

レベル 2 の Fricke 群に対する Eisenstein 級数の臨界点について

九州大学大学院 数理学府 杉林直樹

Naoki Sugibayashi

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

以下、 $\mathbb{H}$ は上半平面とする。偶数 $k \geq 2$ に対して、(正規化された) 重さ k の Eisenstein 級数は

$$E_k(\tau) := 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad (q := e^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathbb{H})$$

という Fourier 級数で与えられる (ただし、 B_k は Bernoulli 数で $\sigma_{k-1}(n)$ は約数関数)。特に $k \geq 4$ のときは、Eisenstein 級数 E_k は重さ k のモジュラー形式となる。Eisenstein 級数については様々な側面が研究されているが、その一つに 1970 年に F. Rankin と Swinnerton-Dyer によって示された以下の結果がある:

Theorem 0.1 ([7]). $k \geq 4$ を偶数とする。このとき、 E_k の標準基本領域 $\mathcal{F}$ 上の零点は全て半径 1 の円弧上に存在する。ただし、 $\mathcal{F}$ は以下のように与えられる:

$$\mathcal{F} := \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}\}.$$

彼女らが確立した証明手法は、のちの零点研究の基本手法となっており、金子による報告書 [13] に 2000 年代前半までの進展が詳しくまとめられている。2000 年代後半に入ってから、Miezaki-Nozaki-Shigezumi [6] や Shigezumi [9]、Kuga [5] など、Theorem 0.1 を Fricke 群をはじめとする第一種 Fuchs 群へと拡張する方向の研究が行われている。

一方、準モジュラー形式の零点に関する研究は、2010 年に Basraoui-Sebbar [1] による、重さ 2 の Eisenstein 級数 E_2 の零点研究が最初である。その後、Saber-Sebbar [8] により “equivariant form” と呼ばれる対象が準モジュラー形式の零点研究に導入され、Gun-Oesterlé [3] は equivariant form を用いることで Eisenstein 級数 E_k の臨界点、すなわち微分の零点の分布を明らかにした。

本研究では、Gun-Oesterlé [3] の方針でレベル 2 の Fricke 群上の Eisenstein 級数の臨界点分布を調べ、いくつかの結果を得た。本稿は、筆者が RIMS 研究集会「保型形式、保型表現、L 関数の研究」で行った講演の内容に基づく。

1. 主結果

本稿の主定理を紹介するにあたり、いくつかの Notation を準備する。以下、 $p \in \{1, 2, 3\}$ とする。

- レベル p の Hecke の合同部分群を以下のように定める:

$$\Gamma_0(p) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{p} \right\}.$$

- レベル p の Fricke 群を

$$\Gamma_0^*(p) := \Gamma_0(p) \cup \Gamma_0(p) W_p = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W_p \rangle$$

と定める。ただし、 $W_p := \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix}$ は Fricke involution である。

- Fricke 群 $\Gamma_0^*(p)$ 上の標準基本領域を以下のように定める:

$$\mathcal{F}_p^* := \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1/\sqrt{p}, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}\}.$$

- 基本領域 $\mathcal{F}_p^*$ の lower arc を以下のように定める。

$$\mathcal{A}_p^* := \{\tau \in \mathcal{F}_p^* \mid |\tau| = 1, -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) < \frac{1}{2}\}.$$

1.1. Fricke 群上のモジュラー形式と Eisenstein 級数. Fricke 群上のモジュラー形式の定義を復習する。

Definition 1.1. 正則関数 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき、Fricke 群 $\Gamma_0^*(p)$ に対する重さ $k \in \mathbb{Z}$ のモジュラー形式と呼ぶ。

- (1) 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^*(p)$ に対して、次が成り立つ:

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau).$$

- (2) f は以下のような Fourier 級数展開を持つ:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n.$$

また、Fricke 群 $\Gamma_0^*(p)$ に対する重さ k のモジュラー形式のなす空間を $\mathcal{M}_k(\Gamma_0^*(p))$ とおく。

準モジュラー形式についても、レベル 1 の場合と同様に定義することができる (詳しくは Zagier [12] などの標準的なテキストを参照されたい)。モジュラー形式は非常に多くの対称性を持っており、その対称性的一端として次の valence formula と呼ばれる公式が得られる。

