a}}(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{O}_{\mathcal{K}}[X_1, \dots, X_k]_{\leq \mathbf{d}}$ が存在して, $\phi(x_1, \dots, x_k) = p_{\mathbf{a}}(\chi_1(x_1), \dots, \chi_k(x_k))$ を任意の $(x_1, \dots, x_k) \in U$ に対してみたすとき, ϕ は高々次数 $\mathbf{d}$ の $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ 係数局所多項式であると呼ばれる．

$\mathbb{Z}^k$ の元 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して順序 $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ を

$$(2.1) \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow a_i \leq b_i \text{ for } 1 \leq i \leq k$$

により定める. ただし a_i, b_i はそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の i 番目の成分とする. また $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{i \in \mathbb{Z}^k \mid \mathbf{a} \leq i \leq \mathbf{b}\}$ とおく. 今 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^k$ を $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ をみたす任意の元とする. $C^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, \mathcal{O}_K)$ により, 写像 $\phi: \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_K$ で $\phi(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k \chi_i(x_i)^{-a_i}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \Gamma$ が高々次数 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ の $\mathcal{O}_K$ 係数局所多項式となるようなものの全体のなす $\mathcal{O}_K$ 加群を表す. $\mathbf{h} \in (\text{ord}_p(\mathcal{O}_K \setminus \{0\}))^k$ を任意の元とする. 任意の $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(C^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, \mathcal{O}_K), K)$ に対して,

$$(2.2) \quad v_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\mu) = \inf_{\substack{\mathbf{c} \in \Gamma, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k \\ i \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \left\{ \text{ord}_p \left(\int_{\Gamma} \prod_{j=1}^k ((\chi_j(x_j) - \chi_j(c_j))^{i_j - a_j} \chi_j(x_j)^{a_j}) d\mu \right) + \langle \mathbf{h} - (\mathbf{i} - \mathbf{d}), \mathbf{m} \rangle_k \right\},$$

と定める. ただし $\Gamma^{\mathbf{m}} = \Gamma_1^{p^{m_1}} \times \dots \times \Gamma_k^{p^{m_k}}$ とし, また $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ は $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k = \sum_{i=1}^k x_i y_i$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ により定められる標準ユークリッド内積とする. 定義により $v_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\mu) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ である. そこで $v_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\mu) > -\infty$ をみたすとき, μ は増大度 $\mathbf{h}$ の許容的条件をみたすといい, μ は増大度 $\mathbf{h}$ の $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 上の許容的測度とよばれる. $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ により増大度 $\mathbf{h}$ の $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 上の許容的測度全体の集合を表す. このとき $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ は自然に $\text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(C^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, \mathcal{O}_K), K)$ の部分 K ベクトル空間であることがわかる. $\mathbf{0}_k = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k$ とおく. また $\mathcal{O}_K[[\Gamma]] = \varprojlim_U \mathcal{O}_K[\Gamma/U]$ により, k 変数岩澤代数を表す. ただし $\varprojlim_U$ において, U は Γ の開部分群全体を走るものとする. 任意の非負整数 n に対して, $\ell(n) = \min\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p^j > n\}$ とおく. 以下, $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ の性質をいくつか羅列する.

- (1) $v_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$ は $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ 上の完備な加法付値となる. すなわち組 $(\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K), v_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]})$ は K バナッハ空間となる (K バナッハ空間の定義は例えば [2, §2] 参照).
- (2) $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in \text{ord}_p(\mathcal{O}_K \setminus \{0\})^k$ とする. 任意の $\mu_1 \in \mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ と $\mu_2 \in \mathcal{D}_{\mathbf{g}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ に対して, たたみこみ $\mu_1 * \mu_2 \in \mathcal{D}_{\mathbf{h}+\mathbf{g}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ が定められる. このたたみこみにより, $\mathcal{D}_{\mathbf{0}_k}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ は可換 K 代数の構造を持ち, また $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ は $\mathcal{D}_{\mathbf{0}_k}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ 加群の構造を持つ.
- (3) 標準的な K 代数同型 $\mathcal{O}_K[[\Gamma]] \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathbf{0}_k}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ が存在する. よって (2) により, $\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$ は $\mathcal{O}_K[[\Gamma]] \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ 加群の構造を持つことが分かる.
- (4) $\mathbf{b} - \mathbf{a} \geq [\mathbf{h}]$ を仮定する. ただし $[\mathbf{h}] = ([h_1], \dots, [h_k])$ とする.

