

Generalized modular equations and the singular values of Hauptmoduln

富山和樹 (早稲田大学) /
Kazuki Tomiyama (Waseda University)

1 研究の背景と結果

本稿は RIMS 共同研究「保型形式, 保型表現, L 関数の研究」における標記題名の講演の概要報告である. 証明などの詳細は [18] をご覧いただくこととして, 本稿では研究の背景や証明のアイデアを中心に述べる.

1.1 Hauptmodul

楕円モジュラー j -関数は, モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー関数であり, 古くから数論や楕円曲線論などにおいて重要な役割を果たしている:

$$j(z) := 1728 \frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}.$$

ここで, $g_2(z) = 60 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m+nz)^{-4}$, $g_3(z) = 140 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m+nz)^{-6}$, $z \in \mathbb{H}$ である. j -関数は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対する不変性 (周期性) から $q = e^{2\pi iz}$ についての Fourier 展開をもつ;

$$\begin{aligned} j(z) &= \sum_{n=-1}^{\infty} c(n)q^n \\ &= q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots \end{aligned}$$

さらに j -関数は, 種数 0 のコンパクト Riemann 面 $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^* = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash (\mathbb{H} \cup \{i\infty\} \cup \mathbb{Q})$ 上の有理型関数体 (モジュラー関数体) $K_{SL_2(\mathbb{Z})}$ の元とみなせるが,

$$K_{SL_2(\mathbb{Z})} = \mathbb{C}(j)$$

が知られている ([16] など). すなわち, $SL_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー関数は j -関数の有理関数で尽くされる. j 関数のこのような性質を一般化して, Hauptmodul を定義する.

Definition 1.1. 数論的離散部分群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ について, コンパクト Riemann 面 $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ の種数が 0 となるとき, Γ は**種数 0 の離散群**であるという. 種数 0 の離散群 Γ に対して, Riemann 面の理論から,

$$K_\Gamma = \mathbb{C}(h)$$

をみたす Γ のモジュラー関数 h が存在することが知られている. このようなモジュラー関数 h を種数 0 の離散群 Γ の *Hauptmodul* (*principal modular function*) とよぶ.

種数 0 の離散群 Γ に対して、その Hauptmodul h は一意的でないが、Fourier 展開の形を

$$h(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$$

のように正規化することで、 h を一意的にとることができる。本稿では Hauptmodul はこのような正規化を経たものを考える。

e.g. 1.2.

$$J(z) := j(z) - 744 = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n$$

は種数 0 の離散群 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ についての Hauptmodul である。

e.g. 1.3.

$$T_3(z) = \frac{\eta(z)^{12}}{\eta(3z)^{12}}$$

は合同部分群 $\Gamma_0(3)$ についての Hauptmodul である。ここで $\eta(z)$ は Dedekind のエータ関数である。

Hauptmodul が自然に表れる数学の 1 つとして、次に述べるモンスター群の moonshine がある。

1.2 Monstrous moonshine

有限群の分類理論から、有限単純群には次の 4 つの系列があり、任意の有限単純群は次のいずれかに同型であることが知られている [4]；

- 素数位数の巡回群
- 5 次以上の交代群
- 16 系列ある有限体上の行列群
- これら以外の 26 個の散在群

散在群のうち、位数最大の群は**モンスター群** $\mathbb{M}$ とよばれ、その位数は約 8.08×10^{53} である。いま、モンスター群の既約表現の次元を小さい方から $d_0 = 1, d_1, \dots, d_{193}$ ^{*1} とし、 j -関数の n 次の Fourier 係数を $c(n)$ とすれば、

$$\begin{array}{ll} d_0 = 1, & \\ d_1 = 196883, & c(1) = 196884 \\ d_2 = 21296876, & c(2) = 21493760 \\ d_3 = 842609326, & c(3) = 864299970 \\ d_4 = 18538750076, & c(4) = 20245856256 \end{array}$$

であり、大きな整数の間関係式

$$\begin{aligned} c(1) &= d_0 + d_1 \\ c(2) &= d_0 + d_1 + d_2 \\ c(3) &= 2d_0 + 2d_1 + d_2 + d_3 \\ c(4) &= 2d_0 + 3d_1 + 2d_2 + d_3 + d_5 \end{aligned}$$