Theorem 1.2 ([2]). $k \geq 4$ を偶数とする。このとき、零でないモジュラー形式 $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0^*(p))$ に対して、

$$\operatorname{ord}_{i\infty}(f) + \sum_{\tau \in \Gamma_0^*(p) \backslash \mathbb{H}} \frac{\operatorname{ord}_{\tau}(f)}{e_{\tau}} = \frac{p+1}{24} k$$

が成り立つ。ここで、 e_{τ} は $\tau \in \mathbb{H}$ の固定化部分群 $\Gamma_0^*(p)_{\tau}$ の位数の半分である。

Remark 1.3. $p = 1$ の場合について、[11] はこの公式を深さ 1 の準モジュラー形式へと拡張している。しかし、準モジュラー形式の場合は基本領域の取り方に依存した形になっている。

偶数 $k \geq 4$ に対して、Fricke 群 $\Gamma_0^*(p)$ に対する重さ k の Eisenstein 級数を

$$E_{k,p}^*(\tau) := \frac{1}{p^{k/2} + 1} \left(p^{k/2} E_k(p\tau) + E_k(\tau) \right)$$

と定める。このとき、Eisenstein 級数 $E_{k,2}^*$ の零点分布については以下の定理が知られている:

Theorem 1.4 ($p = 1$ の場合は [7]、 $p = 2, 3$ の場合は [6]). Eisenstein 級数 $E_{k,p}^*$ の基本領域 $\mathcal{F}_p^*$ 上の零点は全て円弧 $\mathcal{A}_p^*$ 上に存在する。

特に、証明の過程から次のこともわかる:

Corollary 1.5. Eisenstein 級数 $E_{k,2}^*$ について以下が成り立つ。

(1) $\rho_2 := \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ としたとき、

$$\text{ord}_{\rho_2}(E_{k,2}^*) = \begin{cases} 3 & k \equiv 2 \pmod{8}, \\ 2 & k \equiv 4 \pmod{8}, \\ 1 & k \equiv 6 \pmod{8}, \\ 0 & k \equiv 0 \pmod{8}. \end{cases}$$

(2) $i_2 := \frac{i}{\sqrt{2}}$ としたとき、

$$\text{ord}_{i_2}(E_{k,2}^*) = \begin{cases} 1 & k \equiv 2 \pmod{4}, \\ 0 & k \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

(3) 特に、次が成り立つ:

$$\sum_{\tau \in \mathcal{A}_p^*} \text{ord}_{\tau}(E_{k,2}^*) = \left\lfloor \frac{k-4}{4} \right\rfloor + \delta_{k \equiv 0,6} \pmod{8}.$$

1.2. 主結果. 以上の準備のもと、本稿の主結果を紹介する。最初に、標準的な基本領域 $\mathcal{F}_2^*$ 上の臨界点に関する結果を紹介する。

Theorem 1.6 ([10]). $k \geq 4$ を偶数とする。このとき、 $E_{k,2}^*$ の $\mathcal{F}_p^*$ 上の零点は全て垂直線 $\text{Re}(\tau) = \pm \frac{1}{2}$ 上に位置する。

しかし、モジュラー形式のなす空間は、微分 $' := \frac{d}{d\tau}$ に対して閉じていないため、 $\gamma \in \Gamma_0^*(2)$ でシフトした領域 $\gamma(\mathcal{F}_p^*)$ 上の臨界点分布も調べる必要がある。そこで、零でない $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0^*(p))$ に対して、次のような集合を考える:

$$Z(f') := \{\tau \in \mathbb{H} \mid f(\tau) \neq 0, f'(\tau) = 0\}.$$

$Z(f')$ の元を、 f の非自明な臨界点と呼ぶことにする。我々の二つ目の主結果は次の定理である:

Theorem 1.7 ([10]). $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^*(p)$ (ただし、 $c \neq 0$) として、 $\lambda := -\frac{d}{c}$ とする。このとき、次が成り立つ:

(1) $|\lambda| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、

$$\sum_{\tau \in \gamma(\mathcal{F}_p^*) \cap Z(E_{k,2}^{*'})} \text{ord}_{\tau}(E_{k,2}^{*'}) = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \delta_{k \equiv 6} \pmod{8}$$

が成り立つ。さらに、

$$Z(E_{k,2}^{*'}) \cap \partial(\gamma(\mathcal{F}_p^*)) = \emptyset$$

が成り立つ (ここで、 $\partial(\gamma(\mathcal{F}_p^*))$ は $\gamma(\mathcal{F}_p^*)$ の境界)。