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h}/K} = \left\{ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} a_{\mathbf{n}} X^{\mathbf{n}} \in K[[X_1, \dots, X_k]] \mid \inf \{ \text{ord}_p(a_{\mathbf{n}}) + \langle \mathbf{h}, \ell(\mathbf{n}) \rangle_k \} > -\infty \right\}$$

とおく. ただし $X^{\mathbf{n}} = X_1^{n_1} \dots X_k^{n_k}$ とし, $\ell(\mathbf{n}) = (\ell(n_1), \dots, \ell(n_k))$ とする. このとき非標準的な K 線形同型

$$\mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathbf{h}/K}, \quad \mu \mapsto F_{\mu}$$

で

$$F_{\mu}((1+p)^{i_1} \epsilon_1 (1+p) - 1, \dots, (1+p)^{i_k} \epsilon_k (1+p) - 1) = \int_{\Gamma} \prod_{j=1}^k \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu(\mathbf{x})$$

を任意の $\mu \in \mathcal{D}_{\mathbf{h}}^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\Gamma, K)$, 任意の $(i_1, \dots, i_k) \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ と任意の $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in X_{\text{fin}}(\Gamma)$ に対してみたすものが一意的に存在する.

上に羅列した性質は主定理 Theorem 1.1 の証明にはさほど関係ない. しかしとても基本的な性質なので一応触れておいた. (1) の証明は [2, Proposition 2.1] 参照. (2) の証明は [2, Lemma 2.9] 参照. (3) は [2, Proposition 2.10] から従う. (4) は [2, Theorem 4.9] と [2, Theorem 4.14] を組み合わせることにより従う. 次の命題は主定理 Theorem 1.1 の証明において重要な命題である.

Proposition 2.1. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^k$ を, $a \leq b, c \leq d$, $[a, b] \subset [c, d]$ かつ $b - a \geq [h]$ をみたす元とする. このとき自然な制限写像

$$\mathcal{D}_h^{[c,d]}(\Gamma, \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{D}_h^{[a,b]}(\Gamma, \mathcal{K}), \mu \mapsto \mu|_{C^{[a,b]}(\Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})}$$

は $\mathcal{K}$ 線形同型となる.

Proposition 2.1 の証明は [2, Proposition 2.13] を参照. $a, b \in \mathbb{Z}^k$ を $b - a \geq [h]$ をみたす任意の元とする. Proposition 2.1 により, 任意の $\mu \in \mathcal{D}_h^{[a,b]}(\Gamma, \mathcal{K})$ は値 $\mu(\phi)$, $\phi \in C^{[a, a+[h]]}(\Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ により完全に特徴づけられる事がわかる. 特にこれにより μ は値

$$(2.3) \quad \int_{\Gamma} \prod_{j=1}^k \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu(\mathbf{x}),$$

$(i_1, \dots, i_k) \in [a, a + [h]]$, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in X_{\text{fin}}(\Gamma)$ により特徴づけられる事がわかる. この事実は主定理 Theorem 1.1 の証明において, p 進 Rankin Selberg L 級数の一意性を示すために重要である.

また Proposition 2.1 により, $\mathcal{D}_h^{[a,b]}(\Gamma, \mathcal{K})$ の元を構成するためには, $\mathcal{D}_h^{[a, a+[h]]}(\Gamma, \mathcal{K})$ の元を構成すれば十分であることがわかる. この事実は主定理 Theorem 1.1 の証明において, p 進 Rankin Selberg L 級数の構成を示すために重要である.

3. 主定理の証明

このセクションではまず §1 で導入を後回しにした記号の定義をいくつか与えた後, 主定理 Theorem 1.1 の証明の概略を与える.