^{*1} 有限群の既約表現 (の同値類) の個数は有限であり、モンスター群の場合は 194 個である。

などが得られる．このような観察から示唆を得て Conway と Norton は Moonshine 予想とよばれる予想を提出し [5], これは多くの研究者の貢献のち, Borcherds [1] によって証明された．

Theorem 1.4 (Monstrous moonshine). モンスター群 $\mathbb{M}$ のある無限次元表現 $V^{\natural} = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} V_n^{\natural}$ が存在して,

$$J(z) = j(z) - 744 = \sum_{n=-1}^{\infty} \dim V_n^{\natural} q^n$$

が成り立つ．さらにモンスター群の元 $g \in \mathbb{M}$ の $V_n^{\natural}$ における指標の値を $\text{ch}_{V_n^{\natural}}(g)$ とかくと^{*2}, 各 $g \in \mathbb{M}$ に対して, ある種数 0 の離散群 $\Gamma_g \subset SL_2(\mathbb{R})$ が存在して, $g \in \mathbb{M}$ の McKay-Thompson 級数

$$T_g(z) := \sum_{n=-1}^{\infty} \text{ch}_{V_n^{\natural}}(g) q^n$$

は Γ_g の Hauptmodul となる．

このようにして, 173 個の Hauptmodul がモンスター群の McKay-Thompson 級数として得られる．

1.3 singular moduli

j -関数は虚 2 次無理数点 (CM 点) において代数的整数の値をとり, これらの値は *singular moduli* とよばれる．singular moduli は対応する虚 2 次体の Hilbert 類体を生成するなど著しい数論的性質をもち, 代数的整数論において重要な対象である．Chen-Yui [2] は一部の McKay-Thompson 級数の CM 値が, j -関数の singular moduli と類似の性質をもつことを示した．以下にその結果を述べる．

モンスター群の元 $g \in \mathbb{M}$ に moonshine の意味で g に対応する種数 0 の離散群を Γ_g とすると, ある 1 以上の整数 N に対して, $\Gamma_g \supset \Gamma_0(N)$ であり, さらに $g \in \mathbb{M}$ の元としての位数 $o(g)$ は N を割り切ることが知られている．とくに $o(g) = N$ が成り立つとき, 対応する McKay-Thompson 級数 T_g は *fundamental* であるという．

Theorem 1.5. ([2] Theorem 3.4, 3.7.5) T_g を fundamental な McKay-Thompson 級数とし, 離散群 Γ_g は合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を含むとする． $\tau \in \mathbb{H}$ を 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, N) = 1$) の解である CM 点とすると, $T_g(\tau)$ は代数的整数である．さらに, 虚 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\tau)$ と判別式が $N^2 d$ ($d := b^2 - 4ac$) である整環 $\mathcal{O}$ について, その環類体^{*3}は $T_g(\tau)$ により K で上生成される．

本講演の主結果は, この定理の前半部分の一般化である．

Theorem 1.6. 種数 0 の離散群 Γ はある $\Gamma_0(N)$ を含むものとし, その Hauptmodul $h(z)$ の Fourier 係数がある円分体の整数環にとれるものとする．このとき, $\tau \in \mathbb{H}$ を 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, N) = 1$) の解である CM 点とすると, $h(\tau)$ は代数的整数である．とくにモンスター群 $\mathbb{M}$ についての任意の McKay-Thompson 級数 T_g について, $T_g(\tau)$ は代数的整数である．

先行研究 [2] においては, fundamental な McKay-Thompson 級数が **モジュラー方程式** (*modular equation*) とよばれるある種の代数的な関係式をみたすことから, CM 値の数論的性質が導出される．

^{*2} 指標 $\text{ch}_{V_n^{\natural}}(g)$ の値は $g \in \mathbb{M}$ の属する共役類によってきまる．また g が $\mathbb{M}$ の単位元るとき, $\text{ch}_{V_n^{\natural}}(g) = \dim V_n^{\natural}$ である．

^{*3} Hilbert 類体の整環 (order) への一般化である．

本研究における証明の道具は, Cummins-Gannon [9] により moonshine 研究の動機の下で導入された一般化モジュラー方程式 (*generalized modular equation*)*⁴である.