(2) $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、以下が成り立つ。

$$Z(E_{k,2}^{*'}) \cap \gamma(\mathcal{F}_p^*) = \emptyset.$$

Remark 1.8. $\sqrt{2}W_2 \in \text{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ となるため、Theorem 1.7 中に出てくる λ は必ず有理数となる。

2. Theorem 1.6 の証明の概略

本節では、Theorem 1.6 の証明の概略を述べる。証明は以下の手順に従って行う。

Step (1) 基本領域 $\mathcal{F}_p^*$ 上の臨界点の個数を数え上げる。

Step (2) $\operatorname{Re}(\tau) = \pm \frac{1}{2}$ 上の臨界点の個数を数え上げる。

以上のステップを完遂したあと、(1) = (2) が成り立つことを示せば良い。また、Eisenstein 級数は微分しても周期性を保つため、Step (2) では $\operatorname{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ 上の零点の個数を数え上げれば良い。

2.1. 円弧 $\mathcal{A}_2^*$ 上の零点. Step (1) を遂行するにあたって、次の補題を証明する。

Lemma 2.1. 偶数 $k \geq 4$ に対して

$$Z(E_{k,2}^{*'}) \cap \overline{\mathcal{A}_2^*} = \emptyset$$

が成り立つ。特に $E_{k,2}^{*'}$ は円弧 $\mathcal{A}_2^*$ で零点を持たない。

PROOF. Eisenstein 級数の Fricke involution W_2 による変換

$$E_{k,2}^* \left(-\frac{1}{2\tau} \right) = 2^{k/2} \tau^k E_{k,2}^*(\tau)$$

について、両辺を τ で微分すると、

$$E_{k,2}^{*'} \left(-\frac{1}{2\tau} \right) = 2^{k/2+1} \tau^{k+2} E_{k,2}^{*'}(\tau) + k 2^{k/2+1} \tau^{k+1} E_{k,2}^*(\tau)$$

が成り立つ。 $E_{k,2}^*$ の Fourier 係数が実であることと $|\tau| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ という仮定を組み合わせることで、Lemma 2.1 が従う。□

2.2. Step (1) 基本領域上の臨界点の個数の数え上げ. 次に、 $E_{k,2}^*$ の基本領域 $\mathcal{F}_2^*$ 上の臨界点の個数を数え上げる。繰り返しになるが、Eisenstein 級数の微分は周期性を保つため、次の集合上の零点の個数を数え上げると十分である：

$$\mathcal{F}_2^{**} := \{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| > 1, -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2} \}.$$

Proposition 2.2. $k \geq 4$ を偶数とする。このとき、

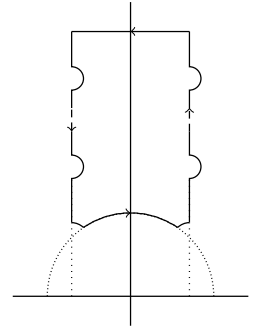
$$\sum_{\tau \in \mathcal{F}_2^{**}} \operatorname{ord}_{\tau}(E_{k,2}^{*'}) = \left\lfloor \frac{k-4}{4} \right\rfloor + \delta_{k \equiv 6} \quad (8)$$

が成り立つ。

PROOF. 留数定理により、

$$\sum_{\tau \in \mathcal{F}_2^{**}} \operatorname{ord}_{\tau}(E_{k,2}^{*'}) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{T,\varepsilon}} \frac{E_{k,2}^{*''}(\tau)}{E_{k,2}^{*'}(\tau)} d\tau$$

となるので、右辺の積分を計算すれば良い。右辺の積分は偏角の原理と Theorem 1.4 を用いることで計算ができる。詳細は [10] に譲る。□



2.3. Step (2) $\operatorname{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ 上の臨界点の数え上げ. 次に $\operatorname{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ 上の臨界点の個数を数え上げていく。関数 $h_k(\tau)$ を以下のように定める:

$$h_k(\tau) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k q^n}{(1-q^n)^2}$$

このとき、 $\operatorname{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ であれば $h_k(\tau) \in \mathbb{R}$ である。次の補題は、Eisenstein 級数の微分に関する 2 種類の級数表示を与えている。