N を正の整数とし, ϕ を $\text{mod } N$ のディリクレ指標とする. ϕ_0 により ϕ に付随した原始的ディリクレ指標を表し, c_ϕ により ϕ の導手を表す. このとき ϕ のガウス和 $G(\phi)$ を

$$(3.1) \quad G(\phi) = \sum_{a=1}^{c_\phi} \phi_0(a) e^{2\pi\sqrt{-1}a/c_\phi}$$

により与える.

$f \in S_k(p^r, \psi)$, $g \in S_l(p^t, \xi)$ を共に正規化された同時 Hecke 固有形式とする. ここで k, l, r, t は全て正の整数とする. $a_p(f) \neq 0$ かつ $a_p(g) \neq 0$ を仮定する. $\pi_{f,p}$, $\pi_{f,g}$ をそれぞれ f, g に付随した $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の局所保型表現とする. また $\alpha(f^0)$ および $\alpha(f^0)'$ を $[(1 - \alpha(f^0)p^{-s})(1 - \alpha(f^0)'p^{-s})]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_p^n(f^0)p^{-ns}$ をみたす代数的数とする. 同様に $\alpha(g^0)$ と $\alpha(g^0)'$ も定める. 今 $\alpha(f^0) = a_p(f)$, $\alpha(g^0) = a_p(g)$ をみたとし仮定する. $\beta(g^0) = \frac{p^{l-1}}{\alpha(g^0)}$ とおく. ϕ を $\text{mod } p^n$ の任意のディリクレ指標とする. ただし n は正の整数とする. このとき

$$(3.2) \quad E_{p,\phi}(s, f, g) = E_1(s)E_2(s)E_3(s)$$

を

$$\begin{aligned}
E_1(s) &= \begin{cases} \left(\frac{p^{s-1}}{\alpha(g^0)^\rho \alpha(f^0)} \right)^{\text{ord}_p(c_\phi)} \left(\frac{p^{s-1}}{\beta(g^0)^\rho \alpha(f^0)} \right)^{\text{ord}_p(c_{\xi\phi})} & \text{if } \pi_{g,p} \text{ is principal or } \text{ord}_p(c_\phi) > 0, \\ - \left(\frac{p^{s-1}}{\alpha(g^0)^\rho \alpha(f^0)} \right) & \text{if } \pi_{g,p} \text{ is special and } \text{ord}_p(c_\phi) = 0, \end{cases} \\
E_2(s) &= \begin{cases} \left(1 - \frac{\phi_0(p)p^{s-1}}{\alpha(g^0)^\rho \alpha(f^0)} \right) \left(1 - \frac{(\xi\phi)_0(p)p^{s-1}}{\beta(g^0)^\rho \alpha(f^0)} \right) & \text{if } \pi_{g,p} \text{ is principal or } \text{ord}_p(c_\phi) > 0, \\ \left(1 - \frac{p^{s-1}}{\beta(g^0)^\rho \alpha(f^0)} \right) & \text{if } \pi_{g,p} \text{ is special and } \text{ord}_p(c_\phi) = 0, \end{cases} \\
E_3(s) &= (1 - \phi_0(p)\alpha'(f^0)\alpha(g^0)^\rho p^{-s})(1 - (\xi\phi)_0(p)\alpha'(f^0)\alpha(g^0)^\rho p^{-s}),
\end{aligned}$$

により定める. ただし任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して, $c^\rho = \bar{c}$ は c の複素共役を意味するものとする.

ここから主定理 Theorem 1.1 の証明の概略を述べる. Γ_1, Γ_2 を位相群とし, $\chi_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$, $\chi_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ を連続指標とする. Γ_1, Γ_2 はそれぞれ χ_1, χ_2 により $1 + p\mathbb{Z}_p$ と同型であると仮定する. k を正の整数とし, f を重さ k , レベル $p^{m(f)}$, 指標 ψ のカスプ形式で, 正規化された同時 Hecke 固有形式となるものとする. ただし $m(f)$ は正の整数とする. また $G \in \mathcal{O}_K[[\Gamma_2]][[q]]$ を tame レベル 1, 指標 ξ の肥田変形成族とする. $\alpha = \text{ord}_p(a_p(f))$ とおく. $\mathbf{d} = (0, 2)$, $\mathbf{e} = (k-3, k-1)$ とおく. 以下を仮定する.