2 モジュラー方程式

本節ではまず J -関数がみたす古典的なモジュラー方程式を解説したのち, 主結果の証明のための道具である, Hauptmodul に対する一般化モジュラー方程式について述べる.

2.1 classical modular equation

ここでは J -関数がみたすモジュラー方程式を導入し, そこから singular moduli の代数的整数性が導出されることを概観する ([15] など).

まず, 形式的なべき級数 $f(q) = q^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} q^m$ に対して, **モジュラー多項式**を導入する. 1 よりも大きな整数 n に対して, 行列の集合 $\Omega(n)$ を

$$\Omega(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z}) \mid \gcd(a, b, d) = 1, ad = n, 0 \leq b < d \right\}$$

と定義する.

Definition 2.1. 2 変数多項式 $F_n^f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ が任意の $\omega \in \Omega(n)$ に対して

$$F_n^f(f(q), (f \circ \omega)(q)) = 0$$

をみたすとき, $F_n^f(X, Y)$ は $f(q)$ に対するオーダー n の**モジュラー多項式**であるという. またこのとき上の方程式を $f(q)$ についてのオーダー n の**モジュラー方程式**という.

$J(q) = j(q) - 744$ と任意の整数 $n > 1$ について, オーダー n のモジュラー多項式 $F_n^J(X, Y)$ を次のように構成できる. まず 1 変数の多項式 $F_n^J(Y)$ を

$$F_n^J(Y) := \prod_{\omega \in \Omega(n)} (Y - J \circ \omega).$$

と定義する. このとき定義から, $F_n^J(Y)$ の係数は $\{J \circ \omega\}_{\Omega(n)}$ の元の対称式であり, $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は集合 $\{J \circ \omega\}_{\Omega(n)}$ の元の置換をひきおこすことなどから, 各係数は $SL_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー関数であることがわかる. したがって $J(z)$ の Hauptmodul 性から, 各係数についてある多項式 P, Q があって, $\frac{P(J(z))}{Q(J(z))}$ の形に書けるが, J の正則性と全射性から, Q は定数多項式であることが従う. すなわち, 多項式 $F_n^J(Y)$ の各係数は $J(z)$ の多項式である. そこで $\mathbb{C}[X, Y] \simeq \mathbb{C}[J, Y]$ であることから, 係数に現れる J を新たな変数とみることで, 2 変数の多項式 $F_n^J(X, Y)$ であって

$$F_n^J(J, Y) = F_n^J(Y)$$

となるものが得られる. この構成から $F_n^J(X, Y)$ は任意の整数 $n > 1$ について, J についてのオーダー n のモジュラー方程式をみたす. たとえば,

$$\begin{aligned} F_2^J(X, Y) &= (X^2 - Y)(Y^2 - X) - 393768(X^2 + Y^2) \\ &\quad - 42987520XY - 40491318744(X + Y) + 12098170833256 \end{aligned}$$

*4 "generalized modular equation" という用語は本稿で用いた概念以外にもいくつかの方面で使用されているようである.

などとなっている。

さて、 J -関数がモジュラー方程式をみたすという事実から、singular moduli の代数的整数性が導かれる。

Theorem 2.2. $\tau \in \mathbb{H}$ が 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$) の解であるとする。このとき、 $J(\tau)$ は代数的整数である。

Proof. 証明の概略を述べる。 a, b, c は互いに素であり、 $a > 0, c \neq 0$ として一般性を失わない。 $a\tau^2 + b\tau + c = 0$ より $-\frac{1}{\tau} = \frac{a\tau+b}{c}$ である。これより両辺の虚部をみることで、 $c > 0$ がわかる。 b を c で割った式を $b = mc + b'$ とかくと、 J -関数の $SL_2(\mathbb{Z})$ -不変性から、

$$J(\tau) = J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = J\left(\frac{a\tau+b}{c}\right) = J\left(\frac{a\tau+b}{c} - m\right) = J\left(\frac{a\tau+b'}{c}\right) = J\left(\begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & c \end{pmatrix} \tau\right)$$