Lemma 2.3. 偶数 $k \geq 4$ に対して、以下が成り立つ。

(1)

$$E'_k(\tau) = \frac{-4\pi i k}{B_k} h_k(\tau).$$

(2)

$$h_k(\tau) = (2\pi)^{-k-1} k! \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{Z}} c \left(\frac{c\tau + d}{i} \right)^{-k-1}.$$

Eisenstein 級数 $E_{k,2}^*$ の定義から、

$$E_{k,2}^{*'}(\tau) = \frac{1}{2^{k/2} + 1} \frac{-4\pi i k}{B_k} h_{k,2}^*(\tau)$$

が成り立つ。ただし、

$$h_{k,2}^*(\tau) := 2^{k/2+1} h_k(2\tau) + h_k(\tau)$$

である。特に、 $\operatorname{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ ならば、 $h_{k,2}(\tau) \in \mathbb{R}$ である。このとき、 $h_{k,2}^*$ の二つの級数表示を用いることで次の命題が証明できる:

Proposition 2.4. 整数 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$ に対して、

$$\tau_m := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{m\pi}{k+1}$$

とおく。このとき、 $(-1)^m h_{k,2}^*(\tau_m) > 0$ が成り立つ。

PROOF. 大筋は [3] とほとんど変わらないが、楕円点 ρ_2 付近での評価が [3] と比べてかなりシビアになっているため、少々工夫が必要となる。詳細は [10] に譲る。□

Proposition 2.4, Proposition 2.2 及び楕円点付近での $h_{k,2}^*$ の符号を調べることで、Theorem 1.6 が従う。以上が Theorem 1.6 の証明の概略である。

3. Theorem 1.7 の証明の概略

本節では Theorem 1.7 の証明の概略を述べる。モジュラー形式 $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0^*(2))$ に付随する equivariant 形式 φ_f を以下のように定める:

$$\varphi_f(\tau) := \tau + k \frac{f(\tau)}{f'(\tau)}.$$

このとき、 $\gamma \in \Gamma_0^*(2)$ に対して、

$$\varphi_f(\gamma(\tau)) = \gamma(\varphi_f(\tau))$$

が成り立つ。また、 f が $\Gamma_0^*(2)$ に対するモジュラー形式であることから、 φ_f は

$$\varphi_f(\tau) = 2^{-k/2-1} \tau^{-k-1} \frac{f'(-\frac{1}{2\tau})}{f'(\tau)}$$

と書くこともできる。特に f の Fourier 係数が全て実であると仮定して、いくつかの性質を列挙する (最初の 3 つは Fourier 係数が実でなくても成り立つ):

- (1) $\tau \in Z(f')$ ならば、 $\text{ord}_\tau(\varphi_f) = -\text{ord}_\tau(f)$ 。
- (2) $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^*(2) (c \neq 0)$ とする。このとき、 $\tau \in Z(f')$ ならば、 $\gamma(\tau) \notin Z(f')$ 。
- (3) $\gamma(\tau) \in Z(f')$ ならば、 $\text{ord}_{\gamma(\tau)}(f') = \text{ord}_\tau(\varphi_f + \frac{d}{c})$ 。
- (4) $\text{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ かつ $z \notin Z(f')$ ならば、 $\text{Re}(\tau) = \text{Re}(\varphi_f(\tau))$ 。
- (5) $|\tau| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ならば、 $|\varphi_f(\tau)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

これらの性質を用いることで、次の命題が導かれる:

Proposition 3.1. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^*(2)$ を $c \neq 0$ かつ $-\frac{d}{c} \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2}$ を満たすように取る。このとき、以下の主張が成り立つ:

- (1) $\tau \in \partial(\gamma(\mathcal{F}_2^*))$ ならば、 $\varphi_f(\tau) + \frac{d}{c} \neq 0$ である。
- (2) $f'(\tau)$ は $\partial(\gamma(\mathcal{F}_2^*))$ 上で非自明な臨界点を持たない。

以上の準備のもと、Theorem 1.7 の証明の概略を述べよう。

PROOF OF THEOREM 1.7 (SKETCH). $f = E_{k,2}^*$ としたとき、 $\varphi_f(\tau)$ の性質から、

$$Z(E_{k,2}^*) \cap \gamma(\mathcal{F}_2^*) = \{\tau \in \mathcal{F}_2^* \mid \varphi_{E_{k,2}^*}(\tau) - \lambda = 0\}$$