- (1) f^0 の root number および, f と f^0 のフーリエ係数は全て K に含まれている.
- (2) $k > [2\alpha] + [\alpha] + 2$ がなりたつ.

一意性の証明の概略.

補間公式 (1.1) をみたすような $\mu_{(f,G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[\mathbf{d}, \mathbf{e}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, K)$ が存在すれば一意である理由について説明する. §1 の最後でも説明した通り, 一意性の証明において条件 $k > [2\alpha] + [\alpha] + 2$ は必要不可欠である. その理由も述べる. $\mathbf{e}_\alpha = ([2\alpha], [\alpha] + 2)$ とおく. まず (2.3) でも述べた通り, 任意の $\mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[\mathbf{d}, \mathbf{e}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, K)$ の元 μ は値 $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu(x_1, x_2)$, $(i_1, i_2) \in [\mathbf{d}, \mathbf{e}_\alpha]$, $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ により特徴づけられた. 一方我々の二変数 p 進 Rankin Selberg L 級数 $\mu_{(f,G)}$ の補間領域は $\{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid i_1 + i_2 < k\}$ であった. $k > [2\alpha] + [\alpha] + 2$ という条件は

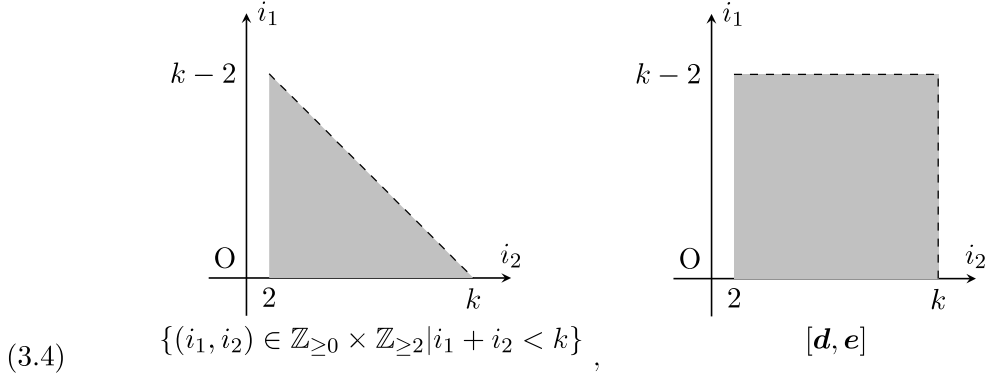
$$(3.3) \quad [\mathbf{d}, \mathbf{e}_\alpha] \subset \{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid i_1 + i_2 < k\}$$

という包含がなりたつことと同値な条件である. 包含 (3.3) により, 我々の二変数 p 進 Rankin Selberg L 級数 $\mu_{(f,G)}$ が補間公式 (1.1) により完全に特徴づけられてしまう事がわかる. 故に一意である.

構成の証明の概略 Step 1.

p 進 Rankin Selberg L 級数 $\mu_{(f,G)}$ の一意性の説明は済んだので, 続いて構成の説明に移る. 構成の説明は長いので二つのステップに分ける. まず初めに補間公式 (1.1) をみたすような元 $\mu_{(f,G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[\mathbf{d}, \mathbf{e}]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, K)$ を直接的に構成するのは不可能である. 何故なら長方形領域 $[\mathbf{d}, \mathbf{e}]$ は補間領域 $\{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid i_1 + i_2 < k\}$ に含まれないような点を含むからから

である.