となる。いま、 $\gcd(a, b', c) = 1, 0 \leq b' < c$ であるので、 $J(\tau)$ はモジュラー多項式の対角制限 $F_{ac}^J(X, X)$ の零点である；

$$F_{ac}^J(J(\tau), J(\tau)) = F_{ac}^J\left(J(\tau), J\left(\begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & c \end{pmatrix} \tau\right)\right) = 0.$$

$F_{ac}^J(X, X)$ は $\mathbb{Z}$ -係数のモニック多項式であることがわかるので、 $J(\tau)$ は代数的整数である。 ■

2.2 Monstrous moonshine and generalized modular equation

Borcherds は [1] において、頂点作用素代数や無限次元 Lie 代数などの代数系の理論を駆使して、モンスター群の指標からつくられる McKay-Thompson 級数が**再生性** (*replicability*) とよばれる代数的な再帰性をみたすことを示し、それによって各 McKay-Thompson 級数のすべての Fourier 係数が既知の Hauptmodul のそれと一致することを確認し、moonshine を証明した。このようなことから、証明がされた後であっても、なぜモンスター群と Hauptmodul という 2 つの全く異なる対象が関係をもつかは十分には明らかでないという問題意識があった (“conceptual gap” [12])。この要因の 1 つには、証明のカギとなった再生性が代数的な概念であるのに対し、Hauptmodul は Riemann 面の幾何学に由来するトポロジカルな概念であることが挙げられる。このような動機から Cummins-Gannon [9] は、**一般化モジュラー方程式** (*generalized modular equation*) の概念を導入して、あるクラスの Hauptmodul の代数的な特徴づけを与えた。以下ではこの理論を概観する。

前に見たように、 $J(q)$ はすべてのオーダー $n > 1$ についてモジュラー方程式をみたすが、この性質は次の意味で J -関数を特徴づけている。

Theorem 2.3. [14] $h(q) = q^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m$ ($a_m \in \mathbb{C}$) がすべての $n > 1$ についてオーダー n のモジュラー方程式をみたすとする。このとき、 $h(q) = J(q)$ または $h(q) = q^{-1}, q^{-1} \pm q$ である。

[9] はこのようなモジュラー方程式との関係をより一般の Hauptmodul に対しても明らかにした。その結果を述べるために、一般化モジュラー方程式 (generalized modular equation) の概念を導入する。 n を N と互いに素な正の整数とし、 $*n$ によって、

$$\zeta_N * n = \zeta_N^n$$

となる $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ の元を表すこととする。

Definition 2.4. q についての形式的なべき級数 $f(q) = q^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m$ と 1 より大きなある整数 n に対し, 2 変数多項式 $F_n^f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ が任意の $\omega \in \Omega(n)$ に対して

$$F_n^f((f * n)(q), (f \circ \omega)(q)) = 0$$

をみたすとき, $F_n^f(X, Y)$ は $f(q)$ に対するオーダー n の一般化モジュラー多項式であるという. ここで $*n$ は $f(q)$ の q -係数に施すものとする. またこのとき上の方程式を $f(q)$ についてのオーダー n の一般化モジュラー方程式という.

定義から, h の Fourier 係数と多項式 F_m^h の係数が有理数にとれるときは, 一般化されたモジュラー方程式は通常モジュラー方程式と概念として一致する. [9] は次を示した;

Theorem 2.5. ([9]Theorem.1.3,1.4) $q = e^{2\pi iz}$ についての級数 $f(q) = q^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m$ ($a_m \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$) について, f が $n \equiv 1 \pmod{N}$ なるすべてのオーダー n についてのモジュラー方程式をみたすための必要十分条件は, f が $f(q) = q^{-1} + a_1 q$ であるか, ある種数 0 の moonshine-type(Definition.3.6 参照) な離散群 Γ についての Hauptmodul であることである. とくに, Hauptmodul h に対しては,

$$F_n^h(h * n, Y) = \prod_{\omega \in \Omega(n)} (Y - h \circ \omega)$$

がオーダー n の一般化モジュラー多項式である.

このように, ある種の Hauptmodul はモジュラー方程式によって (自明なものを除いて) 特徴づけられる. 主結果の証明においては, 少なくとも 1 つのオーダーの ("性質の良い") モジュラー方程式があればよいので, この定理の設定よりも一般的な Hauptmodul を扱う.