と言い換えることができる。よって、留数定理より、Theorem 1.7 を証明するためには次の積分を計算すれば十分である:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{T,\varepsilon}^*} \frac{\varphi_f'(\tau)}{\varphi_f(\tau) - \lambda} d\tau.$$

ここで、積分路 $C_{T,\varepsilon}^*$ は $C_{T,\varepsilon}$ と同じように選んで (ただし、 $\text{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ 上にある半円が内側を向くようにしている)。この積分を偏角の原理や Theorem 1.6 を用いて計算することにより、 $|\lambda| \neq \frac{1}{2}$ の場合に Theorem 1.7 を得る。残った $|\lambda| = \frac{1}{2}$ の場合は、開写像定理を用いることで証明できる。 $\square$

4. Future Works

最後に、関連するいくつかの課題をいくつか挙げておく。

- (1) Gun–Oesterlé [3] や申請者 [10] の成果を、素数レベルの Fricke 群上の Eisenstein 級数の臨界点へと一般化できるか？ また、Im–Lee [4] の成果を素数レベルの Fricke 群へと拡張できるか？
- (2) レベル 1 のモジュラー形式に関する valence formula は、van Iterssum–Ringeling [11] によって深さ 1 の準モジュラー形式へと拡張されている (導出過程は Theorem 1.7 と同じ方針である)。同様の方針で、Fricke 群上の深さ 1 の準モジュラー形式へと一般化できるか？ また、Riemann–Roch の定理のような幾何学的な道具を用いて準モジュラー形式に対する valence formula を導出することは可能か？
- (3) (準) モジュラー形式の零点分布研究は、現在得られている成果のほとんどはアドホックなものであり、統一的な手法が存在するわけではない。零点分布研究における何らかの統一的な手法は存在するのか？
- (4) Eisenstein 級数の場合について、零点分布や臨界点分布にこのような規則性が生じるのはなぜか？ 何らかの背景が存在するのか？

Acknowledgements

本集会における講演及び本稿の執筆の機会を与えてくださいました世話人の軍司 圭一先生 (千葉工業大学)、武田 秀一郎先生 (大阪大学) に厚くお礼申し上げます。

References

- [1] A. E. Basraoui and A. Sebbar, *Zeros of the Eisenstein series E_2* , Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 7, 2289–2299.
- [2] S. Choi and C. H. Kim, *Valence formulas for certain arithmetic groups and their applications*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 447–463.
- [3] S. Gun and J. Oesterlé, *Critical points of Eisenstein series*, Mathematika **68** (2022), no. 1, 259–298.
- [4] B.-H. Im and W. Lee, *On the real zeros of depth 1 quasimodular forms*, J. Math. Anal. Appl. **554** (2026), no. 2, Paper No. 129991, 24.
- [5] S. Kuga, *On the distribution of the zeros of Eisenstein series for $\Gamma_0^*(5)$ and $\Gamma_0^*(7)$* , Ramanujan J. **58** (2022), no. 4, 995–1010.
- [6] T. Miezeki, H. Nozaki, and J. Shigezumi, *On the zeros of Eisenstein series for $\Gamma_0^*(2)$ and $\Gamma_0^*(3)$* , J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no. 3, 693–706.
- [7] F. K. C. Rankin and H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On the zeros of Eisenstein series*, Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 169–170.
- [8] H. Saber and A. Sebbar, *On the critical points of modular forms*, J. Number Theory **132** (2012), no. 8, 1780–1787.
- [9] J. Shigezumi, *On the zeros of the Eisenstein series for $\Gamma_0^*(5)$ and $\Gamma_0^*(7)$* , Kyushu J. Math. **61** (2007), no. 2, 527–549.
- [10] N. Sugibayashi, *Critical points of the Eisenstein series for the Fricke group of level 2*, Int. J. Number Theory **22** (2026), no. 3, 489–518.
- [11] J.-W. van Ittersum and B. Ringeling, *Critical points of modular forms*, Int. J. Number Theory **20** (2024), no. 10, 2695–2728.
- [12] D. Zagier, *Elliptic modular forms and their applications*, The 1-2-3 of modular forms, 2008, pp. 1–103.
- [13] 金子昌信, いくつかのモジュラー形式の零点をめぐって, およびある微分方程式のモジュラー形式解について, 第2回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス報告集 (2003).

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, MOTOOKA 744, NISHI-KU, FUKUOKA 819-0395, JAPAN
 Email address: sugibayashi.naoki.238@s.kyushu-u.ac.jp