(3.4) の左の三角形領域が補間領域であり, 右の長方形領域が $[d, e]$ である. $\mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ の元 $\mu_{(f, G)}$ を直接構成するということは, 任意の $(i_1, i_2) \in [d, e]$, $(a_1, a_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ に対して, 値

$$(3.5) \quad \int_{a_1 \Gamma_1^{p^{m_1}} \times a_2 \Gamma_2^{p^{m_2}}} \chi_1(x_1)^{i_1} \chi_2(x_2)^{i_2} d\mu_{(f, G)}(x_1, x_2)$$

を許容的条件をみたすように適切に定めるということに他ならない. 組 $(i_1, i_2) \in [d, e]$ が補間領域 $\{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid i_1 + i_2 < k\}$ に含まれているならば, (3.5) の値がどう定められるべきかは補間公式 (1.1) から逆算的に分かる. しかしながら $(i_1, i_2) \in [d, e]$ が補間領域に含まれていないとすると, 値 (3.5) をどう定めるべきなのかは分かりようがないのである. 故に補間公式 (1.1) をみたすような元 $\mu_{(f, G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ を直接的に構成するのは不可能なのである.

そこで我々は Proposition 2.1 を使って間接的に $\mu_{(f, G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ を構成する. $e_\alpha = ([2\alpha], [\alpha] + 2)$ とおく. このとき Proposition 2.1 により, 制限写像 $\mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$, $\mu \mapsto \mu|_{C[d, e_\alpha](\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})}$ は全単射であった. 故に $\mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ の適切な元 μ を構成すれば, その制限写像の引き戻しにより $\mu_{(f, G)} \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ が得られる.

適切な元 $\mu \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ をいかにして構成するか説明する. (3.3) で述べたように, 条件 $k > [2\alpha] + [\alpha] + 2$ から, $[d, e_\alpha] \subset \{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid i_1 + i_2 < k\}$ という包含関係が得られた. これにより任意の $(i_1, i_2) \in [d, e_\alpha]$, $(a_1, a_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ に対して, 値 $\int_{a_1 \Gamma_1^{p^{m_1}} \times a_2 \Gamma_2^{p^{m_2}}} \chi_1(x_1)^{i_1} \chi_2(x_2)^{i_2} d\mu(x_1, x_2)$ がどのように定められるべきかは, 補間公式 (1.1) から一意的に定まる. 具体的にはフーリエ逆変換を用いて,

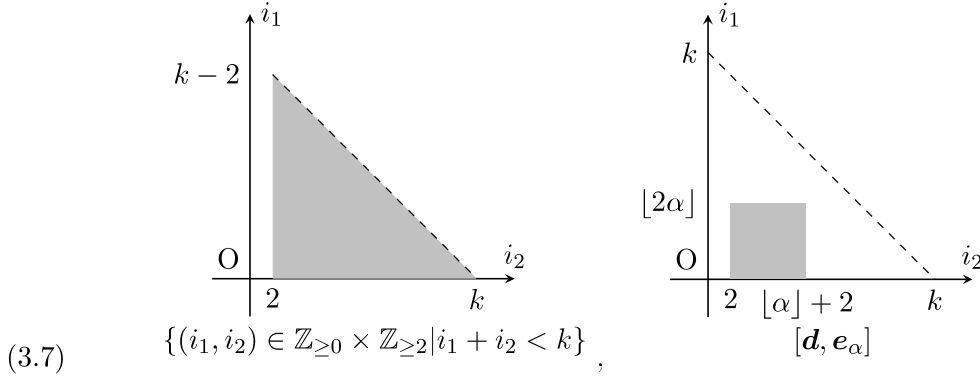
$$(3.6) \quad \int_{a_1 \Gamma_1^{p^{m_1}} \times a_2 \Gamma_2^{p^{m_2}}} \chi_1(x_1)^{i_1} \chi_2(x_2)^{i_2} d\mu(x_1, x_2) = \frac{1}{p^{m_1+m_2}} \sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1/\Gamma_1^{p^{m_1}}) \times X_{\text{fin}}(\Gamma_2/\Gamma_2^{p^{m_2}})} \bar{\epsilon}_1(a_1) \bar{\epsilon}_2(a_2) I((i_1, i_2), (\epsilon_1, \epsilon_2))$$