3 主結果の証明

本節では, 講演の主結果 (Theorem.1.6) の証明を概説する. 証明の流れは前に見た J -関数の場合と同様であるが, 一般化にあたっていくつかの障壁が生じる. 証明は大きく次の 3 ステップに分けられる;

1. 通常モジュラー方程式への帰着
2. モジュラー方程式の係数の計算
3. CM 値の評価

以下では, $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ を種数 0 の離散群とし, ある $N \geq 1$ について合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を含むものとする. また, Γ の Hauptmodul h の Fourier 係数はある円分体の整数環に含まれるとする. このとき, 一般性を失わずに h の Fourier 係数は指数 n の円分体の整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ に含まれるとしてよい (プレプリント [18] 参照).

3.1 通常モジュラー方程式への帰着

[9] の結果から, 考えている Hauptmodul は N を法として 1 と合同なオーダーに対する前述の形の一般化モジュラー方程式をみたす. 一般化モジュラー方程式は通常モジュラー方程式に円分体の Galois 群の作用による捻りを加えたものであり, 主結果の証明では最終的に, モジュラー多項式の 2 つの変数をどちらも h とするような対角制限を考えるので, このような捻りは都合が悪い. これは考えるモジュラー方程式のオーダーをうまくとることによって解消される.

Proposition 3.1. [9, Proposition.6.14] n を N と互いに素な整数とする．種数 0 の離散群 $\Gamma \supset \Gamma_0(N)$ と Fourier 係数が $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ にとれるようなその Hauptmodul h に対して,

$$h * n^2 = h$$

が成り立つ．

この命題は，主合同部分群 $\Gamma(N)$ のモジュラー関数であって，Fourier 係数が円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ にとれるものの全体のなす体を $\mathfrak{F}_N$ で表すことにすると， $*n^2$ が $\mathfrak{F}_N$ の自己同型を与えることから従う．したがってこのような n^2 を改めて n とおくことで，次を得る．

Proposition 3.2. 種数 0 の離散群 $\Gamma \supset \Gamma_0(N)$ と Fourier 係数が円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ にとれるような Hauptmodul とする． n を N と互いに素な平方数とするととき，

$$F_n^h(h, Y) = F_n^h(Y) \in \mathbb{Q}(\zeta_N)[h][Y]$$

が成り立つ．

このように，オーダー n が N と互いに素な平方数であるとき，一般化されたモジュラー方程式 $F_n^h(Y) = F_n^h(h, Y)$ の Y についての係数は， $(h * n$ を含まず) h だけの多項式でかけることがわかる．

3.2 モジュラー方程式の係数の計算

上で構成したモジュラー多項式について，その対角制限 $F_n^h(X, X)$ の係数，とくに最高次係数について考察する．いま，

$$F_n(h, h) \in \mathbb{Q}(\zeta_N)[h]$$

であるから， $F_n(h, h)$ は (一般には $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ に係数をとる) Fourier 展開をもつ．その展開は，

$$\begin{aligned} F_n(h(z), h(z)) &= \prod_{\omega \in \Omega(n)} (h(z) - h \circ \omega(z)) \\ &= \prod_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Omega(n)} \{(q^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m) - (\zeta_d^{-b} q^{-a/d} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_d^b q^{am/d})\} \end{aligned}$$

のようになり， $F_n(h, h)$ の Fourier 係数は， $\mathbb{Z}[\zeta_N, \zeta_n]$ にとれることがわかる． $\mathbb{Q}(\zeta_N) \cap \mathbb{Z}[\zeta_N, \zeta_n] = \mathbb{Z}[\zeta_N]$ であるので， $F_n(h, h)$ は $h(q)$ と同じく $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ に係数をとる Fourier 展開をもつことがわかる．それを

$$F_n(h, h) = \sum_{m=-m_0}^{\infty} b_m q^m, \quad b_m \in \mathbb{Z}[\zeta_N], m_0 \in \mathbb{Z}_{>0}, b_{-m_0} \neq 0$$