と定められるはずである. ただし $X_{\text{fin}}(\Gamma_i/\Gamma_i^{p^{m_i}})$ は $\Gamma_i/\Gamma_i^{p^{m_i}}$ 上の指標のなす群とし, $I((i_1, i_2), (\epsilon_1, \epsilon_2))$ は補間公式 (1.1) の値を表しているものとする. 任意の $(i_1, i_2) \in [d, e_\alpha]$, $(a_1, a_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ に対して, 値 $\int_{a_1 \Gamma_1^{p^{m_1}} \times a_2 \Gamma_2^{p^{m_2}}} \chi_1(x_1)^{i_1} \chi_2(x_2)^{i_2} d\mu(x_1, x_2)$ を (3.6) により定めたとき, μ が $C[d, e_\alpha](\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ 上の測度となり, また増大度 $(2\alpha, \alpha)$ の許容的条件をみたすかどうかは, 当然非自明なことであり証明すべきことである. しかしながらそれらの証明は紙面の都合上省略せざるを得ない. 証明が気になる人は [2, Proposition 6.10] と

[2, Proposition 6.11] を参照してほしい. この原稿では (3.6) により $\mu \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ が定まると仮定して話を進める.

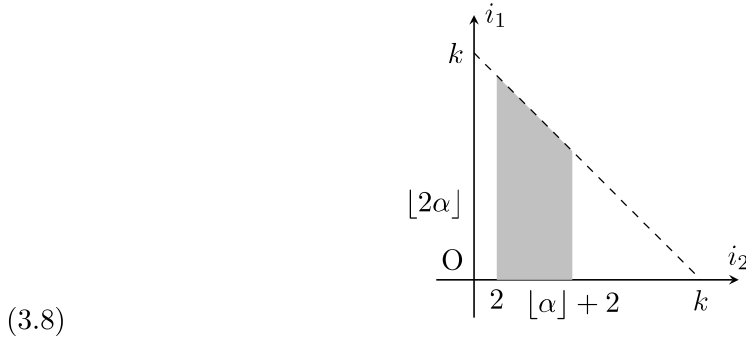
構成の証明の概略 Step 2.

Step 1 にて我々は $\mu \in \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ で, 任意の $(i_1, i_2) \in [d, e_\alpha]$, $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ に対して, $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu(x_1, x_2)$ が補間公式 (1.1) の値と等しいものを構成した. Proposition 2.1 の同型 $\mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K})$ による μ の逆像を $\mu_{(f, G)}$ とおく. よって後示すべきは任意の $(i_1, i_2) \in \{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} | j_1 + j_2 < k\}$ と $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ に対して, $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu_{(f, G)}(x_1, x_2)$ が補間公式 (1.1) の値と等しいことである. (3.3) で述べたように, $[d, e_\alpha]$ は補間領域 $\{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} | i_1 + i_2 < k\}$ に含まれる.



(3.7) の左の三角形領域が補間領域であり, 右の四角形が $[d, e_\alpha]$ である. $(i_1, i_2) \in [d, e_\alpha]$ の場合は, $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu_{(f, G)}(x_1, x_2) = \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu(x_1, x_2)$ から, $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu_{(f, G)}(x_1, x_2)$ の値が補間公式 (1.1) の値と等しいことは明らかである.

続いて $2 \leq i_2 \leq [\alpha] + 2$ をみたすような $(i_1, i_2) \in \{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 2} | j_1 + j_2 < k\}$ について, $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu_{(f, G)}(x_1, x_2)$ の値が補間公式 (1.1) の値と等しいことを示す. 補間領域の元 (i_1, i_2) が $2 \leq i_2 \leq [\alpha] + 2$ をみたすということは, (i_1, i_2) が以下の領域に含まれるということである.



今任意の整数 i'_2 で, $2 \leq i'_2 \leq [\alpha] + 2$ をみたすものと, $\epsilon'_2 \in X_{\text{fin}}(\Gamma_2)$ を一つ固定する. 以下のような (i'_2, ϵ'_2) に関する特殊化を定義する.

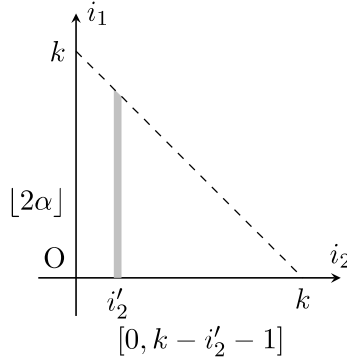
$$(3.9) \quad \text{sp}_{(i'_2, \epsilon'_2)} : \mathcal{D}_{(2\alpha, \alpha)}^{[d, e_\alpha]}(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{D}_{2\alpha}^{[0, k-3]}(\Gamma_1, \mathcal{K}(\epsilon'_2)),$$

$$\mu \mapsto (\phi \mapsto \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \phi(x_1) \chi_2(x_2)^{i'_2} \epsilon'_2(x_2) d\mu(x_1, x_2)).$$

$\nu_{(i'_2, \epsilon'_2)} = \text{sp}_{(i'_2, \epsilon'_2)}(\mu_{(f, G)})|_{C^{[0, k-i'_2-1]}(\Gamma_1, \mathcal{O}_{\mathcal{K}(\epsilon'_2)})} \in \mathcal{D}_{2\alpha}^{[0, k-i'_2-1]}(\Gamma_1, \mathcal{K}(\epsilon'_2))$ とおく. このとき

$$(3.10) \quad \int_{\Gamma_1} \chi_1(x_1)^{i_1} \epsilon_1(x_1) d\nu_{(i'_2, \epsilon'_2)}(x_1) = \sqrt{-1}^{2i_1+i'_2} G(\epsilon_1) G(\omega^{-i_2} \xi \epsilon_1 \epsilon'_2) \\ \times E_{p, \epsilon_1}(i_1 + i'_2, f, G_{(i'_2, \epsilon'_2)}) \frac{\Lambda\left(i_1 + i'_2, f, \left(G_{(i'_2, \epsilon'_2)} \otimes \epsilon_1\right)^\rho\right)}{\langle f^0, f^0 \rangle_{k, c_f}}$$

が任意の $i_1 \in [0, k - i'_2 - 1]$ と $\epsilon_1 \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1)$ に対してなりたつことが示せれば, $\mu_{(f, G)}$ が (3.8) の領域上補間公式 (1.1) をみたすことが分かる.



(3.11)

(3.11) の直線が $[0, k - i'_2 - 1]$ を図示したものである.

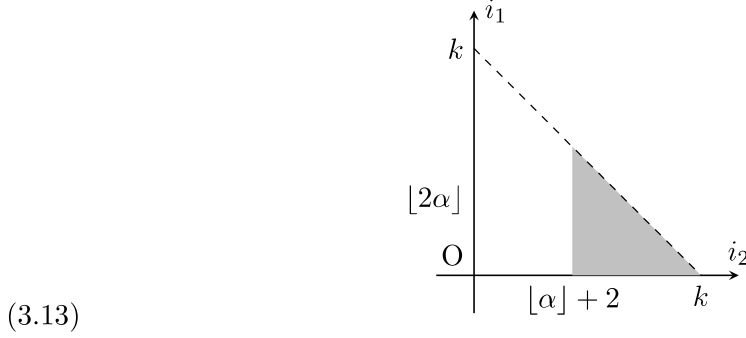
ここで先行研究 [6] の結果を使う. 論文 [6] の中で, カस्प形式の組 $(f, G_{(i'_2, \epsilon'_2)})$ に付随した一変数 p 進 Rankin Selberg L 級数 $\mu_{(f, G_{(i'_2, \epsilon'_2)})}^{(V)} \in \mathcal{D}_{2\alpha}^{[0, k-i'_2-1]}(\Gamma_1, \mathcal{K}(\epsilon'_2))$ が構成されている. 即ち $\mu_{(f, G_{(i'_2, \epsilon'_2)})}^{(V)}$ は, 任意の $i_1 \in [0, k - i'_2 - 1]$ と $\epsilon_1 \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1)$ に対して補間公式 (3.10) をみたすような一意的な元である (正確には [6] で構成された p 進 L 関数を定数倍により修正する必要がある). よって (3.10) を示すためには, $\nu_{(i'_2, \epsilon'_2)} = \mu_{(f, G_{(i'_2, \epsilon'_2)})}^{(V)}$ が示せばよい. 更に Proposition 2.1 により制限写像は同型 $\mathcal{D}_{2\alpha}^{[0, k-i'_2-1]}(\Gamma_1, \mathcal{K}(\epsilon'_2)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{2\alpha}^{[0, [2\alpha]]}(\Gamma_1, \mathcal{K}(\epsilon'_2))$ を導くので, 結局 (3.10) を示すためには,