とおく．

ここで， $h(q) = q^{-1} + \dots$ であったことから， h の多項式 $F_n(h, h)$ の最高次の項は， $b_{-m_0} h(q)^{m_0}$ となっている．さらに $h(q)^{m_0} = q^{-m_0} + \sum_{m > -m_0} c_m q^m$ ($c_m \in \mathbb{Z}[\zeta_N]$) とおくと，

$$\begin{aligned} F_n(h, h) - b_{-m_0} h(q)^{m_0} &= b_{-m_0} q^{-m_0} + b_{-m_0+1} q^{-m_0+1} + \dots \\ &\quad - b_{-m_0} q^{-m_0} - b_{-m_0} c_{-m_0+1} q^{-m_0+1} - \dots \\ &= (b_{-m_0+1} - b_{-m_0} c_{-m_0+1}) q^{-m_0+1} + \dots \end{aligned}$$

となることから， $F_n(h, h)$ のその次の項は $(b_{-m_0+1} - b_{-m_0} c_{-m_0+1}) h(q)^{-(m_0+1)}$ となる．以下同様にして， $F_n^h(h, h)$ の h の多項式としての係数が高次の係数から順に決まっていく．このようにして，以下が得られる．

Proposition 3.3. n を N と互いに素な平方数とする. 円分体の整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ に Fourier 係数をとる Hauptmodul h に対し, h の多項式 $F_n(h, h)$ の係数は同じく $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ にとれる. また, その最高次係数は,

- (a) n が 2 つ以上の素因子をもつとき, 整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ の単数である.
- (b) n が素数 p のべきであるとき, 整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ のある単数 u があって pu とかける.

3.3 CM 値の評価

定理の CM 点 τ について, $h(\tau)$ がモジュラー多項式の対角制限 $F_n^h(X, X)$ の零点であることを示す. モジュラー多項式の構成から, 任意の $\omega \in \Omega(n)$ に対して,

$$F_n^h(h(z), (h \circ \omega)(z)) = 0$$

であるので, $h(\omega\tau) = h(\tau)$ となるような $\omega \in \Omega(n)$ をみつければよい. ただし, n は $\Gamma \supset \Gamma_0(N)$ なる N と互いに素である平方数である. それには以下の補題を用いる.

Lemma 3.4. [2, Lemma.2.2] $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z})$ を行列式 n の行列とし, $\gcd(a, b, c, d) = 1$ であり $(a, N) = 1, N|c$ であるとする. このとき, ある $\gamma \in \Gamma_0(N)$ と $\omega \in \Omega(n)$ があって,

$$\rho = \gamma\omega$$

とかける.

ここで, 考えている Hauptmodul h は $\Gamma_0(N)$ -不変であるから, 問題はこの補題のような ρ をみつけることに帰着される. 証明の本質的な部分は CM 点 τ が代数的整数であるときであり, ここではその場合を概観する.

2 次形式のよく知られた性質を用いると, N を割らない素数 l であって, ある $c_l, d_l \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$Q(c_l, d_l) = \text{Nr}(\tau)N^2c_l^2 + \text{Tr}(\tau)Nc_ld_l + d_l^2 = l$$

となるようなものが無数に多く存在する. このような素数 l を 1 つ固定する. このもとで, いま τ が代数的整数であるとしていることにも注意して,

$$\rho_l = \begin{pmatrix} c_l N \text{Tr}(\tau) + d_l & -c_l N \text{Nr}(\tau) \\ c_l N & d_l \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z})$$

と定義すると, $\det(\rho_l) = Q(c_l, d_l) = l$ であり, また $\tau = \rho_l \tau$ が成り立つ. 目的のためには, 行列式が平方数である必要があるので,

$$\rho_l^2 = \begin{pmatrix} (c_l N \text{Tr}(\tau) + d_l)^2 - c_l^2 N^2 \text{Nr}(\tau) & -c_l^2 N^2 \text{Tr}(\tau) \text{Nr}(\tau) - 2c_l d_l N \text{Nr}(\tau) \\ c_l^2 N^2 \text{Tr}(\tau) + 2c_l d_l N & -c_l^2 N^2 \text{Nr}(\tau) + d_l^2 \end{pmatrix}$$

を考える. ρ_l^2 の左下成分は N の倍数であって, 左上成分を N で割った余りは d_l^2 で, したがって N と互いに素である. もし $\rho_l^2 \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z})$ の 4 成分が 1 よりも大きな公約数をもつとすると, $\det(\rho_l^2) = l^2$ からそれは l に限られる. ここで次が成り立つことが確かめられる.

Lemma 3.5. 上の $Q(x, y)$ が素数 $l \nmid N$ を表現するとき, $Q(c_l, d_l) = l$ として c_l, d_l を固定する. このような素数 (無限個ある) のうち, $\rho_l^2 \notin \text{Mat}_2(l\mathbb{Z})$ となる素数 l が無数に多く存在する.

これより, ρ_l^2 を Lemma.3.4 の条件をみたすように素数 l を (無数に多く) とることができる. $\det(\rho^2) = l^2$ であることから, この補題を用いて,

$$\rho_l^2 = \gamma\omega \quad (\gamma \in \Gamma_0(N), \omega \in \Omega(l^2))$$

とかける. いま, $h(\tau) = h(\rho \cdot \rho\tau) = h(\rho^2\tau) = h(\gamma\omega\tau) = h(\omega\tau)$ となっている. したがって $h(\tau)$ は, 最高次係数が lu (u は単数) である $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ -係数方程式 $F_{l^2}(h(X, X))$ の解である;

$$F_{l^2}^h(h(\tau), h(\tau)) = F_{l^2}^h(h(\tau), h \circ \omega(\tau)) = F_{l^2}^h(h \circ \omega(\tau)) = 0.$$

これより $l \cdot h(\tau)$ は代数的整数であることがわかる. すなわち代数的整数全体の集合を $\mathbb{O}$ とかけば, $h(\tau) \in \frac{1}{l}\mathbb{O}$ である. 一方でこのような素数 l は無数に多く存在するのでいまの l とは異なる素数 p について, $h(\tau) \in \frac{1}{p}\mathbb{O}$ がいえる. 以上より,

$$h(\tau) \in \frac{1}{l}\mathbb{O} \cap \frac{1}{p}\mathbb{O} = \mathbb{O}$$

となり, $h(\tau)$ は代数的整数であるとわかり, 主結果が CM 点 τ が代数的整数の場合に証明された. 一般の場合はこの場合から比較的容易に従う.

主定理の仮定をみたす離散群と Hauptmodul の系列として, 次のようなものがある.

Definition 3.6. 離散部分群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ が, 以下の条件

- Γ はある N について, $\Gamma_0(N)$ を含む.
- $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

を満たすとき, Γ は moonshine-type であるという.

Proposition 3.7. ([8],[12]) 種数 0 の moonshine-type の離散群は, 6486 個存在する. そのうち 616 個に対応する Hauptmodul の Fourier 係数は有理整数であり, 残りはある円分体の整数環に係数をもつ.

モンスター群 M の各共役類から Moonshine の意味で得られる種数 0 の離散群はすべて moonshine-type であり, したがってこの 616 個の有理整数係数の Hauptmodul のうち, 173 個がモンスター群の McKay-Thompson 級数である.

Corollary 3.8. τ は主定理と同じものとする. 種数 0 で moonshine-type である 6486 個の離散群 Γ とその Hauptmodul h に対し, $h(\tau)$ は代数的整数である.

4 今後の展望

本節では, 今後の課題であると思われることを述べる.

4.1 環類体

先行研究 [2] においては, fundamental な McKay-Thompson 級数の CM 値の代数的整数性のみならず, それに対応する虚 2 次体の整環についての環類体を生成することも証明されている. このような性

質は本研究で扱ったようなより一般の Hauptmodul にも期待され、実際に Fourier 係数が有理数であるような Hauptmodul については証明されている [7]. しかし, [2],[7] では志村の相互律 ([15],[17]) とよばれる, $\mathbb{Q}$ 上のモジュラー関数の特殊値への Galois 群の作用を記述する結果を利用して、本研究で対象とした円分整数の Fourier 係数をもつ Hauptmodul に直ちに应用できるものではないと考えられる.