$$(3.12) \quad \nu_{(i'_2, \epsilon'_2)}|_{C^{[0, [2\alpha]]}(\Gamma_1, \mathcal{O}_{\mathcal{K}(\epsilon'_2)})} = \mu_{(f, G_{(i'_2, \epsilon'_2)})}^{(V)}|_{C^{[0, [2\alpha]]}(\Gamma_1, \mathcal{O}_{\mathcal{K}(\epsilon'_2)})}$$

が示せば十分であることが分かった.

今任意の $(i_1, i_2) \in [\mathbf{d}, \mathbf{e}_\alpha]$ と $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ に対して, $\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \prod_{j=1}^2 \chi_j(x_j)^{i_j} \epsilon_j(x_j) d\mu_{(f, G)}(x_1, x_2)$ が補間公式 (1.1) の値と等しいことから, 任意の $i_1 \in [0, [2\alpha]]$ と $\epsilon_1 \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1)$ に対しては, (3.10) がなりたつ事がわかる. よって任意の $i_1 \in [0, [2\alpha]]$ と $\epsilon_1 \in X_{\text{fin}}(\Gamma_1)$ に対して, $\int_{\Gamma_1} \chi_1(x_1)^{i_1} \epsilon_1(x_1) d\nu_{(i'_2, \epsilon'_2)}(x_1) = \int_{\Gamma_1} \chi_1(x_1)^{i_1} \epsilon_1(x_1) d\mu_{(i'_2, \epsilon'_2)}^{(V)}(x_1)$ がなりたつ. これにより (3.12) がただちに得られる. 以上により $\mu_{(f, G)}$ が (3.8) 上補間公式 (1.1) をみたすことが示せた.

後は以下の (3.13) の領域上, $\mu_{(f,G)}$ が補間公式 (1.1) をみたすことが示せばよい.



我々は $\mu_{(f,G)}$ が領域 (3.8) 上で補間公式 (1.1) をみたすことを示すために, $\mu_{(f,G)}$ の二変数目を固定した ((3.9) 参照). それと同様にして $\mu_{(f,G)}$ の一変数目を固定すれば, 同様の議論の流れで $\mu_{(f,G)}$ が領域 (3.13) 上補間公式 (1.1) をみたすことが示せる. この原稿ではこれ以上の証明には立ち入らないので, 気になる人は [2, Lemma 6.12] を参照してほしい.

REFERENCES

- [1] R. Coleman, *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. math, 127, 417–479, 1997.
- [2] K. Fukunaga, T. Ochiai, *Multi-variable admissible distributions*, arXiv:2510.24164.
- [3] F. Nuccio, T. Ochiai, J. Ray, *A formal model of Coleman families and applications to Iwasawa invariants*, Annals mathématiques du Quebec, Volume 48, pages 453–475, (2024).
- [4] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Commun. Pure Appl. Math. 29, 783–804, 1976.
- [5] G. Shimura, *On the periods of modular forms*, Math. Ann. 229, 211–221, 1977.
- [6] M. Vienney, *A NEW CONSTRUCTION OF p-ADIC RANKIN CONVOLUTIONS IN THE CASE OF POSITIVE SLOPE*, International Journal of Number Theory Vol. 6, No. 8 (2010), 1875–1900.