4.2 有限散在群の指標との関係

本研究ではモンスター群の moonshine を足掛かりとして特別なモジュラー関数である Hauptmodul の特殊値について研究した. 一方で近年, モンスター群以外の多くの有限散在群についても moonshine 現象というべき, 有限散在群とモジュラー形式 (の一般化) との関係が研究されている ([3],[10] など). これらは有限散在群の指標とモジュラー形式の Fourier 係数との関係性を与えるが, 他方で次のような有限散在群の指標 (とくに既約表現の次元) とモジュラー形式 (とくに Hauptmodul) の CM 値との間の興味深い関係も散発的に見いだされている ([10],[13]);

e.g. 4.1. j -関数に対して,

$$85995 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(j \left(\frac{1 + \sqrt{-15}}{4} \right) + j \left(\frac{1 + \sqrt{-15}}{2} \right) \right).$$

ここで 85995 は Thompson 散在群 Th の虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ 上の既約表現の次元でもある.

e.g. 4.2. 種数 0 の合同部分群 $\Gamma_0(3)$ の Hauptmodul $T_3(z) = \frac{\eta(z)^{12}}{\eta(3z)^{12}}$ に対して,

$$16 = \frac{1}{\sqrt{-11}} \left(T_3 \left(\frac{-1 + \sqrt{-11}}{6} \right) - T_3 \left(\frac{1 + \sqrt{-11}}{6} \right) \right).$$

ここで 16 は 2 つの Mathieu 散在群 M_{11}, M_{12} の虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ 上の既約表現の次元でもある.

このような有限群の指標とモジュラー形式の特殊値との間の関係性の背景を明らかにできれば大変興味深いと思われる.

謝辞

本講演の機会を与えていただいた、軍司圭一先生、武田秀一郎先生に感謝いたします。また本講演は講演者の修士論文に基づくものであり、論文執筆にあたってご指導いただいた、成田宏秋先生に改めて感謝いたします。

参考文献

- [1] R. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*. Invent.Math.109,405-44, 1992.
- [2] I. Chen and N. Yui, *Singular values of Thompson series*. Groups,Difference Sets,and the Monster, 255-326, 1993.
- [3] M. Cheng,J. Duncan and J. Harvey, *Umbral Moonshine*. Number Theory Phys.4,no.2,101-242, 2014.
- [4] J.H. Conway,R.T. Curtis,S.P. Norton,R.A. Parker and R.A. Wilson , *An Atlas of Finite Groups*. Oxford University Press, 1985.

- [5] J.H. Conway and S.P. Norton , *Monstrous Moonshine*. Bull.London.Math.Soc.11,308-39, 1979.
- [6] D. Cox, *Primes of the forms $x^2 + ny^2$* , 2nd ed. Pure and Applied Mathematics(Hoboken), John Wiley&Sons, Inc., 2013.
- [7] D. Cox, J. McKay, and P. Stevenhagen, *Principal Moduli and Class Fields*. Bulletin of the London Mathematical Society, vol.36, 2003.
- [8] C. Cummins, *Congruence Subgroups of Groups Commensurable with $PSL(2, \mathbb{Z})$ of Genus 0 and 1*. Experiment.Math. 13, 361-82, 2004.
- [9] C. Cummins and T. Gannon, *Modular equations and the genus zero property of moonshine functions*. Invent.Math.129, 413-43, 1997.
- [10] J. Duncan, *From the Monster to Thompson to O’Nan*. Vertex operator algebras, number theory and related topics, Contemp. Math., vol. 753, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 73–93, 2020.
- [11] T. Gannon, *Moonshine beyond the Monster-The Bridge Connecting Algebra, Modular Forms and Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [12] T. Gannon, *The Algebraic Meaning of Being a Hauptmodul*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 204-218, 2010.
- [13] J. Harvey and B. Rayhaun, *Traces of singular moduli and moonshine for the Thompson group..* Commun. Number Theory Phys.10, no. 1, 23–62. 2016.
- [14] D. Kozlov, *On completely replicable functions and external poset theory*. MSc thesis, University of Lund, Sweden, 1994.
- [15] S. Lang, *Elliptic Functions*, 2nd edn. New York, Springer, 1997.
- [16] J.P. Serre, *A Course in Arithmetic*. GTM, No.7. New York-Heidelberg, Springer(1973).
- [17] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.
- [18] K. Tomiyama, *Generalized modular equations and arithmetic properties of singular values of Hauptmoduln*. arXiv:2505.05135, 2025.
- [19] 富山和樹, Hauptmodul の singular value の数論的性質. 早稲田整数論研究集会 2025 報告集, 47-57, 2025.